

Resistencia de materiales

Problemas resueltos

Resistencia de materiales

Problemas resueltos

Miquel Ferrer Ballester

José Luis Macías Serra

Frederic Marimón Carvajal

M. Magdalena Pastor Artigues

Francesc Roure Fernández

Lluís Vilaseca Vilanova

La presente obra fue galardonada en el quinto concurso
"Ajuts a l'elaboració de material docent" convocado por la UPC.

Primera edición: septiembre de 1999
Reimpresión: febrero de 2001
Segunda edición: septiembre de 2002

Diseño de la cubierta: Manuel Andreu

© los autores, 1999

© Edicions UPC, 1999
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.es

Producción: CPDA
Av. Diagonal 647, ETSEIB, 08028 Barcelona

Depósito legal: B-30564-2002
ISBN: 84-8301-621-4

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

Resistencia de materiales

Problemas resueltos

Prólogo

El presente libro es una colección de problemas resueltos destinada a facilitar el aprendizaje de la Resistencia de Materiales a través de su aplicación a la resolución de ejemplos concretos. Ha sido elaborado pensando en su uso por parte de estudiantes de Ingeniería y de Arquitectura, como texto complementario a un libro de teoría de Resistencia de Materiales. En concreto su estructura, enfoque y nomenclatura se adapta especialmente al texto *Resistencia de Materiales* de F. Roure, F. Marimón y X. Ayneto, que actualmente edita CPDA de la ETSEIB- UPC, en forma de fascículos.

Se supone que antes de abordar los problemas de cada capítulo, el lector habrá adquirido los conocimientos de teoría correspondientes, y por ello no se repasan de forma explícita en el presente libro. Se supone asimismo que el lector ha seguido previamente un curso de mecánica de medios continuos, y que dispone de los conocimientos de elasticidad lineal necesarios. Al efecto se han incluido en la Bibliografía textos de teoría sobre ambos aspectos.

Los temas que cubre este libro son los clásicos de un primer curso de Resistencia de Materiales: los temas básicos relativos a la pieza prismática. Una rápida ojeada al índice ilustra perfectamente el alcance del temario abordado. Se ha centrado el texto en estos temas básicos para adaptarlo precisamente al desarrollo de un curso de duración cuatrimestral; aunque al final de algunos capítulos se han introducido también problemas más complejos (van marcados con un asterisco), para aquellos lectores que deseen profundizar en dichos temas.

Los casos más sencillos, introductorios de cada tema, no se han incluido en este libro como problemas, porque ya suelen encontrarse como ejemplos introductorios en los libros de teoría, y no se ha considerado necesario repetirlos. Tampoco se ha pretendido elaborar una colección exhaustiva de problemas, sino seleccionar unos cuantos de cada tema, para ilustrar sus diversas facetas.

A pesar de las numerosas revisiones que hemos hecho del texto y de las pruebas de impresión, estamos seguros de que algunos errores y erratas habrán conseguido colarse (confiamos en que sean sólo algunas), y pedimos por ello disculpas al lector.

Finalmente queremos expresar nuestro agradecimiento a los siguientes estudiantes de la ETSEIB que, como becarios del Departamento, han colaborado en la esmerada confección del texto, las fórmulas y los dibujos: Pedro J. Campos San Facundo, Antonio Cerra Franco y Robert Gimeno Feu.

Los autores

Barcelona, junio de 1999

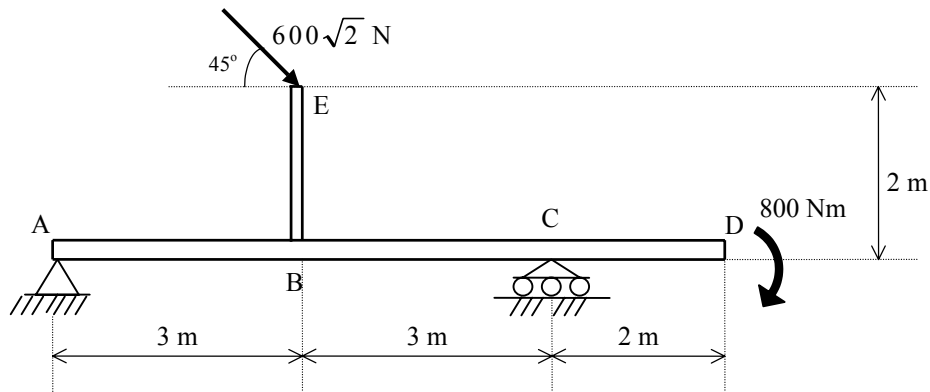
Índice

1	Diagramas de esfuerzos.....	11
2	Esfuerzo normal.....	25
3	Esfuerzo de cizalladura pura.....	35
4	Características de secciones.....	45
5	Dimensionado de secciones a flexión.....	53
6	Flexión desviada y flexión compuesta.....	75
7	Torsión y esfuerzos combinados.....	89
8	Corrimientos en piezas prismáticas.....	131
9	Piezas y sistemas hiperestáticos.....	139
10	Inestabilidad elástica.....	161
	Bibliografía.....	185

1 Diagramas de esfuerzos

Problema 1.1

Determinar los diagramas de esfuerzos en la estructura de la figura.

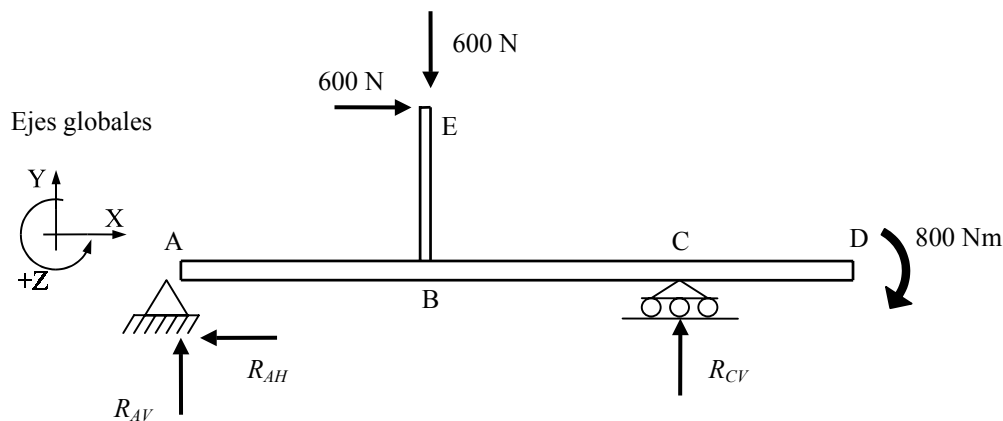


$$F_H \mid 600\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \mid 600 \text{ N}$$

$$F_V \mid 600\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \mid 600 \text{ N}$$

Resolución:

- Descomposición de la fuerza exterior aplicada en el extremo de la barra BE.
- Cálculo de las reacciones.



Tomamos momentos respecto al punto C:

$$\sum M_c \mid 0 \quad \heartsuit \quad R_{AV} \left[4 \cdot 600 + 2 \cdot 600 + 2 \cdot 800 \right] \mid 0 \quad \heartsuit \quad R_{AV} \mid 4 \frac{1000}{3} \text{ N} = -33,3 \text{ N}$$

Suma de fuerzas verticales y horizontales:

$$\sum F_V \mid 0 \quad \heartsuit \quad R_{AV} + 4 \cdot 600 + 2 \cdot 600 + R_{CV} \mid 0 \quad \heartsuit \quad \frac{1000}{3} + 2 \cdot 600 + R_{CV} \mid \frac{1900}{3} \text{ N}$$

$$\sum F_H \mid 0 \quad \heartsuit \quad R_{AH} \mid 600 \text{ N}$$

c) Cálculo de momentos en los tramos AB y BC.

Tramo AB: $M(x) = R_{AV} \cdot x = -\frac{100}{3} \cdot x$ $M_A = 0$ $M_B = -100 \text{ Nm}$

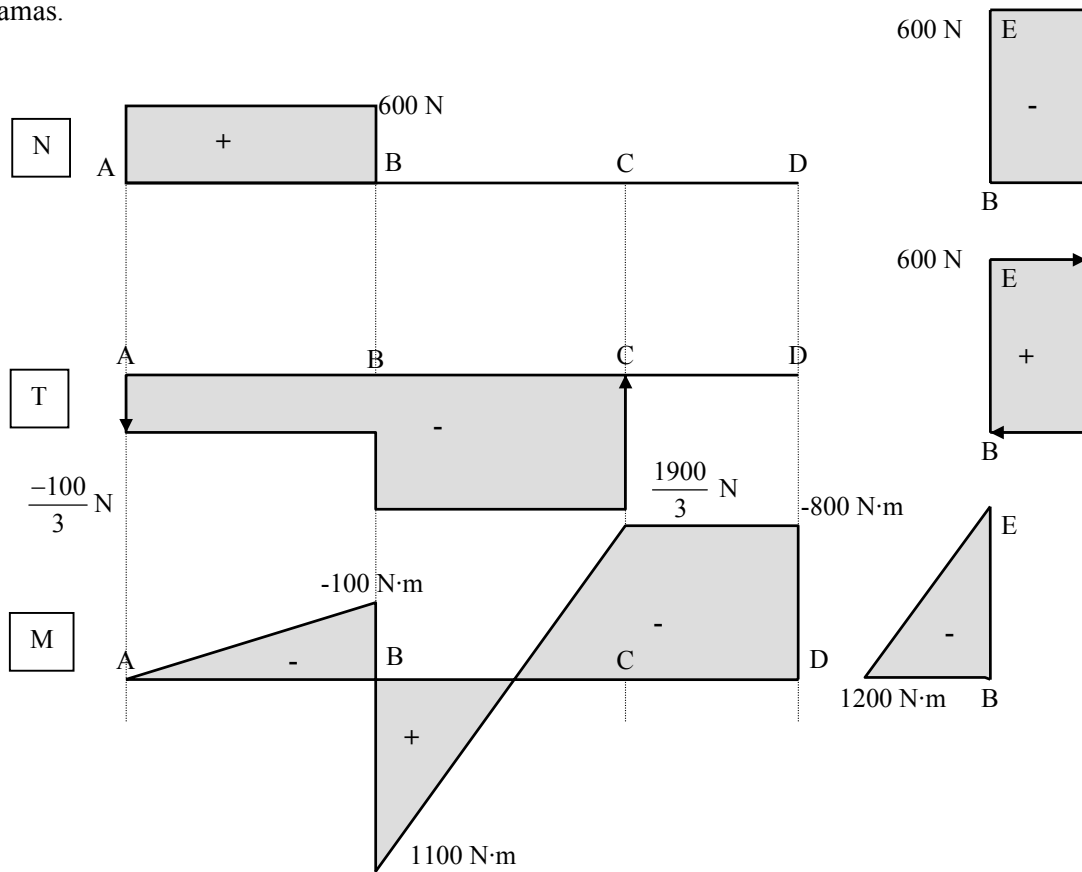
Tramo BC:

$$M(x) = R_{AV} \cdot x - 600(x - 3) + 600 \cdot 2$$

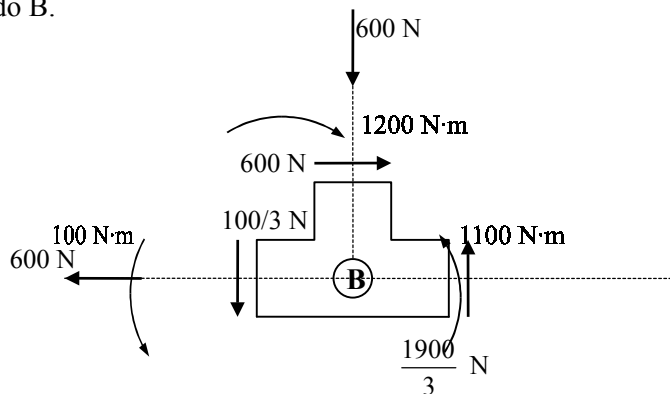
$$M_B = -\frac{100}{3} \cdot 3 - 0 + 1200 = 1100 \text{ Nm}$$

$$M_C = -\frac{100}{3} \cdot 6 - 600 \cdot 3 + 600 \cdot 2 = -800 \text{ Nm}$$

Diagramas.

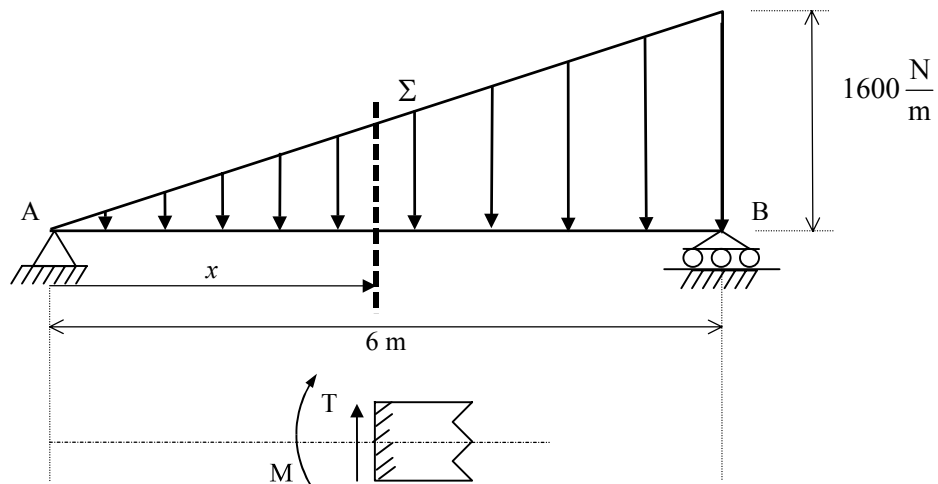


Equilibrio del nudo B.



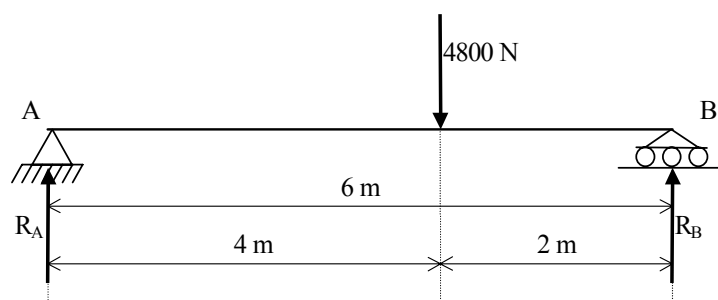
Problema 1.2

Determinar los diagramas de esfuerzos en la viga de la figura, apoyada en los extremos y sometida a una carga repartida triangular.

**Resolución:**

a) Cálculo de la reacciones.

Resultante de la carga $Q = \frac{1600 \cdot 6}{2} = 4800 \text{ N}$.



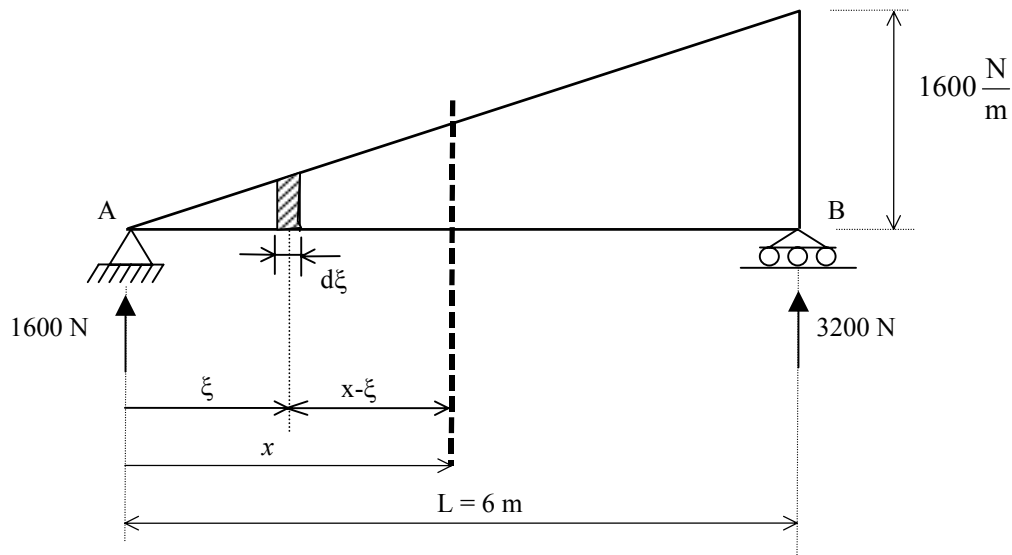
$$R_A + R_B = 4800$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot 6 = 4800 \cdot 4$$

$$R_B = \frac{4800 \cdot 4}{6} = 3200 \text{ N}$$

$$R_A = 1600 \text{ N}$$

b) Cálculo de los esfuerzos de sección.



Sección situada a una distancia x del apoyo A:

T:

$$T = 1600 - \int_0^x q \, d\xi = 1600 - \int_0^x \frac{1600}{6} \xi \, d\xi$$

$$T = 1600 - \left[\frac{1600}{6} \cdot \frac{\xi^2}{2} \right]_0^x = 1600 - \frac{1600}{12} x^2$$

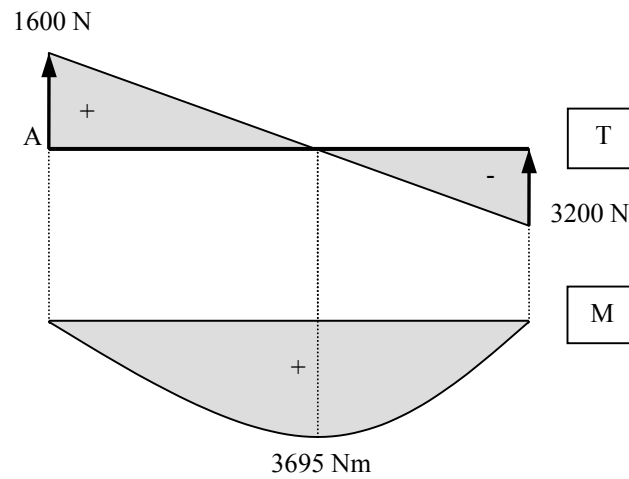
M:

$$M = 1600 x - \int_0^x q \cdot (x - \xi) \, d\xi = 1600 x - \int_0^x \frac{1600}{6} \xi \cdot (x - \xi) \, d\xi$$

$$M = 1600 x - \left[\frac{1600}{6} \cdot \left(\frac{\xi^2}{2} x - \frac{\xi^3}{3} \right) \right]_0^x$$

$$M = 1600 x - \left(\frac{1600}{6} \cdot \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right) = 1600 x - \frac{1600}{6} \cdot \frac{x^3}{6}$$

c) Diagramas.



d) Punto de $M_{\text{máx}}$

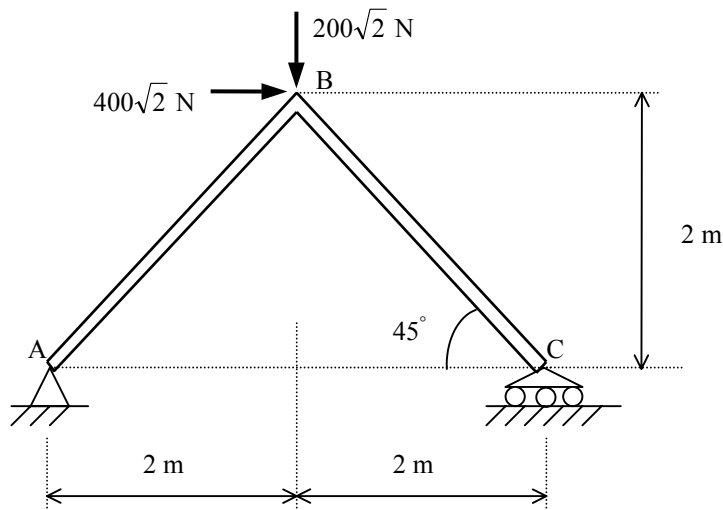
$$\frac{\partial M}{\partial x} = T \Rightarrow T = 0$$

$$T = 0 = 1600 - \frac{1600}{12} x^2 \rightarrow x = \sqrt{12} = 3,46 \text{ m}$$

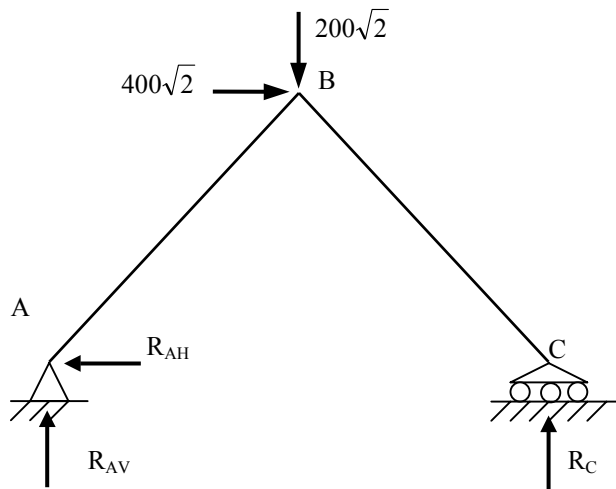
$$M_{\text{máx}} = 1600 \cdot 3,46 - \frac{1600}{12} \cdot 3,46^2 = 3695 \text{ Nm}$$

Problema 1.3

Determinar los diagramas de esfuerzos del pórtico inclinado de la figura.

**Resolución:**

Para el cálculo de las reacciones, planteamos las ecuaciones de la estática.



$$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_{AV} + R_C - 200\sqrt{2} = 0$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_{AH} = 400\sqrt{2} \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_C \cdot 4 - 400\sqrt{2} \cdot 2 - 200\sqrt{2} \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_C = 300\sqrt{2} \text{ N}$$

por tanto, $R_{AV} = -100\sqrt{2} \text{ N}$ y descomponiendo cada reacción en las direcciones de las barras,

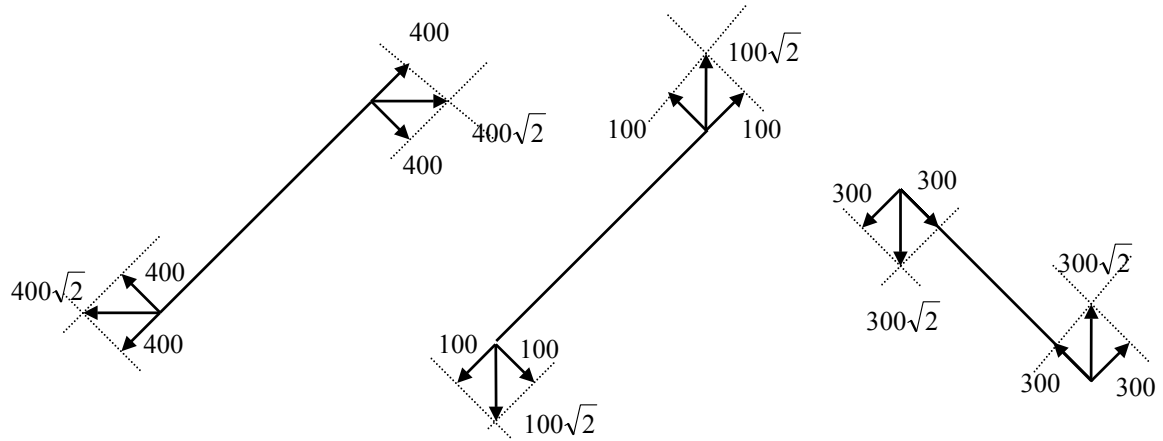


Diagrama N

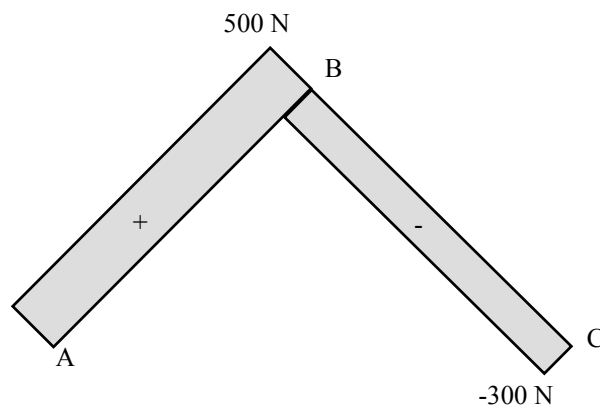


Diagrama T

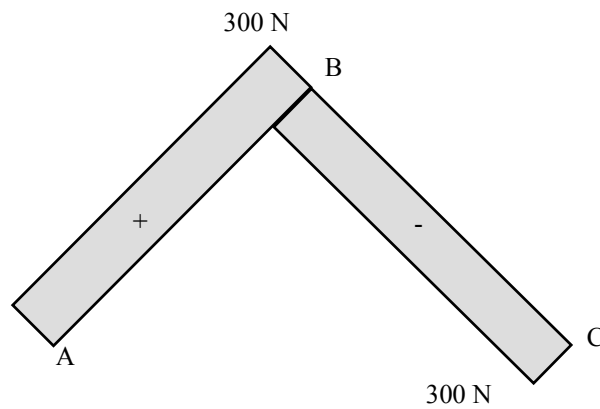
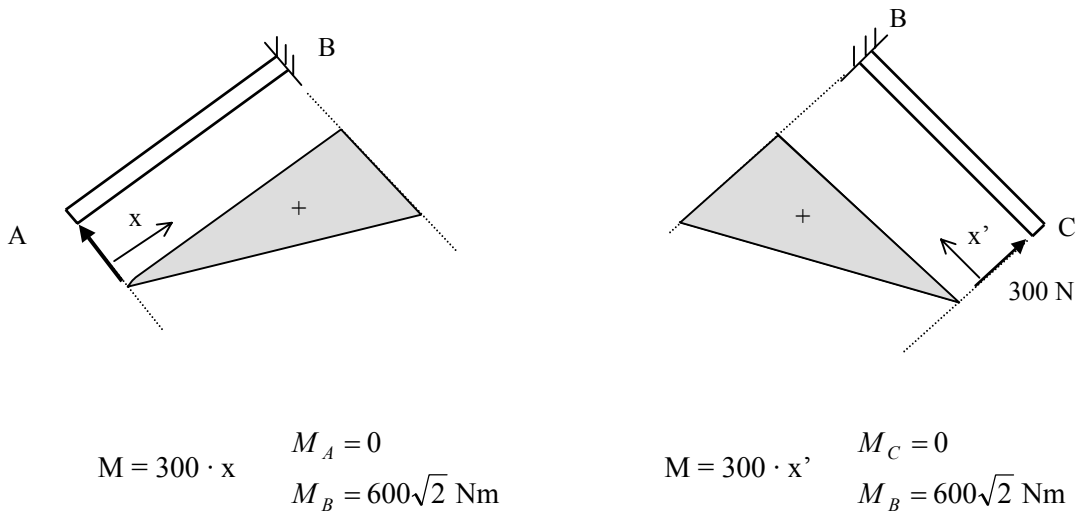
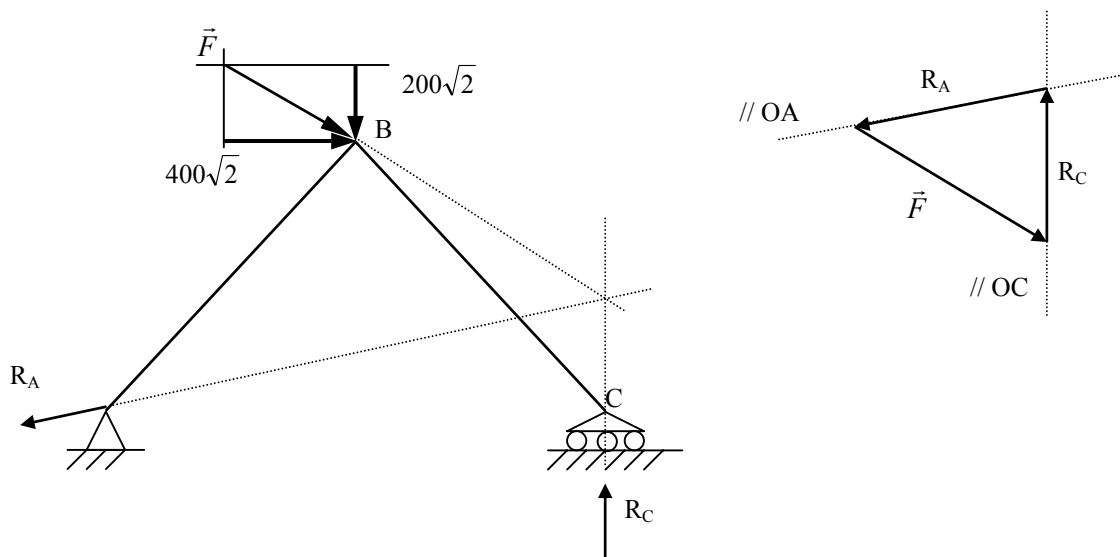


Diagrama M



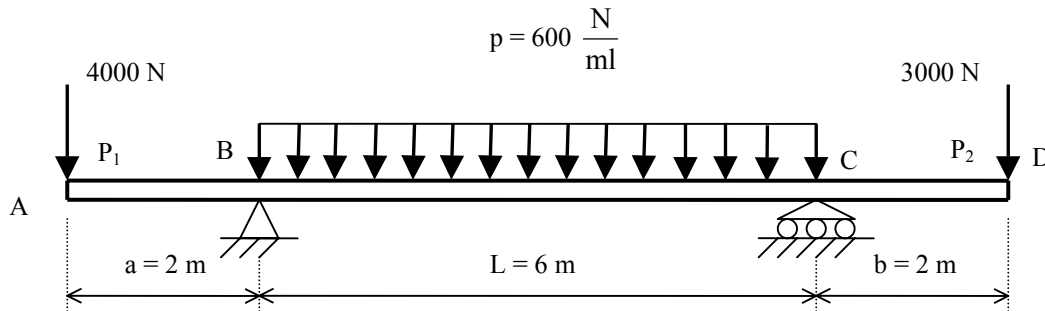
Método alternativo para hallar las reacciones: resolución gráfica.

Para que las tres fuerzas estén en equilibrio, sus líneas de acción deben cruzarse en punto O (ya que $\sum M_0 = 0$). A partir de la línea de acción vertical de R_C , se obtiene O.



Problema 1.4

Determinar los diagramas de esfuerzos en la viga de la figura.

**Resolución:**

Cálculo de las reacciones:

$$\sum F_V: R_B + R_C - 4000 - 600 \cdot 6 - 3000 = 0$$

$$\sum M_B: 4000 \cdot 2 - 600 \cdot 6 \cdot 3 + R_C \cdot 6 - 3000 \cdot 8 \Rightarrow R_C = 4467 \text{ N}$$

$$R_B = 6133 \text{ N}$$

Diagrama de momentos flectores:

Tramo AB:

$$M = -4000 \cdot x$$

$$M_A = 0 \quad M_B = -8000 \text{ Nm}$$

Tramo BC:

$$M = -4000 \cdot x + 6133 \cdot (x - 2) - 600 \cdot \frac{(x - 2)^2}{2}$$

$$M_B = -8000 \text{ Nm} \quad M_C = -6000 \text{ Nm}$$

Tramo CD:

$$M = -4000 \cdot x + 6133 \cdot (x - 2) - 600 \cdot 6 \cdot (x - 5) + 4467 \cdot (x - 8)$$

$$M_C = -6000 \text{ Nm} \quad M_D = 0$$

Diagrama de esfuerzos cortantes.

Tramo AB:

$$T = -4000 \text{ N}$$

$$T_A = -4000 \text{ N} \quad T_B = -4000 \text{ N}$$

Tramo BC:

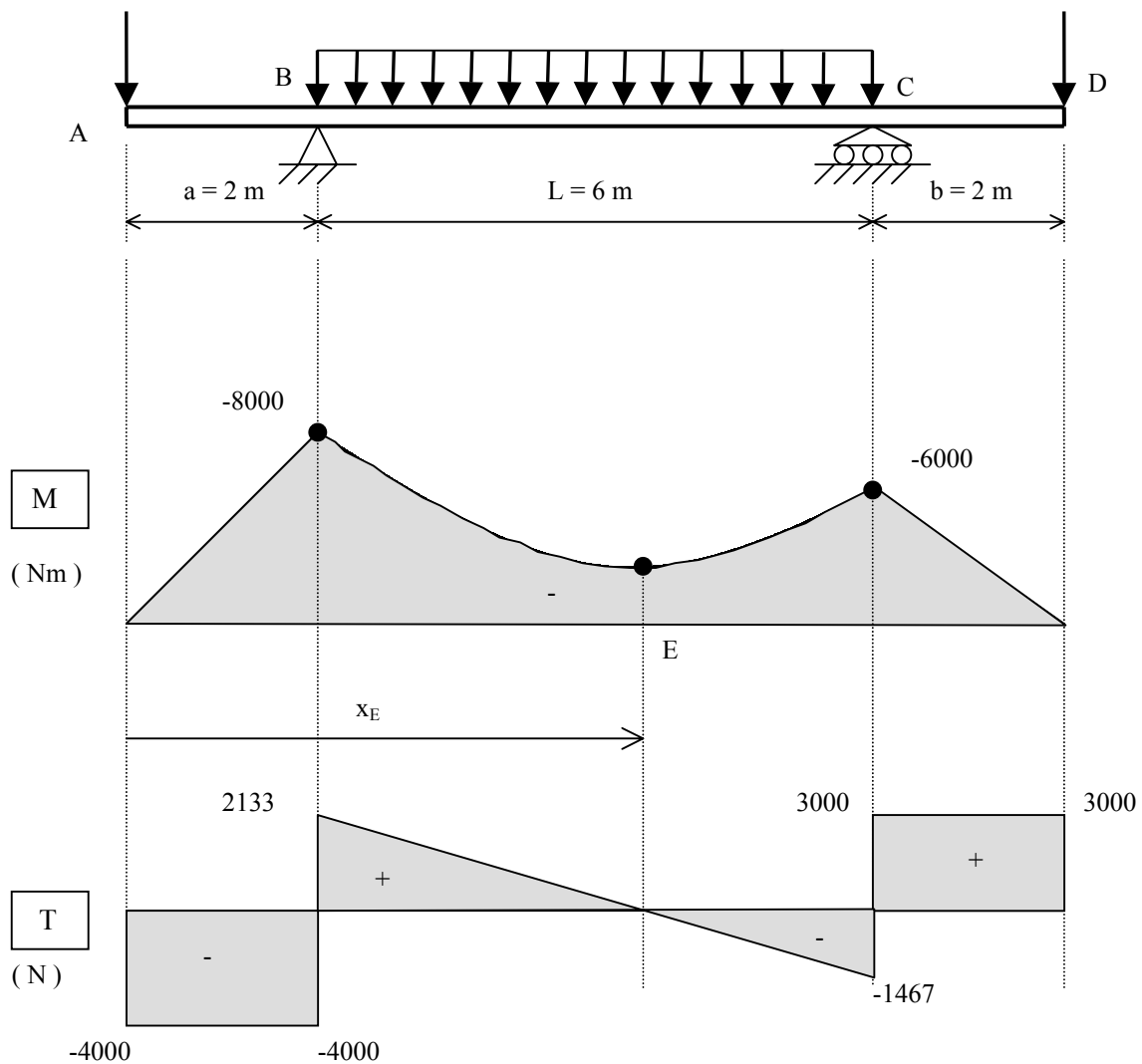
$$T = -4000x + 6133 - 600 \cdot (x - 2)$$

$$T_B = 2133 \text{ N} \quad T_C = -1467 \text{ N}$$

Tramo CD:

$$T = -4000 + 6133 - 3600 + 4467$$

$$T_C = 3000 \text{ N} \quad T_D = 3000 \text{ N}$$



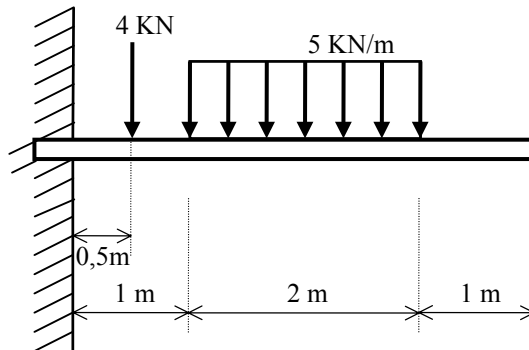
El diagrama de momentos flectores pasa por un mínimo relativo en el punto E, donde la tangente es horizontal, o sea:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T = 0 \quad : \quad -4000 + 6133 - 600 \cdot (x_E - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 5,35 \text{ m}$$

$$M_E = -4208 \text{ Nm}$$

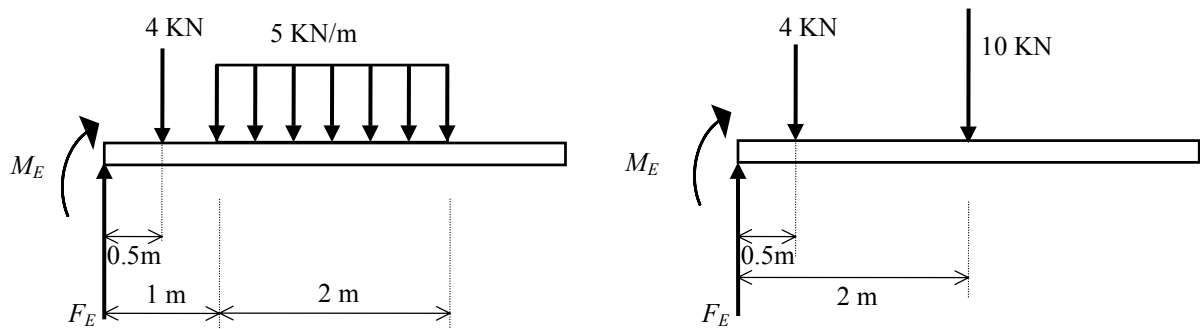
Problema 1.5

En la viga en voladizo de la figura, calcular las reacciones en el empotramiento y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores en toda la viga.

**Resolución:**

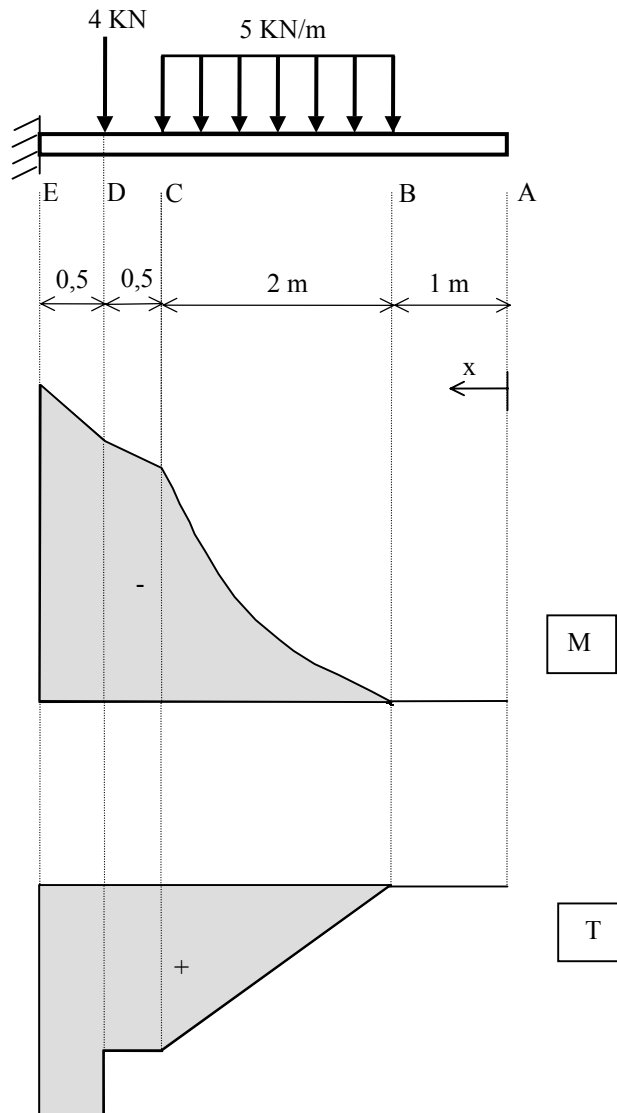
a) Reacciones en el empotramiento.

Comenzaremos por buscar el sistema de fuerzas que ejerce el empotramiento, dibujamos el diagrama de sólido libre y obligamos al equilibrio. Sumando fuerzas y tomando momentos obtenemos:



$$\left. \begin{aligned} F_E &= 14 \text{ kN} \\ M_E &= -4 \cdot 0,5 - 10 \cdot 2 = -22 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \right\} \text{Reacciones que ejerce el empotramiento sobre la viga.}$$

b) Diagramas



Tramo AB: $M = 0$ $T = 0$

Tramo BC:

$$M = -5 \cdot \frac{(x-1)^2}{2} \text{ (KN} \cdot \text{m)} \quad M_B = 0$$

$$M_C = 0$$

$$T = -5 \cdot (x-1) \text{ (KN)}$$

$$T_B = 0$$

$$T_C = -10 \text{ KN}$$

Tramo CD:

$$M = -10 \cdot (x - 2) \text{ (KN} \cdot \text{m)} \quad M_C = -10 \text{ KN} \cdot \text{m}$$
$$M_D = -15 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$T = -10 \text{ (KN)} \quad T_C = -10 \text{ KN}$$
$$T_D = -10 \text{ KN}$$

Tramo DE:

$$M = -10 \cdot (x - 2) - 4 \cdot (x - 3,5) \text{ (KN} \cdot \text{m)} \quad M_D = -15 \text{ KN} \cdot \text{m}$$
$$M_E = -22 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$T = -10 - 4 = -14 \text{ (KN)} \quad T_D = -14 \text{ KN}$$
$$T_E = -14 \text{ KN}$$

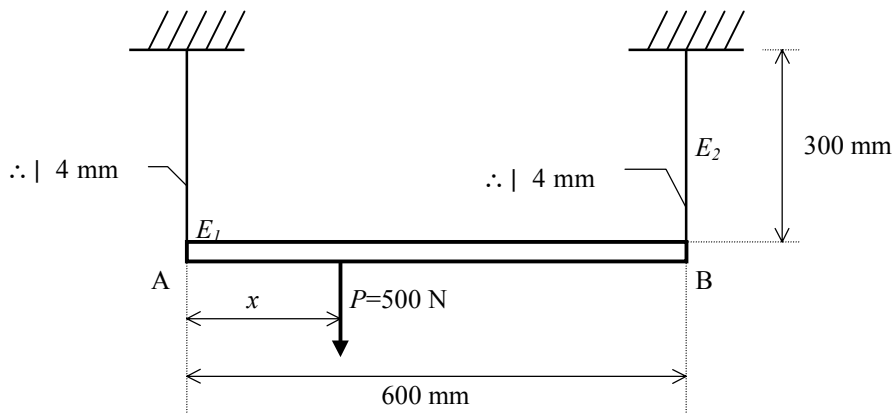
Estos diagramas se han obtenido tomando el origen de las x en el extremo A, de la derecha, porque en este caso, es más cómodo. Si se determinan los diagramas tomando el origen de las x en el extremo de la izquierda E, tal como se hace habitualmente, el diagrama de momentos flectores, M , sale idéntico; pero el diagrama de esfuerzos cortantes sale opuesto (igual, pero de signo cambiado).

2 **Esfuerzo normal**

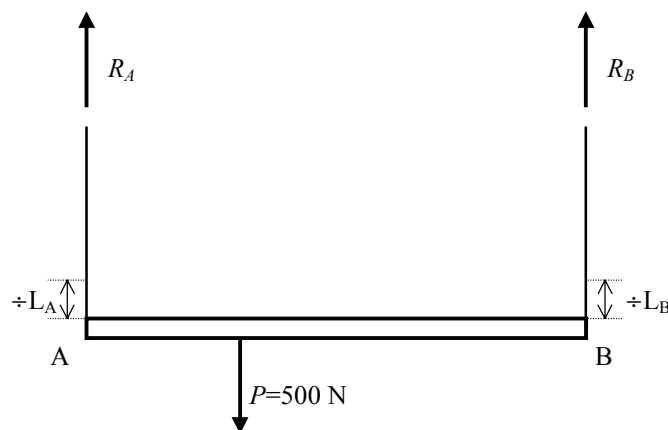
Problema 2.1

Tenemos una barra rígida que está suspendida por dos cables de igual diámetro $\phi = 4 \text{ mm}$, y cuyos módulos de elasticidad son: $E_1 = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ y $E_2 = 0.7 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. La longitud de la barra es de 600 mm y la de los cables 300 mm . Se considera despreciable el peso propio de la barra. Dicha barra está sometida a una carga puntual $P = 500 \text{ N}$.

Calcular la posición x de la fuerza para que los puntos A y B tengan el mismo descenso.

**Resolución:**

Dibujamos el diagrama de sólido libre y obligamos el equilibrio. Además imponemos la igualdad de deformaciones.



$$\sum F_V = 0 \quad \heartsuit \quad R_A + R_B = P$$

$$\sum M_B = 0 \quad \heartsuit \quad R_A (L - x) - P(L - x) = 0$$

$$\delta L_A | \delta L_B$$

Ley de Hooke :

$$\frac{R_A}{S} \left(\frac{\delta L_A}{E_1} \right) | \frac{R_B}{S} \left(\frac{\delta L_B}{E_2} \right) \quad \heartsuit \quad R_A | \frac{R_B}{E_2} \left(\frac{E_1}{70000} \right) \quad \heartsuit \quad R_A | 3R_B$$

$$3R_B - 2R_B | 500 \quad \heartsuit \quad R_B | \frac{500}{4} | 125 \text{ N} \quad \heartsuit \quad R_A | 375 \text{ N}$$

De la ecuación de los momentos obtenemos x :

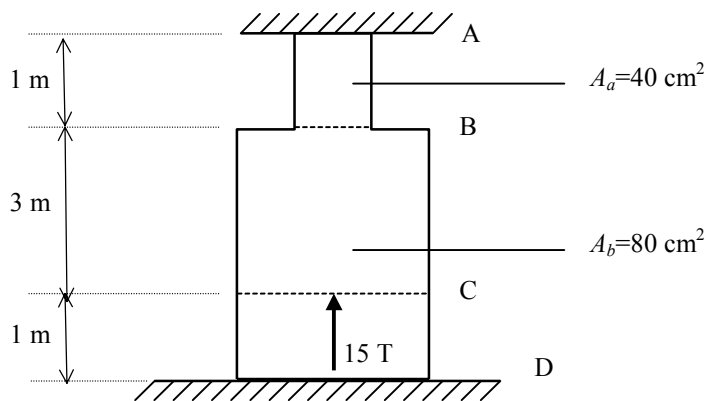
$$R_A (L - 4x) | 0$$

$$375 (600 - 4x) | 0 \quad \heartsuit \quad x | 150 \text{ mm}$$

Problema 2.2

En la barra esquematizada en la figura adjunta los extremos A y D están empotrados. Determinar las tensiones en ambas secciones, cuyas superficies son: $A_a=40 \text{ cm}^2$ y $A_b=80 \text{ cm}^2$. Hallar también el diagrama de esfuerzos axiales.

Datos: $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

**Resolución:**

$$\sum F_V = 0$$

$$R_A + R_D = 15 \text{ T} = 150000 \text{ N}$$

Ecuación de deformación

El tramo AC está comprimido, por tanto R_A es un esfuerzo de compresión, y el tramo CD está traccionado, por lo que R_D es un esfuerzo de tracción.

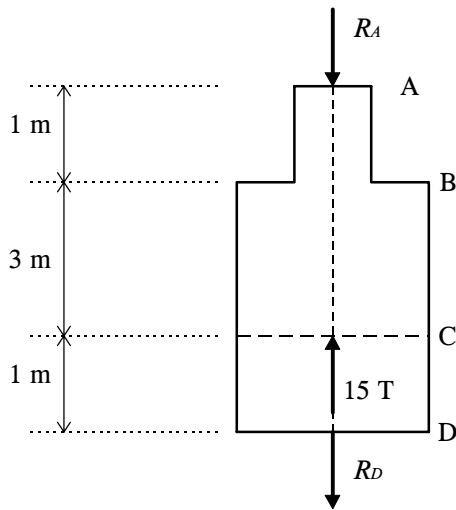
Al estar los dos extremos, A y D, empotrados la variación total de longitud es 0; y el acortamiento del tramo superior es igual al alargamiento del tramo inferior:

$$\div L_{AB} + 2 \div L_{BC} = \div L_{CD}$$

Aplicando la ley de Hooke:

$$\div L = \frac{F \hat{L}}{A E}$$

$$\frac{R_A \hat{L}_{AB}}{E A_a} + 2 \frac{R_A \hat{L}_{BC}}{E A_b} = \frac{R_D \hat{L}_{CD}}{E A_b}$$



$$\frac{R_A \cdot 1000}{2 \cdot 10^5} \cdot 40 \cdot 10^2 = 2 \cdot \frac{R_A \cdot 3000}{2 \cdot 10^5} \cdot 80 \cdot 10^2 + \frac{R_D \cdot 1000}{2 \cdot 10^5} \cdot 80 \cdot 10^2$$

$$R_A \cdot 2000 = 2 R_A \cdot 3000 + R_D \cdot 1000$$

Resolviendo las ecuaciones, tenemos

$$R_A = 25000 \text{ N} = 2.5 \text{ T}$$

$$R_B = 125000 \text{ N} = 12.5 \text{ T}$$

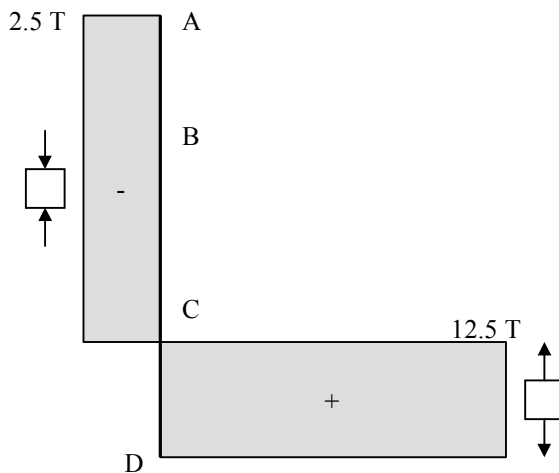
Cálculo de las tensiones.

$$\text{Tramo AB: } \sigma_{AB} = \frac{25000 \text{ N}}{40 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} = 6.25 \text{ MPa (COMP.)}$$

$$\text{Tramo BC: } \sigma_{BC} = \frac{25000 \text{ N}}{80 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} = 3.125 \text{ MPa (COMP.)}$$

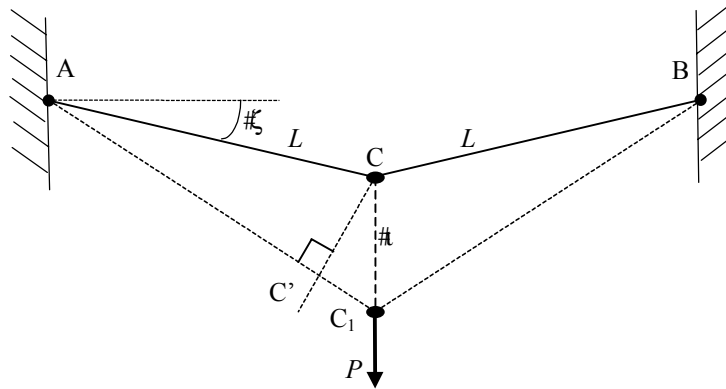
$$\text{Tramo CD: } \sigma_{CD} = \frac{125000 \text{ N}}{80 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} = 15.625 \text{ MPa (TRAC.)}$$

Diagrama de esfuerzos normales:

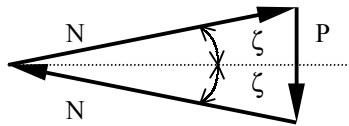


Problema 2.3

- a) Las dos barras de la figura articuladas en sus extremos, de acero, de 2 cm de diámetro y de 3.5 m de longitud, soportan un peso $P=5$ KN. Calcular el descenso ι del punto C, siendo $\zeta=20^\circ$.
 Datos: $E=2,1 \cdot 10^5$ MPa.
- b) Resolver para $\zeta=0^\circ$.

**Resolución:**

- a) Para $\zeta=20^\circ$:



Equilibrio del punto C

Del equilibrio del punto C se obtiene

$$N \sin \zeta \mid \frac{P}{2}$$

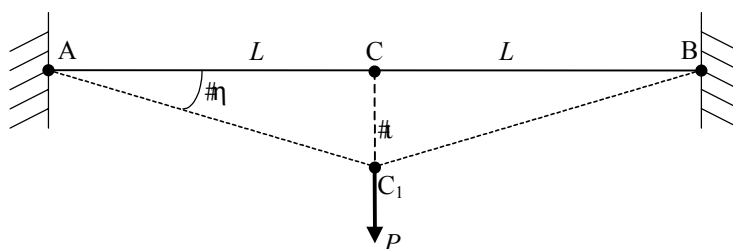
$$N \mid \frac{P}{2 \sin \zeta}$$

Sea ι ($\overline{CC_1}$) el descenso del punto C, entonces el alargamiento de la barra \overline{AC} , $\div L$, será $\overline{C'C_1}$ pudiendo considerarse el triángulo CC_1C' rectángulo en C' . Aquí es $\iota \mid \frac{\div L}{\sin \zeta}$. Como por otra

parte: $\div L \mid \frac{NL}{EA}$, se tiene que:

$$\iota \mid \frac{NL}{EA \sin \zeta} \mid \frac{PL}{2EA \sin^2 \zeta} \mid \frac{5000 \cdot 3500}{2 \cdot (2,1 \cdot 10^5) \cdot (1,4 \cdot 10^2) \cdot (0,34202)^2} \mid 1,13 \text{ mm}$$

- b) Para $\zeta=0^\circ$:



De acuerdo con la estática de los sistemas rígidos, descomponiendo la fuerza P en las direcciones de las barras, se encontrarían, para los esfuerzos en las barras y para las reacciones, valores infinitamente grandes. La solución evidentemente es inaceptable, ya que ni las barras ni los apoyos resistirían.

A fin de hacer desaparecer la aparente imposibilidad basta con considerar los alargamientos de las barras que toman direcciones no alineadas. Esto demuestra la necesidad de tener en cuenta las deformaciones en este caso.

Poniendo

$$\frac{l}{L} = \operatorname{tg} \eta \approx \eta \quad (\text{para ángulos pequeños})$$

el alargamiento de las barras vale

$$\kappa = \frac{AC_1 + 4 AC_2}{AC} \left(\frac{\sqrt{L^2 + 4l^2}}{L} - 1 \right) \approx \sqrt{1 + \frac{4l^2}{L^2}} - 1 \approx \frac{2l^2}{L^2} = 4 \eta^2 \approx \frac{\eta^2}{2}$$

Esta última igualdad proviene de la expresión:

$$\sqrt{1 + a} = 1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{128}a^4 + \dots$$

Para $a \ll 1$, pueden despreciarse las potencias de a y, por tanto, queda $\sqrt{1 + a} \approx 1 + \frac{a}{2}$.

El esfuerzo normal en una de las barras es:

$$N = \omega \cdot A = E \cdot \kappa \cdot A = \frac{E \cdot A \cdot \eta^2}{2}$$

Por otra parte, del equilibrio del punto C se deduce

$$N \cdot \operatorname{sen} \eta = N \cdot \eta \approx \frac{P}{2} \quad \heartsuit \quad N = \frac{P}{2\eta} \quad \heartsuit \quad \frac{E \cdot A \cdot \eta^2}{2} = \frac{P}{2\eta}$$

Resulta

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{P}{E \cdot A}}$$

$$l = \eta \cdot L = L \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{E \cdot A}}$$

Aplicando los datos numéricos del problema:

$$t = 3500 \sqrt[3]{\frac{5000}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 3.14 \cdot 10^2}} = 148 \text{ mm}$$

$$\eta = \frac{t}{L} = \frac{148}{3500} = 0,04229 \text{ rad} = 2,42^\circ$$

$$N = \frac{P}{2\eta} = \frac{5000}{2 \cdot 0,04229} = 59116 \text{ N}$$

$$\omega = \frac{N}{A} = \frac{59116}{314} = 188 \text{ N/mm}^2$$

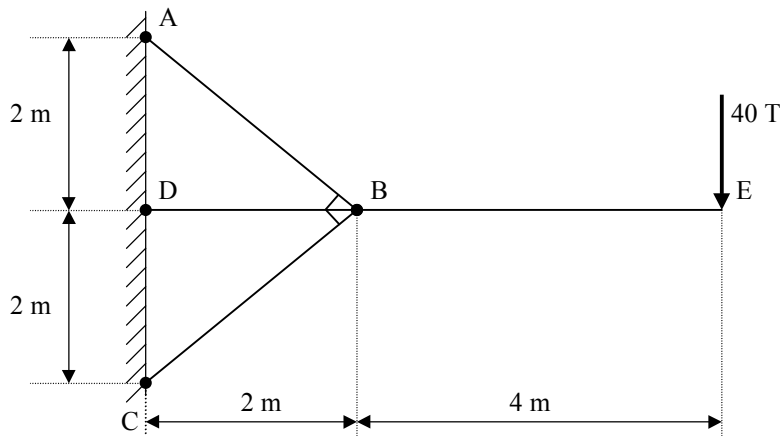
Problema 2.4

Hallar las reacciones del sistema y las tensiones en las barras articuladas AB y CB de la estructura representada en la figura, suponiendo infinitamente rígida la barra horizontal DE, articulada en D.

Barra AB: sección 40 cm^2

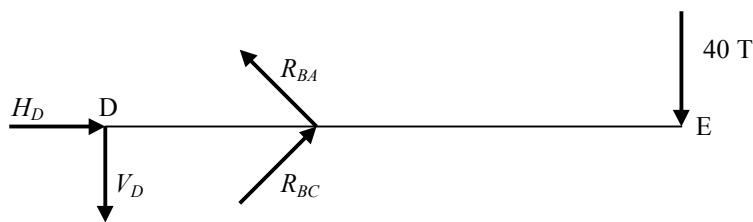
Barra CB: sección 80 cm^2

Se considera el mismo módulo de elasticidad, para todas las barras.

**Resolución:**

Se trata de un sistema hiperestático.

R_{BA} y R_{BC} siguen la dirección de la barra.

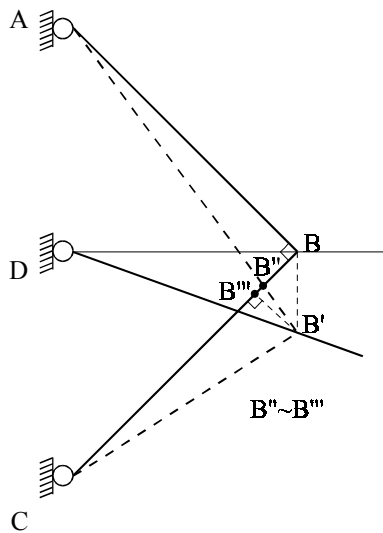
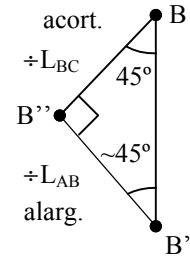
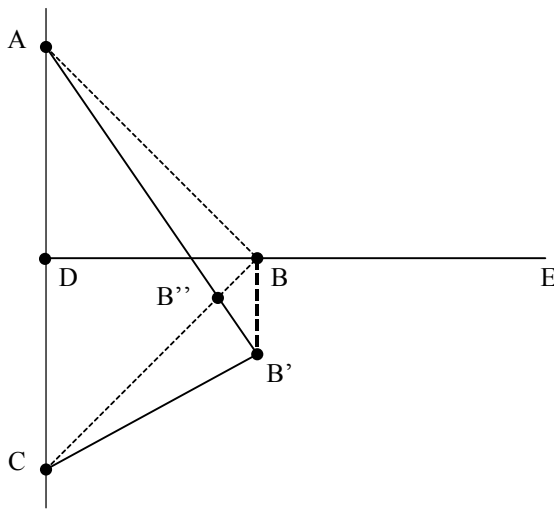


Ecuaciones de la estática:

$$\sum F_V \mid 0 \quad \Downarrow \quad 4 V_D - 2 R_{BA} \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 R_{BC} \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot 40 \mid 0$$

$$\sum F_H \mid 0 \quad \Downarrow \quad H_D - 2 R_{BC} \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 R_{BA} \frac{\sqrt{2}}{2} \mid 0$$

$$\sum M_B \mid 0 \quad \Downarrow \quad V_D \cdot 2 - 40 \cdot 4 + V_D \cdot 80 \mid 0$$



$$\Delta L_{AB} \mid B B'' \mid \Delta L_{BC} \mid B B'''$$

Al ser deformaciones y ángulos pequeños:

$$B B'' \sim B B'''$$

$$\mid \Delta L_{AB} \mid \mid \Delta L_{BC} \mid$$

Alargamiento barra AB= Acortamiento barra BC

Aplicamos la ley de Hooke:

$$\left| \frac{R_{BA}}{E} \frac{2\sqrt{2}}{40} \right| \mid \left| \frac{R_{BC}}{E} \frac{2\sqrt{2}}{80} \right| \heartsuit 2R_{BA} \mid R_{BC}$$

De la ecuación $\sum F_v = 0$ tenemos:

$$4802 R_{BA} \frac{\sqrt{2}}{2} - 22R_{BA} \frac{\sqrt{2}}{2} - 440 \mid 0$$

con lo que,

$$R_{BA} \mid 56.73 \text{ T} \quad R_{BC} \mid 113.47 \text{ T}$$

De la otra ecuación despejamos: $H_D = -40 \text{ T}$ (sentido contrario al supuesto)

Cálculo de las tensiones:

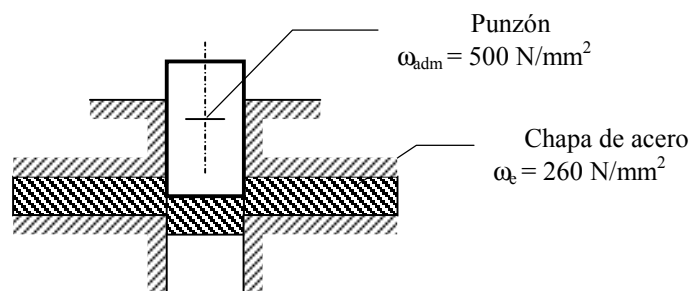
$$\omega_{AB} \mid \frac{56730}{40} \mid 1418 \frac{\text{Kp}}{\text{cm}^2}$$

$$\omega_{BC} \mid \frac{113470}{80} \mid 1418 \frac{\text{Kp}}{\text{cm}^2}$$

3 Esfuerzo de cizalladura pura

Problema 3.1

- a) Determinar el diámetro mínimo con el que se puede perforar una chapa de acero A-42b ($\omega_e=260$ N/mm²) de 5 mm de espesor suponiendo que el punzón tiene una tensión admisible a compresión, $\omega_{adm}=500$ N/mm².
- b) ¿Qué fuerza máxima se ejercerá ?
- c) ¿Qué ω_{adm} debería tener el punzón para realizar un punzonado de $\phi \approx 5$ mm ?
- Nota: Suponer que el extremo del punzón es plano y horizontal.

**Resolución:**

a)

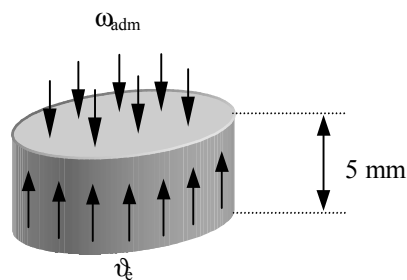
$$F_{max}^{punzon} | \omega_{adm} (A | 500 \phi \frac{d^2}{4} | 392,7d^2$$

$$F_{max}^{chapa} | \vartheta_e (\sigma | 0.65 (260 \phi \phi d \beta | 2654.6d$$

$$F_{max}^{punzon} | F_{max}^{chapa} \heartsuit 392,7d^2 | 2654.6d \heartsuit d_{min} | 6,76 \text{ mm}$$

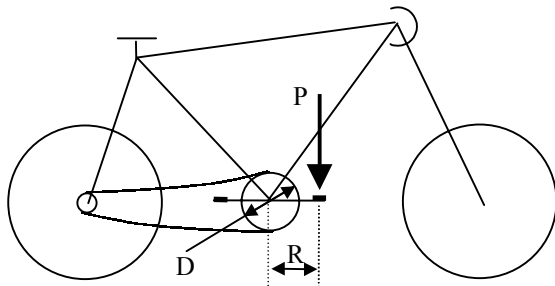
b) $F_{max} | \omega_{adm} (A | 500 \phi \frac{d^2}{4} | 17945 \text{ N}$

c) $\omega_{adm}^{punzon} \phi \frac{\sigma^2}{4} | 0.65 (260 \phi \beta \beta \heartsuit \omega_{adm} | 676 \text{ N/mm}^2$

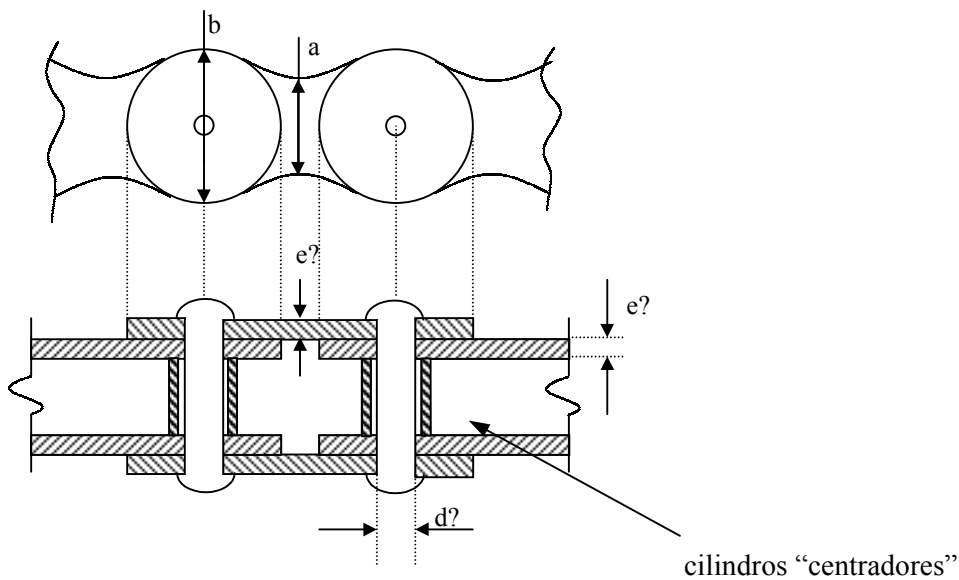


Problema 3.2

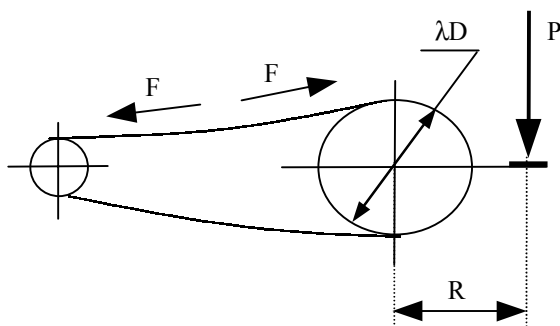
Dimensionar la cadena de una bicicleta con un coeficiente de seguridad v_s y suponiendo todo el peso del ciclista sobre uno de los pedales.



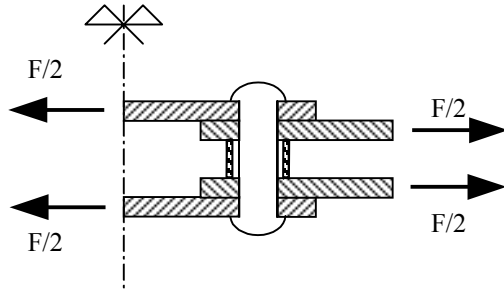
$P = 800 \text{ N}$
 $R = 200 \text{ mm}$
 $\therefore \text{Plato } D=200 \text{ mm}$
 Chapa eslabones: $\sigma_e=360 \text{ Mpa}$
 Pasadores: $\sigma_e=260 \text{ Mpa}$



Resolución:



$$F \mid \frac{P \Delta R}{D/2} \mid \frac{800 \text{ N} \Delta 200 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} \mid 1600 \text{ N}$$



Dimensionado de la garganta 'a' de la chapa a tracción pura:

$$\frac{F/2}{a \Delta e} \leq \omega_{adm} \quad \heartsuit \quad a \geq \frac{F/2}{\omega_{adm} \Delta e} \quad \left| \frac{800}{240} \right| \quad 3,3 \text{ mm}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{adm} \leq \frac{360 \text{ MPa}}{1.5} = 240 \text{ MPa} \\ \omega_{TM} \end{array} \right\}$$

p.ej : a = 4 mm e = 1 mm

Dimensionado del pasador a cizalladura:

$$800 \leq \frac{F}{2} \leq \omega_{adm} \left(\frac{\phi d^2}{4} \right) \quad \heartsuit \quad d_{min} \geq 2,7 \text{ mm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{adm} \leq 0,8 \omega_{TM} = 0,8 \frac{260}{1,5} = 138 \text{ N/mm}^2 \\ \omega_{TM} \end{array} \right\}$$

Dimensionado del pasador a aplastamiento:

$$800 \leq \frac{F}{2} \leq \omega_{adm}' \left(d e \right) \quad \heartsuit \quad d_{min} \geq 2,3 \text{ mm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{adm}' \leq 2 \left(\frac{260}{1,5} \right) = 347 \text{ N/mm}^2 \\ \omega_{TM} \end{array} \right\}$$

$$d_{min} \geq \max \{ 2,7; 2,3 \} \quad \heartsuit \quad d_{min} \geq 2,7 \text{ mm}$$

Dimensionado de la chapa en la zona del orificio del pasador

a tracción:

$$800 \leq \frac{F}{2} \leq \omega_{adm} \left(\frac{b - d}{2} t \right) \quad \heartsuit \quad b_{min} \geq 6,0 \text{ mm}$$

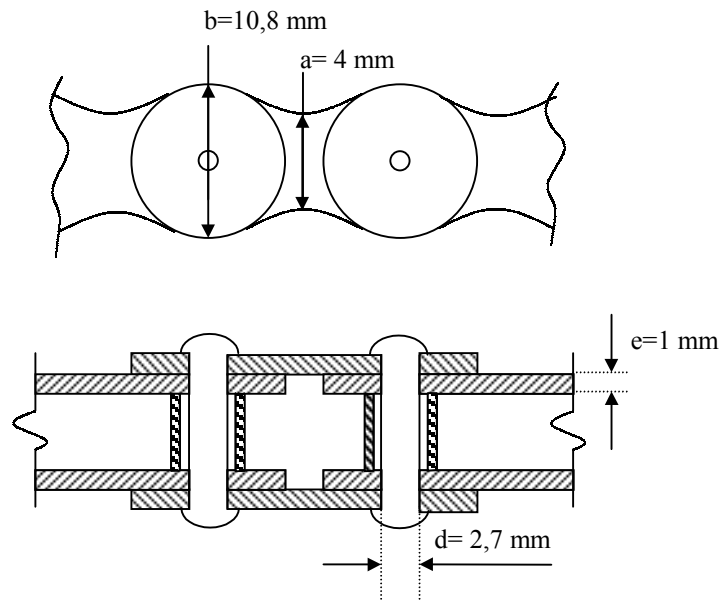
a desgarro:

$$t_1 \geq \frac{F}{\omega_{adm} d} \quad \heartsuit \quad b_{min} \geq 10,8 \text{ mm}$$

$$b_{min} \geq \max \{ 6,0; 10,8 \} \quad \heartsuit \quad b_{min} \geq 10,8 \text{ mm}$$

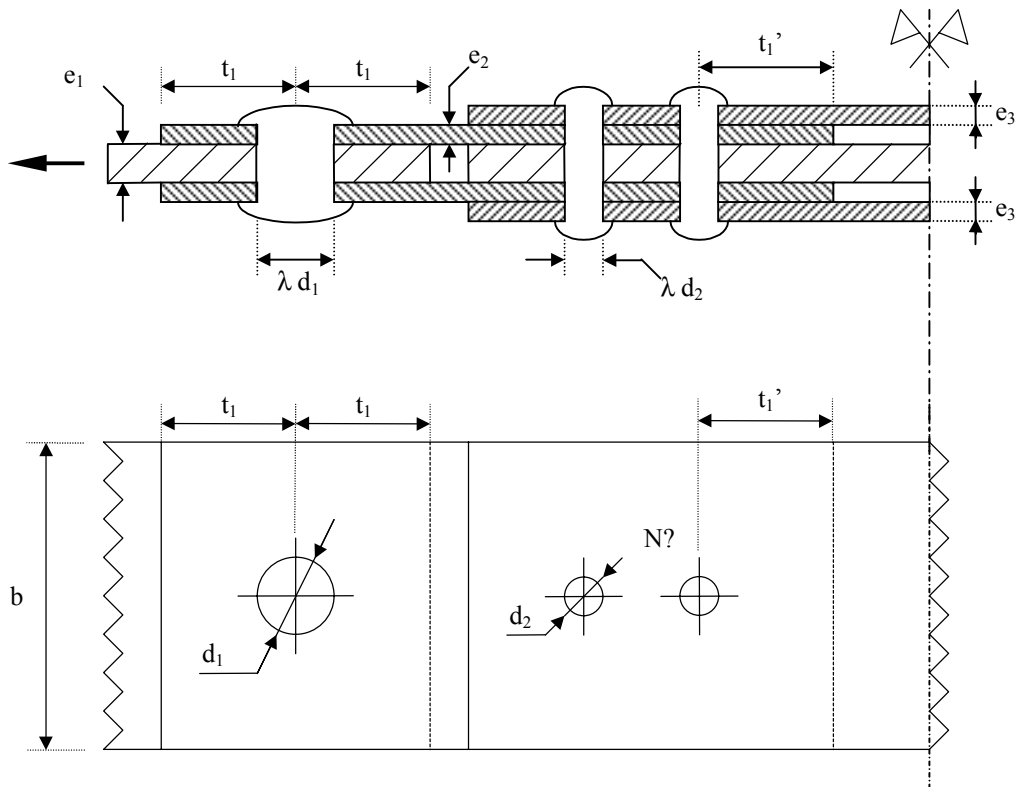
El dimensionado final queda así:

$e \mid 1 \text{ mm}$
 $d \mid 2,7 \text{ mm}$
 $a \mid 4 \text{ mm}$
 $b \mid 10,8 \text{ mm}$



Problema 3.3

Dimensionar la unión esquematizada en la figura suponiendo que las chapas son de acero A-37b y las uniones son roblonadas.



Datos:

$e_1 = 5 \text{ mm}$ $e_2 = e_3$

Chapas:

Roblones:

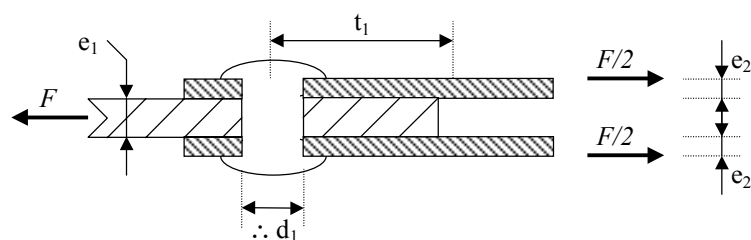
Tomar: $v_{se} = 1,5$

Acero A37b
 $\omega_k = 240 \text{ N/mm}^2$

Acero A37b
 $\omega_k = 240 \text{ N/mm}^2$

Resolución:

a) Unión 1



Cizalladura:

$$T \mid \frac{F}{2} \Omega \vartheta_{adm} \left| \frac{\phi}{4} d_1^2 \right| \eta \left(\frac{\omega_e}{v_{seg}} \left| \frac{\phi}{4} d_1^2 \right| \right) 0.8 \left(\frac{240}{1.5} \left| \frac{\phi}{4} d_1^2 \right| \right) 100,55 d_1^2 \heartsuit 201.1 d_1^2 \mid F_{max}$$

Aplastamiento:

$$d_1 \left| e_1 \right| \frac{F_{max}}{\omega_{adm}} \left| \frac{F_{max}}{\zeta \omega_{adm}} \right| \frac{F_{max}}{2.5 \left(\frac{240}{1.5} \right)} \Omega d_1 \left| \beta \right| \heartsuit 2000 d_1 \mid F_{max}$$

De las condiciones cizalladura y aplastamiento simultáneas obtenemos:

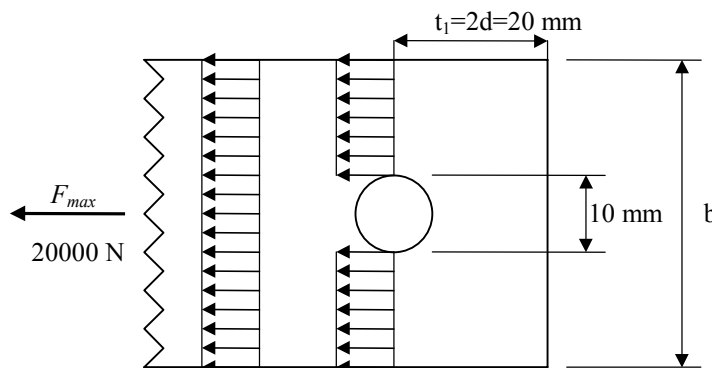
$$d_{1,optimo} = 9.95 \text{ mm} \heartsuit 10 \text{ mm} = d_1 \quad F_{max} = 20000 \text{ N}$$

(fallará por aplastamiento de la chapa)

- Desgarramiento

$$t_1 \geq 2d_1 \heartsuit t_1 \mid 20 \text{ mm}$$

Cálculo de la sección neta



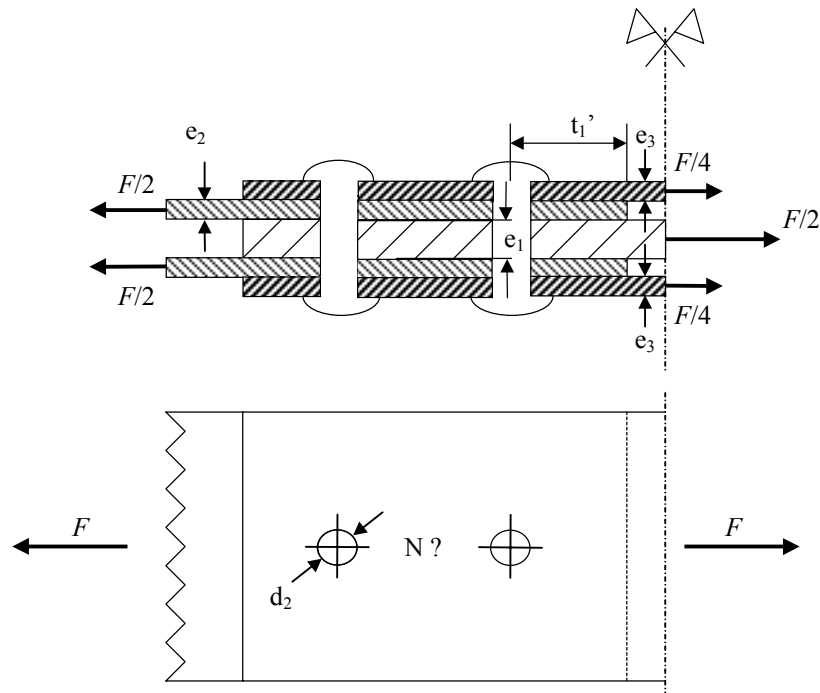
$$240/1.5 = 160 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{F_{max}}{A_{neta}} \geq 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \heartsuit b \mid \frac{20000 \text{ N}}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} - 2 \cdot 10 \text{ mm} = 35 \text{ mm}$$

Dimensionado de e_2 : las dos chapas e_2 son del mismo material que la chapa e_1 , tiene las mismas dimensiones y trabajan de la misma manera, por tanto:

$$2 e_2 \mid e_1 \heartsuit e_2 \mid \frac{e_1}{2} \mid 2,5 \text{ mm}$$

b) Unión 2



Atención: es un problema hiperestático. Aquí se presenta la solución concreta para el caso $e_2 = e_1/2$, y con la hipótesis de roblón rígido; por lo que puede suponerse que la fuerza total se distribuye entre las tres chapas de la derecha de la manera indicada en la figura: $F/4$, $F/2$ y $F/4$.

Cizalladura:

$$T \mid \frac{F/4}{N} \mid \frac{F}{4N} \Omega \omega_{adm} \left(\frac{\phi}{4} \right) \left(\frac{d_2^2}{4} \right) \heartsuit \frac{20000}{4N} \Omega 0.8 \left(\frac{240}{1.5} \right) \left(\frac{\phi}{4} \right) \left(\frac{d_2^2}{4} \right) \heartsuit \frac{49.74}{N} \Omega d_2^2$$

Aplastamiento:

$$\frac{F/2}{N} \mid \frac{F}{2N} \Omega \omega_{adm} \left(d_2 \right) \left(e_2 \right) \heartsuit \frac{20000}{2N} \Omega 2.5 \left(\frac{240}{1.5} \right) \left(d_2 \right) \left(e_2 \right) \heartsuit \frac{10}{N} \Omega d_2$$

De las condiciones de cizalladura y aplastamiento obtenemos

$$d_2 \mid 4.97 \text{ mm} \Downarrow d_2 \mid 5 \text{ mm} \heartsuit N \mid 2$$

con lo que vemos que fallara antes por aplastamiento.

Desgarramiento:

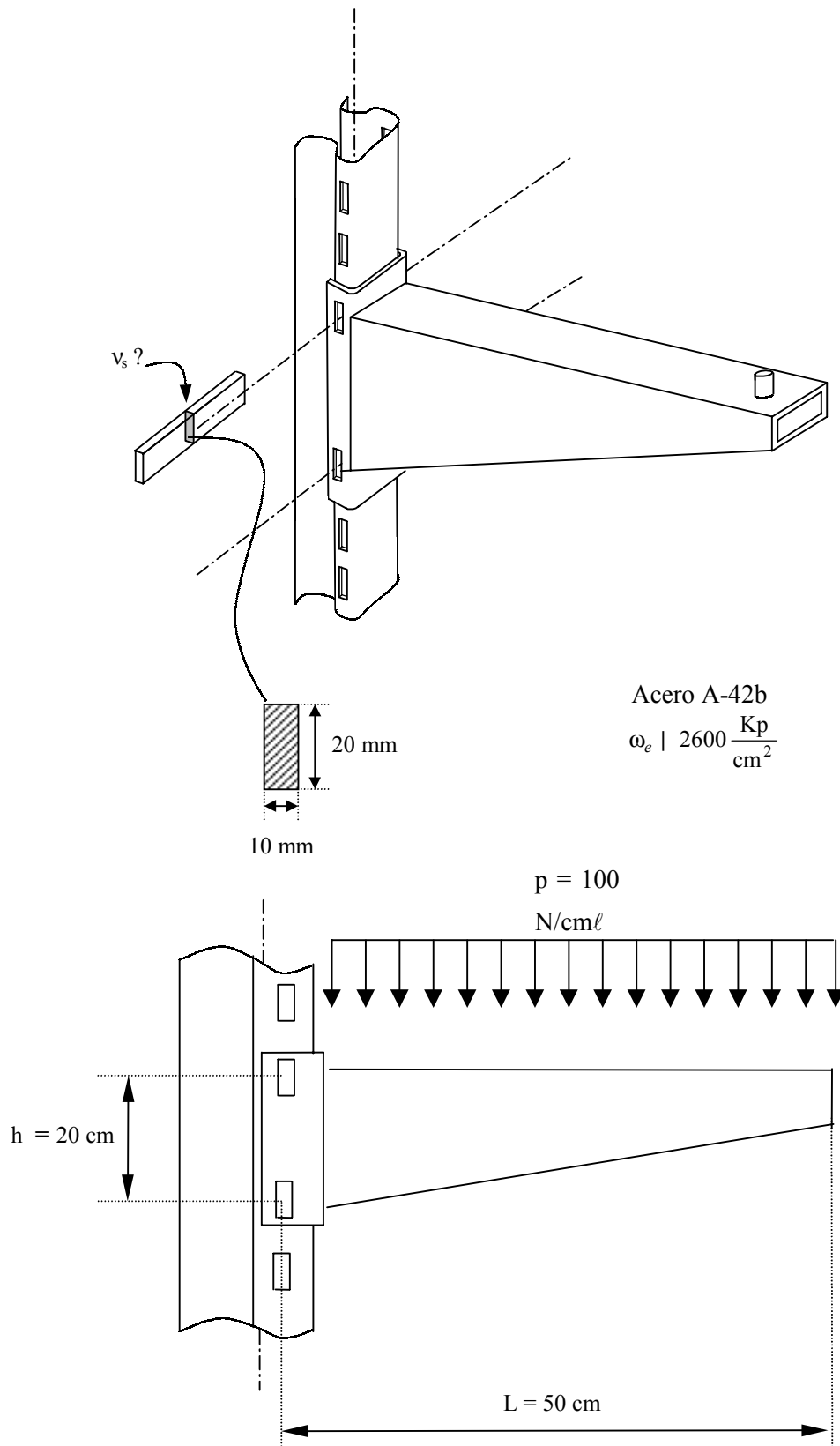
$$t_1 \geq 2d \mid 10 \text{ mm}$$

Tracción:

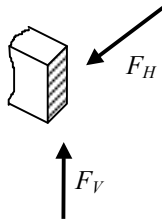
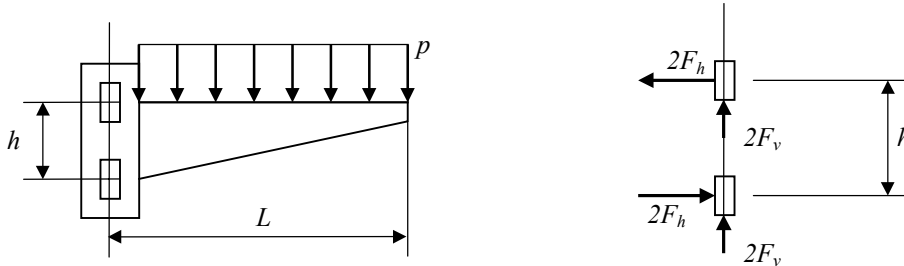
Seguro que cumple ya que b es igual y F es menor.

Problema 3.4

Hallar el coeficiente de seguridad v_{seg} de las piezas rectangulares de trabado para los perfiles de estantería metálica representados en la figura.

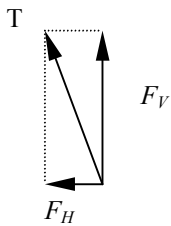


Resolución:



$$M \mid \frac{pL^2}{2} \quad (\text{momento a transmitir en la sección de empotramiento})$$

$$2F_H \mid h \mid M \quad \heartsuit \quad F_H \mid \frac{M}{2h} \mid \frac{p \hat{L}^2}{4h} \mid \frac{100 \hat{50}^2}{4 \hat{20}} \\ F_H \mid 3125 \text{ N}$$



$$4 \hat{F}_V \mid p \hat{L} \mid 100 \hat{50} \mid 5000 \text{ N} \quad \heartsuit \quad F_V \mid 1250 \text{ N}$$

$$T \mid \sqrt{F_H^2 + 2 F_V^2} \mid \sqrt{3125^2 + 2 \cdot 1250^2} \mid 3666 \text{ N}$$

$$\vartheta \mid \frac{F_T}{S} \quad (\text{suponiendo una distribución constante de } \vartheta \text{ en la sección})$$

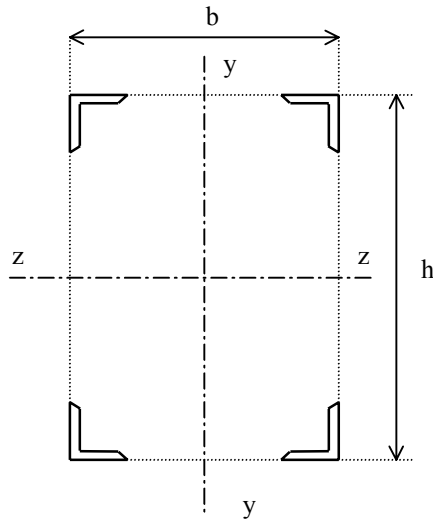
$$\vartheta \mid \frac{3366}{20 \hat{10}} \mid 16,8 \text{ N/cm}^2$$

$$v_S \mid \frac{\vartheta_e}{\vartheta_{\text{máx}}} \mid \frac{0,6 \hat{\omega}_e}{\vartheta_{\text{máx}}} \mid \frac{0,6 \hat{260}}{16,8} \mid 9,28$$

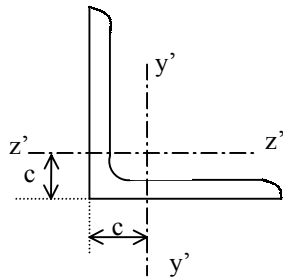
4 Características de secciones

Problema 4.1

Determinar las inercias resultantes I_z e I_y si partimos de cuatro perfiles L 45x45x5, para unas cotas b y h genéricas.

**Resolución:**

De las tablas:

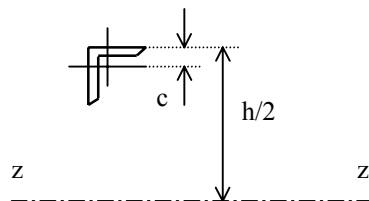


$$I_{z'} = I_{y'} = 7,84 \text{ cm}^4$$

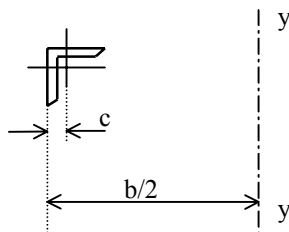
$$A = 4,3 \text{ cm}^2$$

$$c = 1,28 \text{ cm}$$

$$I_z = I_{z'} + 2 A \left(\frac{h}{2} - c \right)^2 \quad (\text{momento de inercia de una L, respecto al eje } z)$$



$$I_y = I_{y'} + 2 A \left(\frac{b}{2} - c \right)^2 \quad (\text{momento de inercia de una L, respecto al eje } y)$$



$$I_z = 4I_{z'} + 4I_{z''} + 4 \left[A \left(\frac{b}{2} + c \right)^2 \right] = 59,54 \cdot 2 \cdot 4,30 \cdot h^2 + 4 \cdot 5,12 \cdot h^2 \quad (\text{momento de inercia de las cuatro L})$$

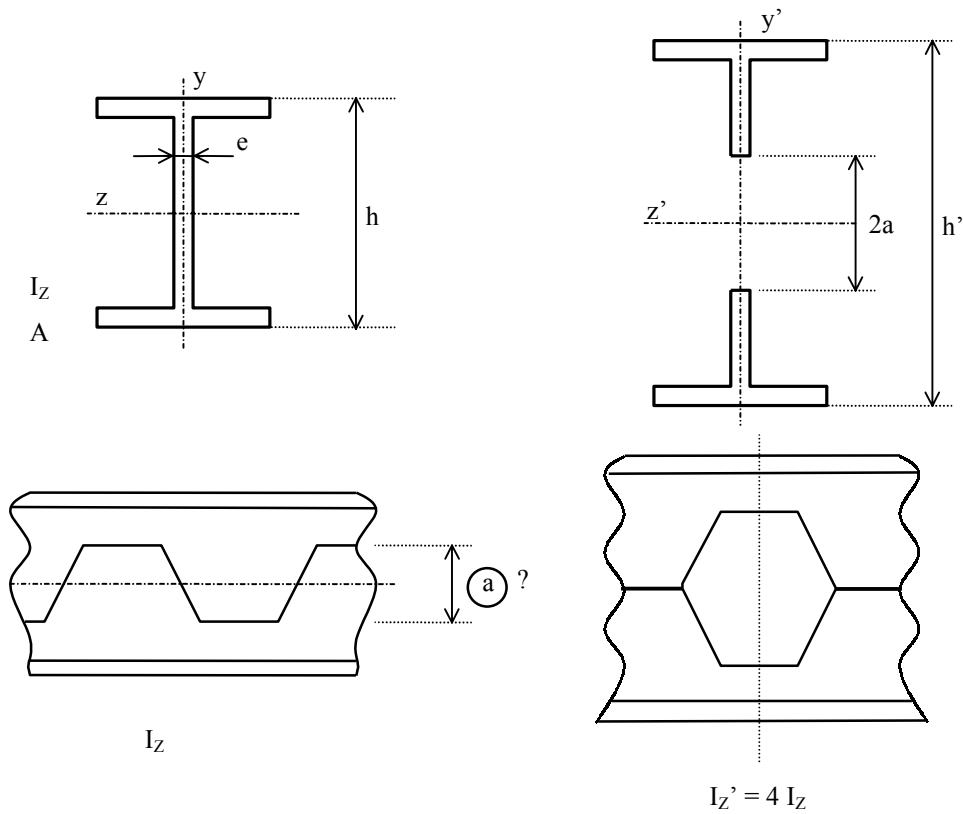
$$I_y = 4I_{y'} + 4I_{y''} + 4 \left[A \left(\frac{b}{2} + c \right)^2 \right] \quad (\text{momento de inercia de las cuatro L})$$

$$I_z = 4,30h^2 + 22h + 59,54$$

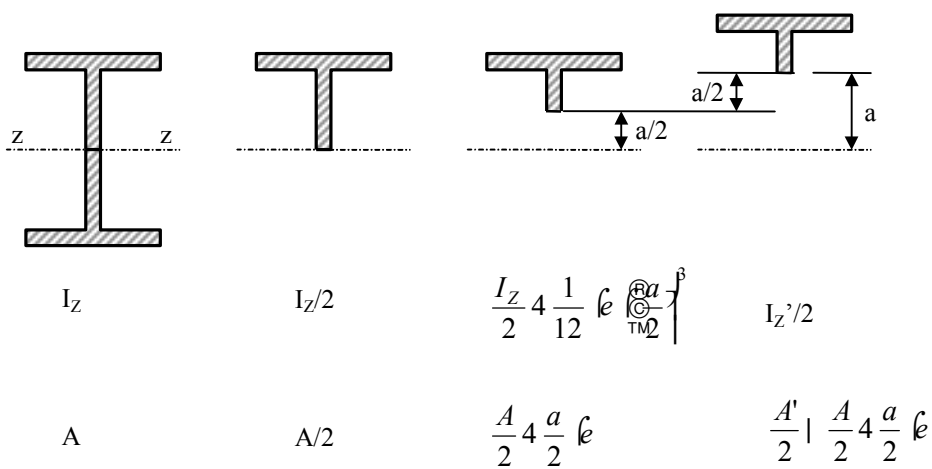
$$I_y = 4,30b^2 + 22b + 59,54$$

Problema 4.2

Dado un perfil “doble T”, determinar la magnitud a de la figura para que la inercia de la viga aligerada resultante sea 4 veces la inercia inicial.



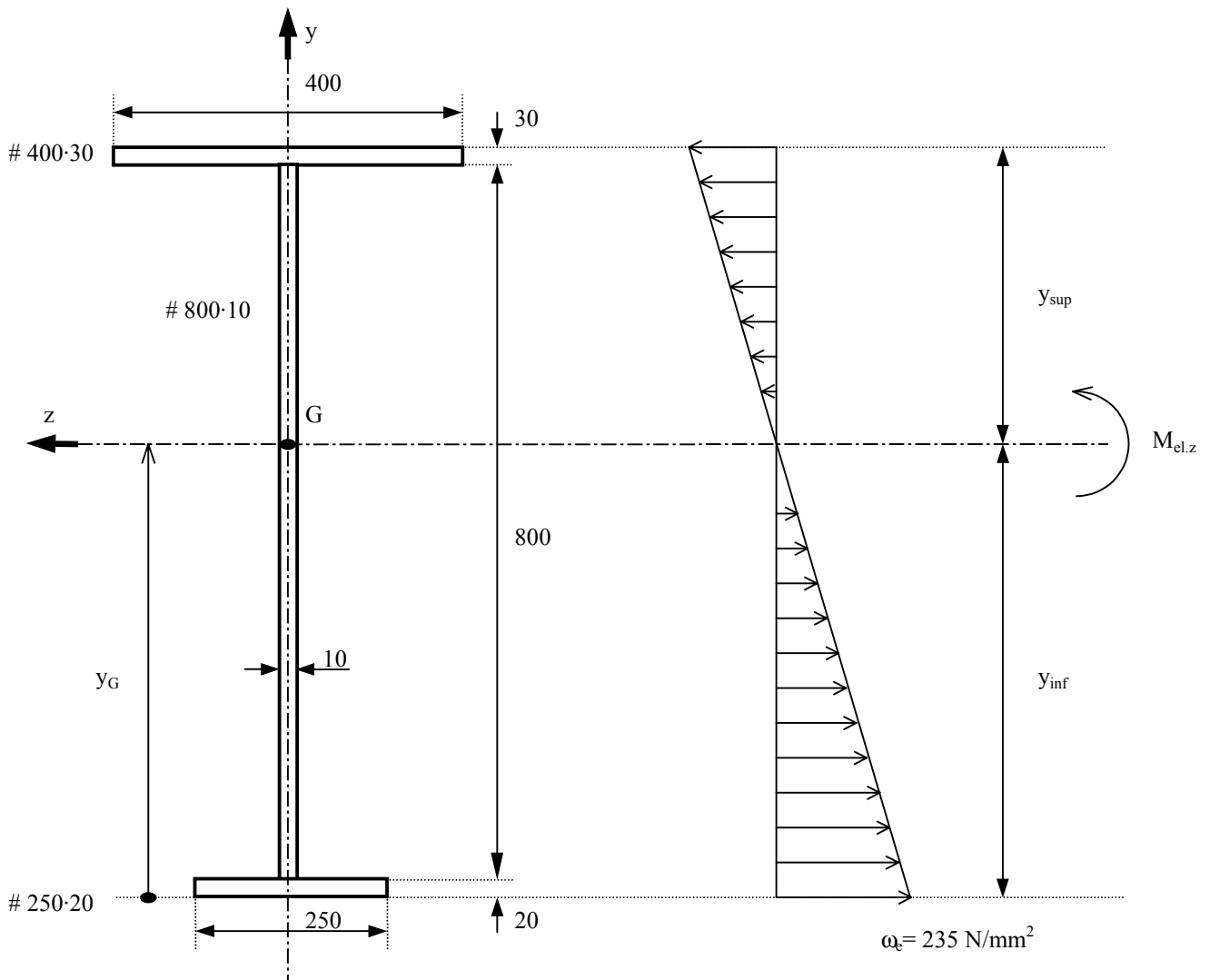
Resolución:



Problema 4.3

Determinar las siguientes características de la sección monosimétrica de la figura respecto del eje principal z:

- A , I_z , $W_{z,\text{sup}}$, $W_{z,\text{inf}}$, i_z .
- El momento resistente elástico, $M_{\text{el},z}$, para un acero $\omega_k=235 \text{ N/mm}^2$.

**Resolución:**

- El área de la sección total será la suma de las áreas de las pletinas:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 400 \cdot 30 + 800 \cdot 10 + 250 \cdot 20 = 25000 \text{ mm}^2$$

Por simetría el centro de gravedad, G, está situado sobre el eje y ($z = 0$).

Para determinar la posición y del centro de gravedad de la sección, G, es cómodo calcular el momento estático de cada elemento respecto de la fibra inferior. Así:

$$y_{\text{CG}} = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{400 \cdot 30 \cdot 835 + 2 \cdot 800 \cdot 10 \cdot 420 + 2 \cdot 250 \cdot 20 \cdot 10}{25000} = 537 \text{ mm}$$

Se utiliza el teorema de Steiner para calcular el momento de inercia de la sección total respecto del eje y-y:

$$I_z = \sum \left[\frac{b_i h_i^3}{12} + A_i (y_i - y_{\text{CG}})^2 \right]$$

$$I_z = \left[\frac{1}{12} \cdot 400 \cdot 30^3 + 2 \cdot 400 \cdot 30 \cdot 835^2 \right] + \left[\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 800^3 + 2 \cdot 800 \cdot 10 \cdot 420^2 \right] + \left[\frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 20^3 + 2 \cdot 250 \cdot 20 \cdot 10^2 \right] = 299154 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

El módulo resistente respecto de la fibra superior, y_{sup} :

$$W_{z,\text{sup}} = \frac{I_z}{y_{\text{sup}}} = \frac{299154 \cdot 10^4}{8504.5370} = 9558 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

El módulo resistente respecto de la fibra inferior, y_{inf} :

$$W_{z,\text{inf}} = \frac{I_z}{y_{\text{inf}}} = \frac{299154 \cdot 10^4}{537} = 5571 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

El radio de giro de la sección respecto del eje z, i_z :

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{299154 \cdot 10^4}{25000}} = 346 \text{ mm}$$

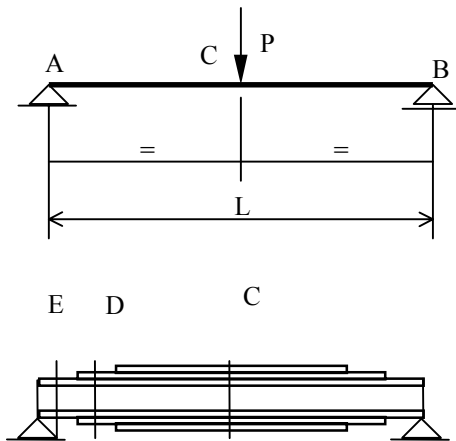
b) El momento resistente, $M_{el,z}$, se obtiene a partir de la tensión de límite elástico del material y del módulo resistente mínimo de la sección:

$$M_{el,z} = \omega_e \cdot W_{z,\text{min}} = 235 \cdot 5571 \cdot 10^3 = 1309 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} = 1309 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5 Dimensionado de secciones o flexión

Problema 5.1

Dimensionar la viga esquematizada suponiendo que disponemos de perfiles IPE 240 como máximo y chapa de 10 mm de grosor.

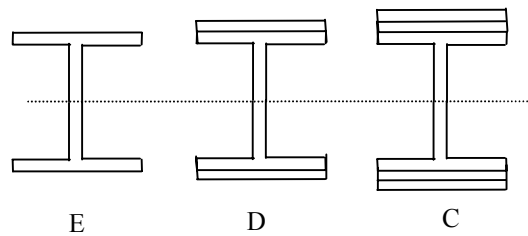


$$P = 9500 \text{ Kp}$$

$$L = 6 \text{ m}$$

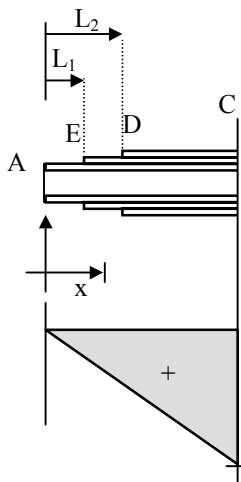
Acero A 42b

$$v_{se} = 1,5$$

**Resolución:**

Acero A 42b ♥ $\omega_e \mid 2600 \text{ Kp/cm}^2$
 $v_{se} \mid 1,5$

$$\omega_{adm} \mid \frac{2600}{1,5} \mid 1733 \text{ Kp/cm}^2$$



Momentos flectores

$$M(x) \mid \frac{P \hat{x}}{2} \mid 4750x$$

$$M_C \mid \frac{P \hat{L}}{4} \mid 1425 \hat{10}^3 \text{ Kp cm}$$

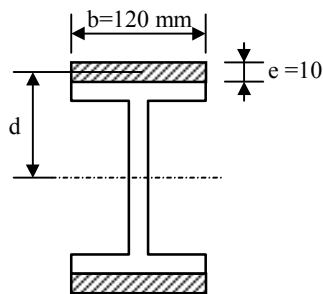
Tramo A-E :

IPE 240 $\left[\begin{array}{l} I \mid 3890 \text{ cm}^4 \\ W \mid 324 \text{ cm}^3 \end{array} \right.$ ♥

$$M_{\max} \mid W \omega_{adm} \mid 561 \hat{10}^3 \text{ Kp cm}$$

$$561 \cdot 10^3 = 4750 \cdot x \quad \heartsuit \quad x = 118,2 \text{ cm} \quad \heartsuit \quad L_1 = 115 \text{ cm}$$

Tramo E-D: es necesario reforzar



$$I_{21} = \frac{1}{12} b e^3 + 2 b e a^2 + \frac{1}{12} (2 b^3 + 2 b a^2) = 121875 + 1876 \text{ cm}^4$$

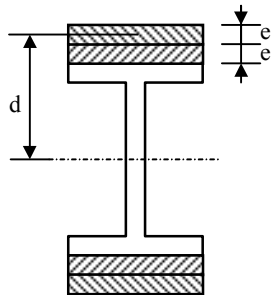
$$I_2 = I_{21} + 2(1876) = 7642 \text{ cm}^4 \quad \heartsuit \quad W_2 = \frac{7642}{13} = 588 \text{ cm}^3$$

$$M_{adm} = 588 (1733) = 1019 \cdot 10^3 \text{ kp cm}$$

$$1019 \cdot 10^3 = 4750 \cdot x \quad \heartsuit \quad x = 214,6 \text{ cm}$$

$$\blacklozenge \quad L_1 = 210 \text{ cm}$$

Tramo D-C:



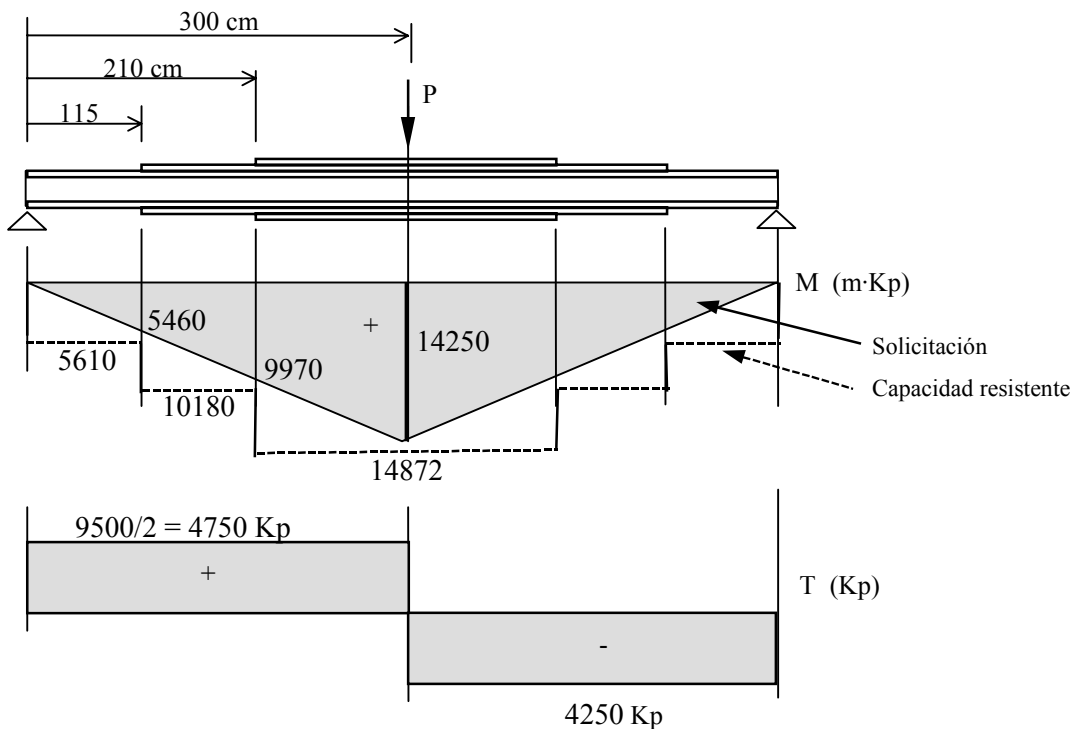
$$I_{23} = \frac{1}{12} b e^3 + 2 b e a^2 + \frac{1}{12} (2 b^3 + 2 b a^2) = 1212 (3,5^2) = 2188 \text{ cm}^4$$

$$I_3 = I_2 + 2(2188) = 12018 \text{ cm}^4 \quad \heartsuit \quad W_3 = \frac{12018}{14} = 858 \text{ cm}^3$$

$$M_{adm} = 858 (1733) = 1487 \cdot 10^3 \text{ kp cm}$$

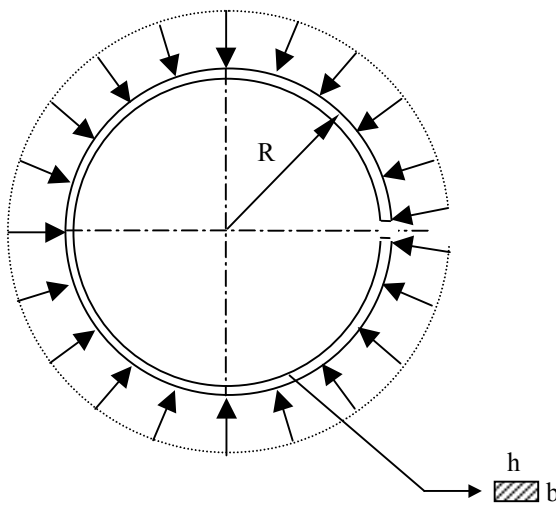
$$1019 \cdot 10^3 = 4750 \cdot x \quad \heartsuit \quad x = 313 \text{ cm} > 300 \text{ cm}$$

\blacklozenge no es necesario reforzar más



Problema 5.2

Dimensionar un segmento de pistón de radio R para que pueda ejercer sobre la pared del cilindro una presión uniforme de $0,19 \text{ N/mm}^2$, sin que las tensiones superen el valor de $\sigma_{\text{max}} = 261,5 \text{ N/mm}^2$ ($\sigma_e = 340 \text{ N/mm}^2$, $\nu_{se} = 1,3$) (Fundición de grafito nodular).



Nota: Usar la simplificación de simetría, suponiendo que $\frac{h}{R}$ es suficientemente pequeño.

$R = 40 \text{ mm}$

Resolución:

Por razones de simetría consideramos:

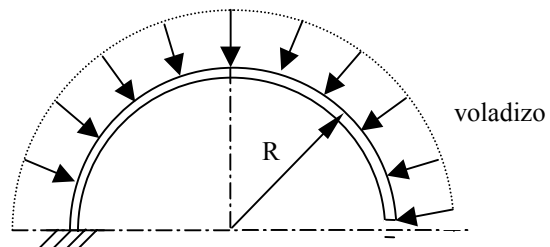
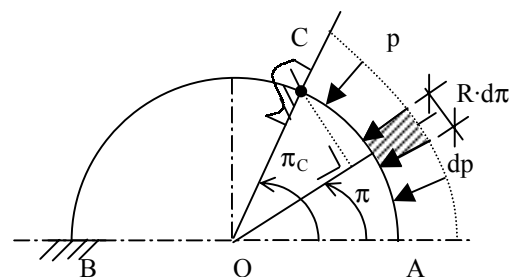


Diagrama de momentos flectores :

Momento producido por dp en el punto genérico C

$$dM_c = b \cdot p \cdot R \cdot d\pi \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi_c}{4\pi}\right)$$

$$(dp = p \cdot R \cdot d\pi)$$



Momento total para el punto genérico C:

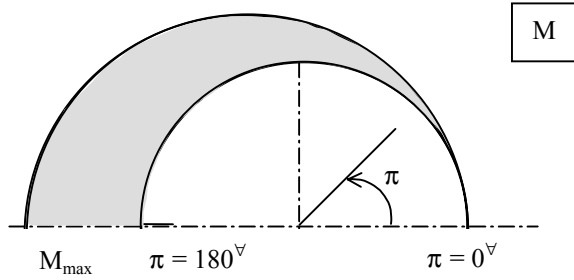
$$M_c \mid \int_0^{\pi_c} p \cdot b \cdot R^2 \cdot \left(\frac{\sin \pi_c}{\pi_c} - 4 \pi_c \right) d\pi \mid \frac{p \cdot b \cdot R^2}{4} \left(\cos \pi_c - 4 \pi_c \right) \mid p \cdot b \cdot R^2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cos \pi_c - \pi_c \right)$$

Por tanto, si el momento flector para cualquier punto del segmento es :

$$M_c \mid p \cdot b \cdot R^2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cos \pi_c - \pi_c \right)$$

tendremos el máximo: $\pi_c = 180^\circ$

$$M_{max} = 2 \cdot p \cdot b \cdot R^2$$



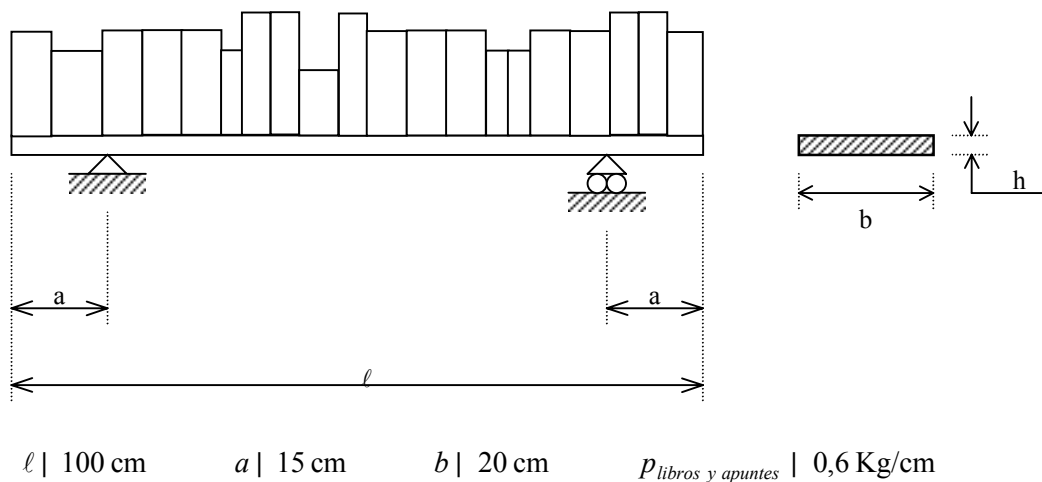
$$\omega_{max} \mid \frac{M}{I} \left(\frac{h}{2} \right) \mid \frac{2 \cdot p \cdot b \cdot R^2 \cdot h}{12 \cdot b \cdot h^3} \mid \frac{12 \cdot p \cdot R^2}{h^2} \cdot \Omega \omega_{adm} \mid 261,5 \text{ N/mm}^2$$

♥ $h \approx 0,093R$ ♥ $3,7 \text{ mm} \mid h$ No depende de b

Problema 5.3

Un estudiante ha decidido instalar un estante para colocar sus libros y apuntes. Los ha colocado uno junto al otro y ha medido la longitud total de estante que necesita y la anchura que debe tener. Al ir a comprar el estante ve que para estas dimensiones puede escoger varios espesores distintos. No sabe cuál escoger. Entonces recurre a un amigo suyo que está haciendo 3^{er} curso de Ingeniería Industrial y le expone el problema:

He decidido instalar un estante para libros, según el croquis de la figura:



En la tienda me han informado de que la madera de los estantes tiene las siguientes características mecánicas:

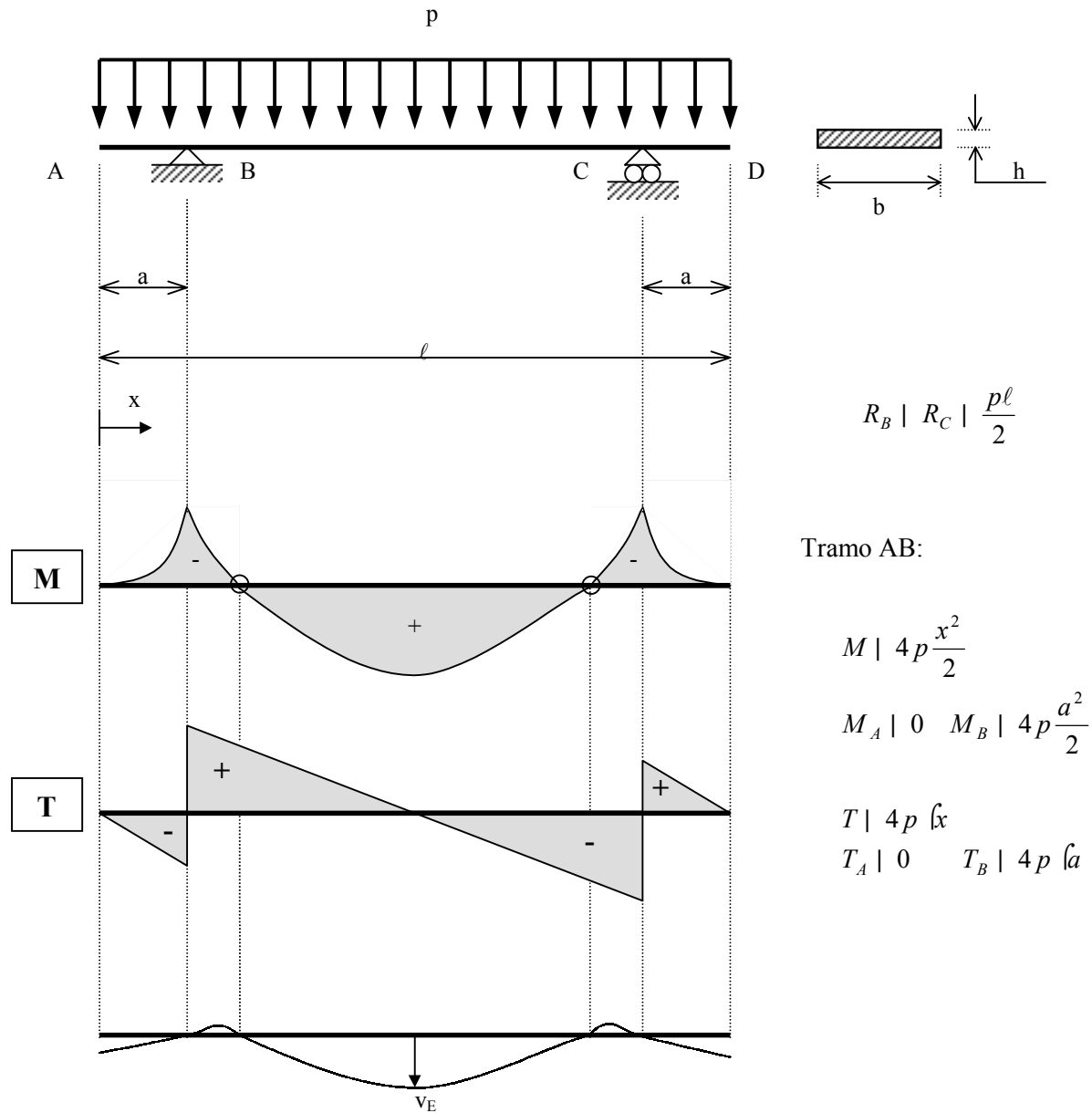
$$\omega_{adm} \mid 4 \text{ N/mm}^2 \quad E \mid 10000 \text{ N/mm}^2$$

La cuestión es:

- ¿De qué espesor h mínimo debo colocar el estante?
- Los dos apoyos los he colocado, simétricamente, a una distancia $a = 15 \text{ cm}$ del extremo por razones puramente estéticas. Pero, atendiendo a razones de comportamiento resistente, ¿cuál sería la distancia óptima de los apoyos a los extremos, que podría minimizar el espesor h del estante?
- Finalmente, me preocupa saber cuál será la flecha que tendrá el estante, una vez cargado, en su punto central (con la distancia a inicial).

Resolución:

a) Determinación de h mínima.



$$R_B \mid R_C \mid \frac{p\ell}{2}$$

Tramo AB:

$$M \mid 4p \frac{x^2}{2}$$

$$M_A \mid 0 \quad M_B \mid 4p \frac{a^2}{2}$$

$$T \mid 4p \int x$$

$$T_A \mid 0 \quad T_B \mid 4p \int a$$

Tramo BC:

$$M \mid 4p \frac{x^2}{2} - 2p \frac{\ell}{2} / x + 4a0 \quad M_B \mid 4p \frac{a^2}{2} - 2p \frac{\ell}{2} / a + 4a0 \mid 4p \frac{a^2}{2}$$

$$M_C \mid M_B \mid 4p \frac{a^2}{2}$$

$$\left. \begin{matrix} \text{C} \\ \text{TM} \end{matrix} \right\} x_E \mid \frac{\ell}{2} \quad M_E \mid 4p \frac{\ell^2}{8} - 2p \frac{\ell^2}{4} + 4p \frac{\ell}{2} \int a \mid p \frac{\ell^2}{8} - 4p \frac{\ell}{2} \int a$$

$$a^2 - 2\ell \left(a - 4 \frac{\ell^2}{4} \right) = 0$$

♦

$$a = 4 \frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 - 2 \frac{\ell^2}{4}}$$

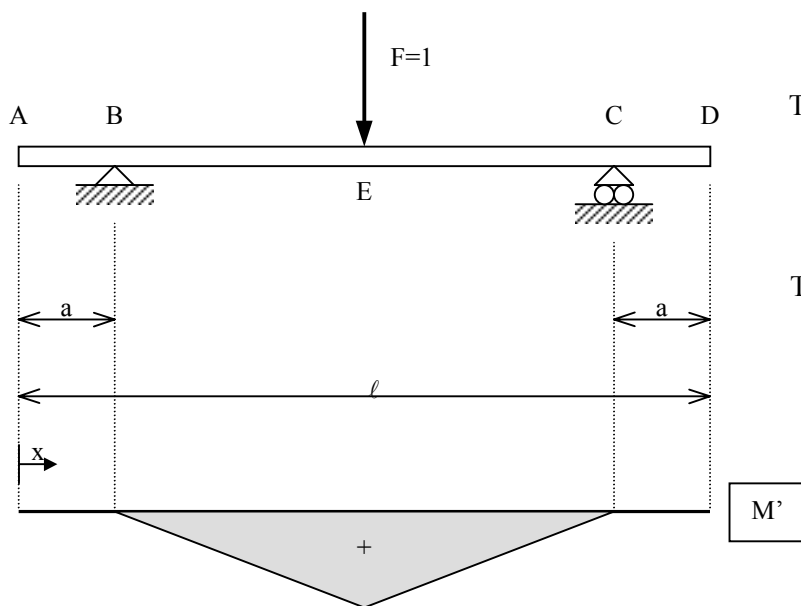
$$a = 4 \frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{2\ell^2}{4}} = 4 \frac{\ell}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \ell \quad \heartsuit \quad a = \left[\begin{matrix} 0,207 \ell \\ / 4,207 \ell \end{matrix} \right]$$

La segunda solución no interesa, porque cae fuera del intervalo analizado

Así pues, la distancia 'a' óptima es: $a_{\text{óptima}} = 20,7 \text{ cm}$

Y se tiene, un momento máximo: $M_{\text{máx}} = 128,7 \text{ cmKg}$

c) Cálculo de la flecha en el punto central, por el método de la fuerza unitaria.



Tramo BE:

$$M = \frac{1}{2} (x - a)$$

Tramo EC:

$$M = \frac{1}{2} (x - a) + \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{2} - a \right)$$

$$v = \frac{\epsilon W}{\epsilon F} = \frac{M}{EI} \int dx = \left(\frac{1}{EI} \int_0^a p \frac{x^2}{a} dx + \frac{1}{EI} \int_a^{\frac{\ell}{2}} p \frac{x^2}{2} - p \frac{\ell}{2} \left(\frac{x - a}{2} \right) dx \right) \int dx$$

$$v = \frac{2}{2EI} \left[\frac{p}{2} \frac{x^3}{3} - p \frac{\ell}{2} x^2 + p \frac{\ell}{2} a x - p \frac{a}{2} x^2 + p \frac{a}{2} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \right] dx$$

$$v = \frac{P}{EI} \left(4 \frac{x^4}{8} - 2 \frac{\ell x^3}{6} + 4 \frac{\ell a x^2}{4} - 2 \frac{a x^3}{6} + 4 \frac{a \ell x^2}{4} - 2 \frac{a^2 \ell x}{2} \right) \Big|_a^\ell$$

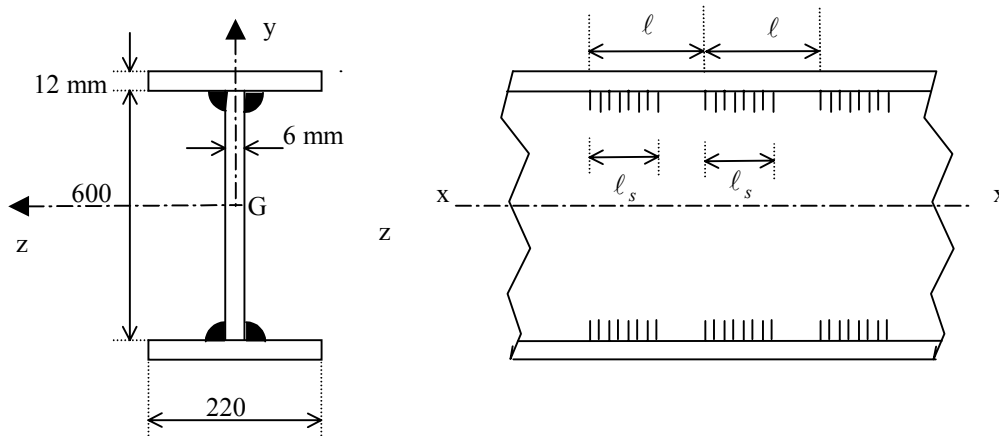
$$v = \frac{0,6}{EI} (4781,25 - 2 \cdot 2083,4 - 937,5 + 2 \cdot 312,5 - 4 \cdot 937,5 + 2 \cdot 562,5 - 2 \cdot 6,328$$

$$4 \cdot 56,25 - 2 \cdot 84,375 + 4 \cdot 8,4375 - 2 \cdot 84,375 + 4 \cdot 168,75) \cdot 10^3 \Big| \frac{0,6 \cdot 24724}{100000 \cdot 5,513} \Big| 0,265 \text{ cm}$$

$$\frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 1,49^3}{12} = 5,513 \text{ cm}^4 \Big|$$

Problema 5.4

Sea una viga de sección transversal en doble T, formada por 3 platabandas soldadas de dimensiones las de la figura. Hallar el paso l de los cordones de soldadura a tramos de unión entre el alma y las alas, si la garganta de soldadura es $a = 5\text{ mm}$ y la longitud de cada tramo de cordón es de $l_s = 10\text{ cm}$. El esfuerzo cortante máximo que soporta la viga es $T_y = 40000\text{ kg}$. La tensión cortante admisible en la soldadura es $\tau_{\text{adms}} = 1000\text{ kg/cm}^2$.

**Resolución:**

Esfuerzo cortante por unidad de longitud en la superficie de contacto entre alma y platabanda

$$f \mid \frac{T \cdot m_z^{A1}}{I_z} \quad m_z^{A1} : \text{momento estático del ala}$$

$$m_z^{A1} \mid 22 \cdot 12 \cdot 30,6 \mid 807,84 \text{ cm}^3$$

$$I_z \mid 2 \left(\frac{1}{12} \cdot 22 \cdot 12^3 + 22 \cdot 12 \cdot 30,6^2 \right) + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 60^3 \mid 49446,14 + 2 \cdot 10800 \mid 60246,14 \text{ cm}^4$$

$$f \mid \frac{40000 \cdot 807,84}{60246,14 \cdot 6} \mid 536,35 \text{ kg/cm}$$

Esfuerzo cortante admitido por el cordón de soldadura,

$$F_{adms} = 2 \tau_{adms} \ell_s a$$

Igualando esfuerzos

$$F_{adms} = f \ell$$

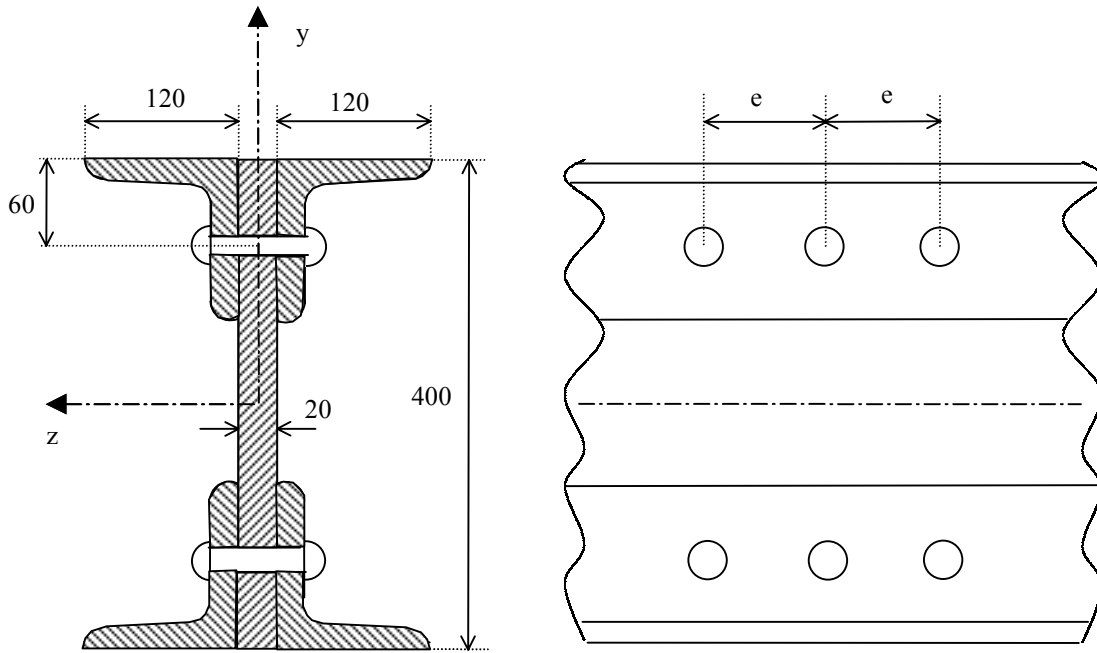
$$2 \tau_{adms} \ell_s a = \frac{T m_z^{A1}}{I_z} \ell$$

$$2 (1000) (0,5) (536,35) \ell$$

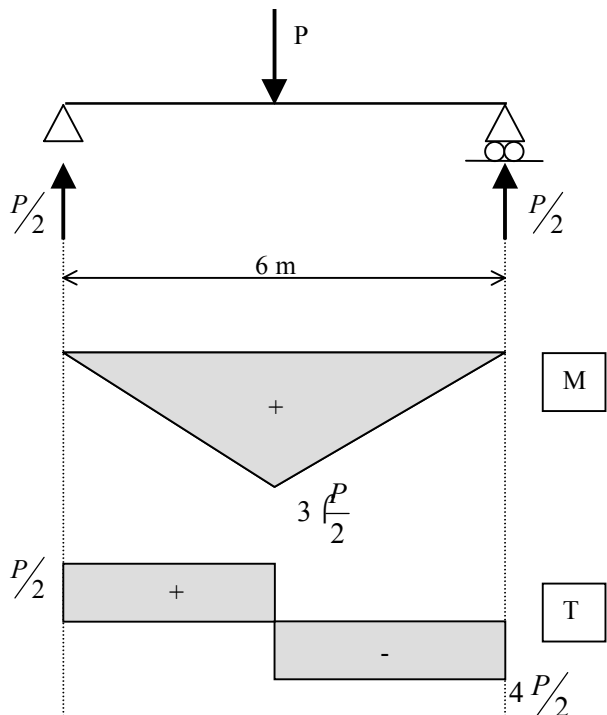
$$\ell = \frac{2 (1000) (0,5)}{536,35} = 18,64 \text{ cm} \approx 19 \text{ cm}$$

Problema 5.5

Se ha construido una viga roblonando cuatro angulares 120*120*12 en los extremos de una platabanda de 400*20 mm. Hallar el diámetro mínimo de los roblones si la viga está biapoyada en sus extremos, tiene una longitud de 6 m, y soporta una carga puntual centrada P . Datos: separación entre roblones $e= 120$ mm; tensión normal admisible de la platabanda y los angulares: $\sigma_{admisible}=173$ Mpa; tensión cortante admisible de los roblones $\tau_{adm\ roblón}= 42$ MPa.



Resolución:



$$\sigma_{adm} \mid \frac{M}{I_z} y_{m\acute{a}x}$$

$$173 \mid \frac{\frac{3}{2} P \cdot 3}{I_z} \cdot 200$$

$$I_z \mid I_{z,alma} + 2 I_{z,angular}$$

$$\mid \frac{1}{12} \cdot 40^3 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3682,275 \cdot 20 \cdot 4 \cdot 3,400$$

$$\mid 10666,72 + 7945,9 \mid 42450,3 \text{ cm}^4$$

$$I_z \mid 42450,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$P \mid \frac{173 \cdot 42450,3 \cdot 10^3 \cdot 2}{200 \cdot 3 \cdot 10^3} \mid 244796 \text{ N}$$

Esfuerzo cortante a transmitir por los roblones por unidad de longitud

$$f = \frac{T}{I_z} m_z = \frac{122\,398 \text{ (} 13 \text{)} \cdot 10^3}{42450,3 \text{ (} 10^4 \text{)}} = 263,25 \text{ N/mm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{R} \\ \text{C} \\ \text{TM} \end{array} \right\} \frac{P}{2} = 122\,398 \text{ N}$$

$$m_z = 2 \cdot 27,5 \cdot 16,6 \cdot 913 \text{ cm}^3 = 913 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Esfuerzo cortante que ha de ser soportado por cada roblon

$$F = f \cdot e = 263,25 \cdot 120 = 31590 \text{ N}$$

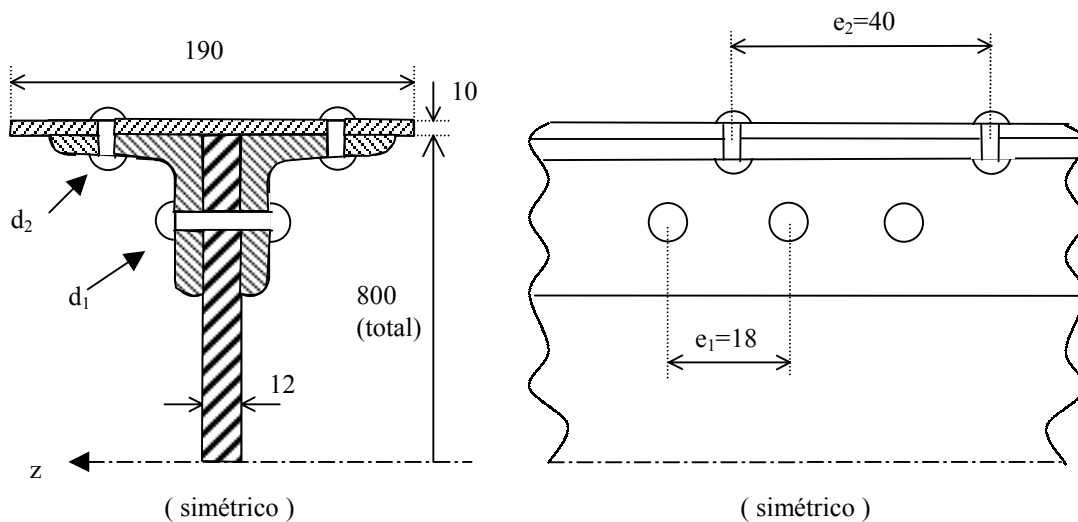
$$F_{adm} = 2 \cdot \frac{\phi d^2}{4} = 31590 \text{ N}$$

$$d = \sqrt{\frac{31590 \cdot 4}{2 \cdot \phi}} = 21,9 \text{ mm}$$

Diámetro mínimo de los roblones : $d = 21,9 \text{ mm}$

Problema 5.6

Una viga armada tiene una sección compuesta por un alma rectangular de 800 mm, y cada ala compuesta por una platabanda de 190 mm y 2 perfiles angulares 90 mm. Calcular el diámetro mínimo de los roblones, sabiendo que el paso de remachado de los angulares con el alma es $e_1 = 18$ cm y el de la platabanda y angulares es $e_2 = 40$ cm. Esfuerzo cortante máximo que ha de soportar la viga: $T = 40$ kN. Tensión de cortadura admisible en los roblones $\tau_{adm} = 42$ MPa.

**Resolución:**

$$I_Z = I_{Z(\text{alma})} + 2 I_{Z(\text{angulares})} + 2 I_{Z(\text{platabandas})}$$

$$I_Z = \frac{1}{12} (1,2 \cdot 80^3 + 2 \cdot 4 \cdot (104 + 2 \cdot 13,9 + 40 + 4 \cdot 2,5)) + 2 \cdot \left(\frac{1}{12} (9 \cdot 1^3 + 2 \cdot 19 \cdot (40 + 2 \cdot 0,5)) \right)$$

$$= 51200 + 2 \cdot (9650,8 + 1166,3) = 192135,9 \text{ cm}^4$$

Esfuerzo cortante a transmitir por los roblones alma-angulares, por unidad de longitud

$$f_1 = \frac{T \cdot m_Z^{A1}}{I_Z}$$

($A1 = \text{área angulares} + \text{área platabanda}$)

$$m_Z^{A1} = 19 \cdot (40 + 2 \cdot 0,5) + 2 \cdot (13,9 + (40 + 2 \cdot 2,5)) = 1812 \text{ cm}^3$$

$$f_1 = \frac{40000 \cdot 1812}{192135,9} = 377,2 \text{ N/cm} = 37,72 \text{ N/mm}$$

Esfuerzo a transmitir por cada roblon:

$$f_1 e_1 = 2 \frac{\phi d_1^2}{4} \sigma_{adm}$$

$$377,2 \text{ (180)} = 2 \frac{3,1416 d_1^2}{4} (42)$$

$$d_1^2 = \frac{4 (37,72 \text{ (180)})}{2 (3,1416) (42)} = 102,9$$

$$d_1 = 10,15 \text{ mm}$$

Esfuerzo cortante a transmitir por los roblones angulares-ala, por unidad de longitud:

$$f_2 = \frac{T m_z^{A2}}{I_z}$$

(A2 = área ala)

$$m_z^{A2} = 19 \text{ (1 (40 2 0.5))} = 769,5 \text{ cm}^3$$

$$f_2 = \frac{40000 (769,5)}{192135,9} = 160,2 \text{ N/cm} = 16,02 \text{ N/mm}$$

Esfuerzo que debe transmitir cada roblón:

$$\frac{f_2 e_2}{2} = \frac{\phi d_2^2}{4} \sigma_{adm}$$

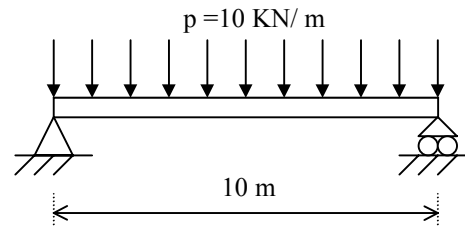
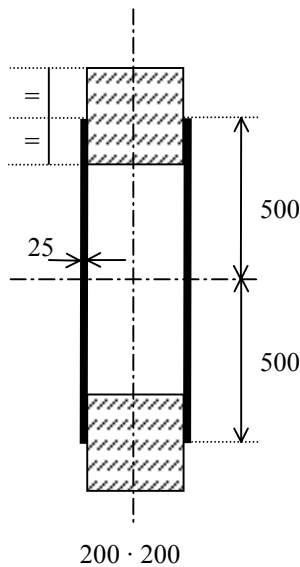
$$\frac{16,02 (400)}{2} = \frac{3,1416 d_2^2}{4} (42)$$

$$d_2 = 9,86 \text{ mm}$$

Problema 5.7 *

Se construye una viga cajón compuesta de dos tipos de madera:

- ALMA: tablero contrachapado $e = 25 \text{ mm}$ $E_2 = 8000 \text{ N/mm}^2$
- ALAS : sección cuadrada $200 \cdot 200 \text{ mm}$ $E_1 = 10000 \text{ N/mm}^2$



- a) Calcular la distribución de tensiones en la sección central.
- b) Calcular la tensión tangencial media en el adhesivo de contacto ($\tau_{adm} = 1 \text{ N/mm}^2$).
- c) Calcular la flecha central

Resolución:

- a) Se trata de una sección compuesta de dos materiales.

Se decide homogeneizar la sección de madera maciza y, por tanto, trabajar con un espesor equivalente, e^* , del tablero contrachapado. Así, la relación de equivalencia:

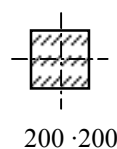
$$n = \frac{E_1}{E_2} = \frac{10000}{8000} = 1,25$$

El espesor equivalente

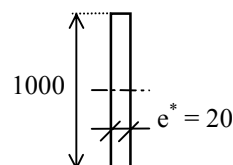
$$e^* = \frac{e}{n} = \frac{25 \text{ mm}}{1,25} = 20 \text{ mm}$$

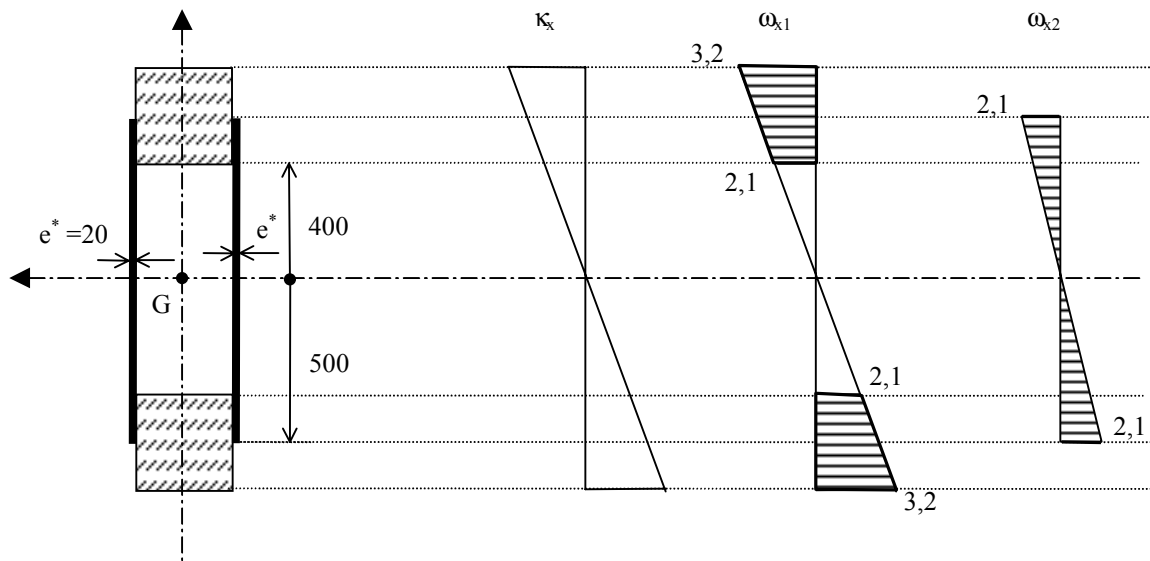
La posición del baricentro de la sección es inmediata por razón de simetría. El momento de inercia de la sección homogénea es:

$$I_Z = 2 \left[\frac{1}{12} (200)(200)^3 + 200(200)(500)^2 \right] + \frac{1}{12} (20)(1000)^3 = 236 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$



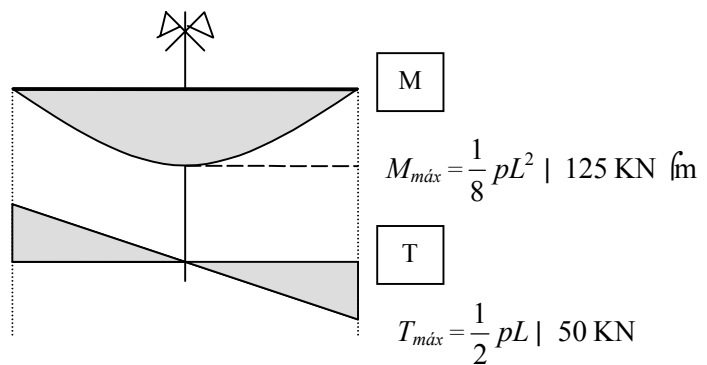
Steiner





Tensión en la madera maciza:

$$\omega_{x1}(y) \mid \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y$$



Tensiones reales en el tablero:

$$\omega_{x2}(y) \mid \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y \left\{ \begin{array}{l} \text{R} \\ \text{C} \\ \text{TM} \end{array} \right\}$$

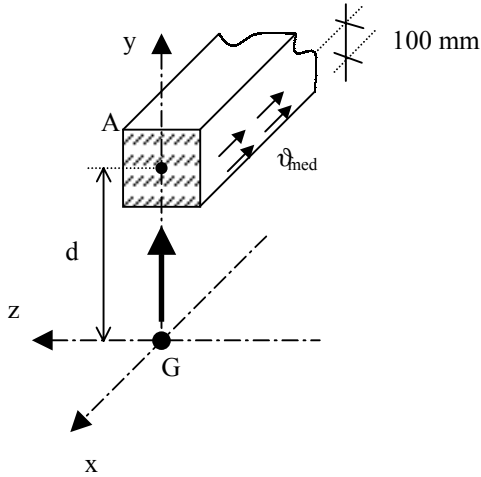
Así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{x1}(y \mid 600 \text{ mm}) \mid \frac{125 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{236 \cdot 10^8 \text{ mm}^4} \cdot 600 \text{ mm} \mid 3,2 \text{ N/mm}^2 \\ \omega_{x1}(y \mid 400 \text{ mm}) \mid \frac{125 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{236 \cdot 10^8 \text{ mm}^4} \cdot 400 \text{ mm} \mid 2,1 \text{ N/mm}^2 \end{array} \right.$$

En el tablero contrachapado $n = 1,25$

$$\omega_{x2}(y \mid 500 \text{ mm}) \mid \left\{ \begin{array}{l} \text{R} \\ \text{C} \\ \text{TM} \end{array} \right\}_{1,25} \cdot \frac{125 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{236 \cdot 10^8 \text{ mm}^4} \cdot 500 \text{ mm} \mid 2,1 \text{ N/mm}^2$$

b) Tensión media en el adhesivo



Fórmula de Collignon:

$$v_{med} \mid \frac{T_y m_Z^A}{I_Z b}$$

 T_y : esfuerzo cortante en la sección I_Z : momento de inercia total respecto Z m_Z^A : momento estático de la sección A respecto al eje Z

b: línea AB

$$v_{med} \mid \frac{50000 \text{ N} \cdot 200 \cdot 2000 \text{ mm}^2 \cdot 500 \text{ mm}}{236 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \cdot 2 \cdot 100 \text{ mm}} \mid 0,2 \text{ N/mm}^2$$

Este valor es inferior a la tensión tangencial admisible en el adhesivo = 1 N/mm²

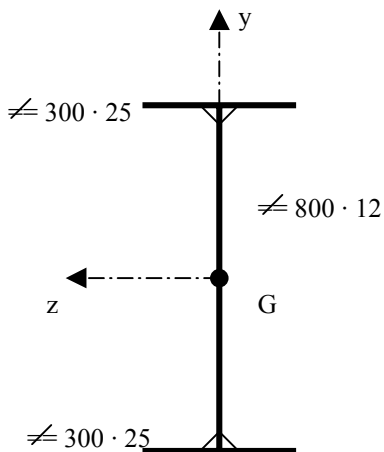
c)

$$f \mid \frac{5}{384} \left(\frac{P L^4}{E I_Z} \right) \mid \frac{5}{384} \left(\frac{10 \cdot 10000}{10000 \cdot 236 \cdot 10^8} \right) \mid 5,5 \text{ mm}$$

Valor aceptable, ya que $\left\{ \frac{L}{1000} \mid \frac{10000}{1000} \mid 10 \text{ mm} \right.$

Problema 5.8 *

La figura representa una sección armada doblemente simétrica. Calcular $M_{el,z}$, $M_{pl,z}$ y el coeficiente ... para los dos casos.



a) Material alas: Fe E 235

Material alma: Fe E 235

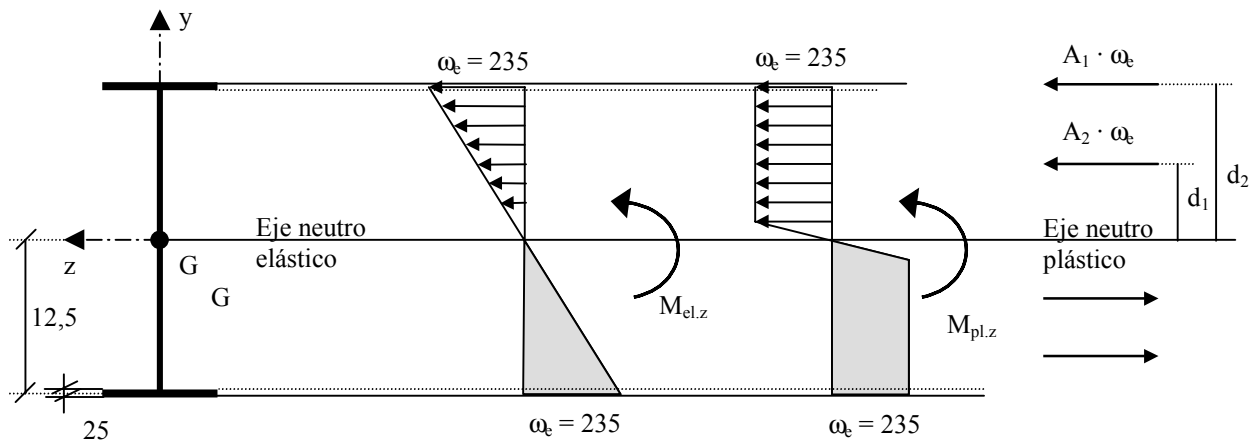
b) Material alas: Fe E 35

Material alma: Fe E 235

(Puede comprobarse que la sección se plastifica con la ausencia de abolladuras elásticas o elastoplásticas. No se consideran inestabilidades globales : pandeo, vuelco lateral)

Resolución:

a) Mismo acero.



Al tratarse de una sección doblemente simétrica el eje neutro plástico pasa por el baricentro G.

Caso elástico:

$$I_z \mid \frac{1}{12} (800^3 \cdot 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 25^3 + 2 \cdot 300 \cdot 25 \cdot 12,5^2 \right)) \mid 306484 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$W_z \mid \frac{I_z}{y_{max}} \mid \frac{306484 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{12,5 \text{ mm}} \mid 7210 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \quad (= W_{el,z})$$

$$M_{el.z} | W_{el.z} \omega_e | 7210 \text{ f}10^3 \text{ mm}^3 \left\{ 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right\} | 1694 \text{ KN f}m$$

Caso plástico:

$$M_{pl.z} \circ 2 \left\{ A_1 \omega_e d_1 + A_2 \omega_e d_2 \right\} \left\{ 300 \left\{ 25 \left\{ 235 \text{ f}2,5 + 400 \text{ f}2 \left\{ 235 \left(\frac{400}{2} \right) \right\} \right\} \right\} \right\} | 1905 \text{ KN f}m$$

Coefficiente ...:

$$\dots | \frac{M_{pl.z}}{M_{el.z}} | \frac{1905}{1694} | 1,12$$

b) Diferente acero.

Caso elástico

Tiene las mismas constantes mecánicas I_z , W_z , pero la tensión en la fibra extrema

$$\omega_{max} | 235 \frac{425}{400} | 250 \{ 355$$

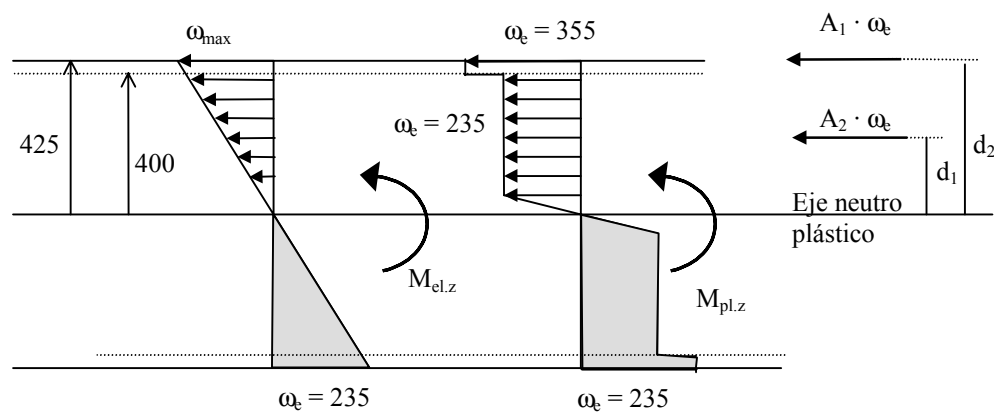
$$M_{el.z} | W_{el.z} \omega_{max} | 7210 \text{ f}10^3 \left\{ 250 \right\} | 1802 \text{ KN f}m$$

Caso plástico

$$M_{pl.z} \circ 2 \left\{ A_1 d_1 \left\{ 355 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right\} + A_2 d_2 \left\{ 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right\} \right\} | 2648 \text{ KN f}m$$

Coefficiente ...:

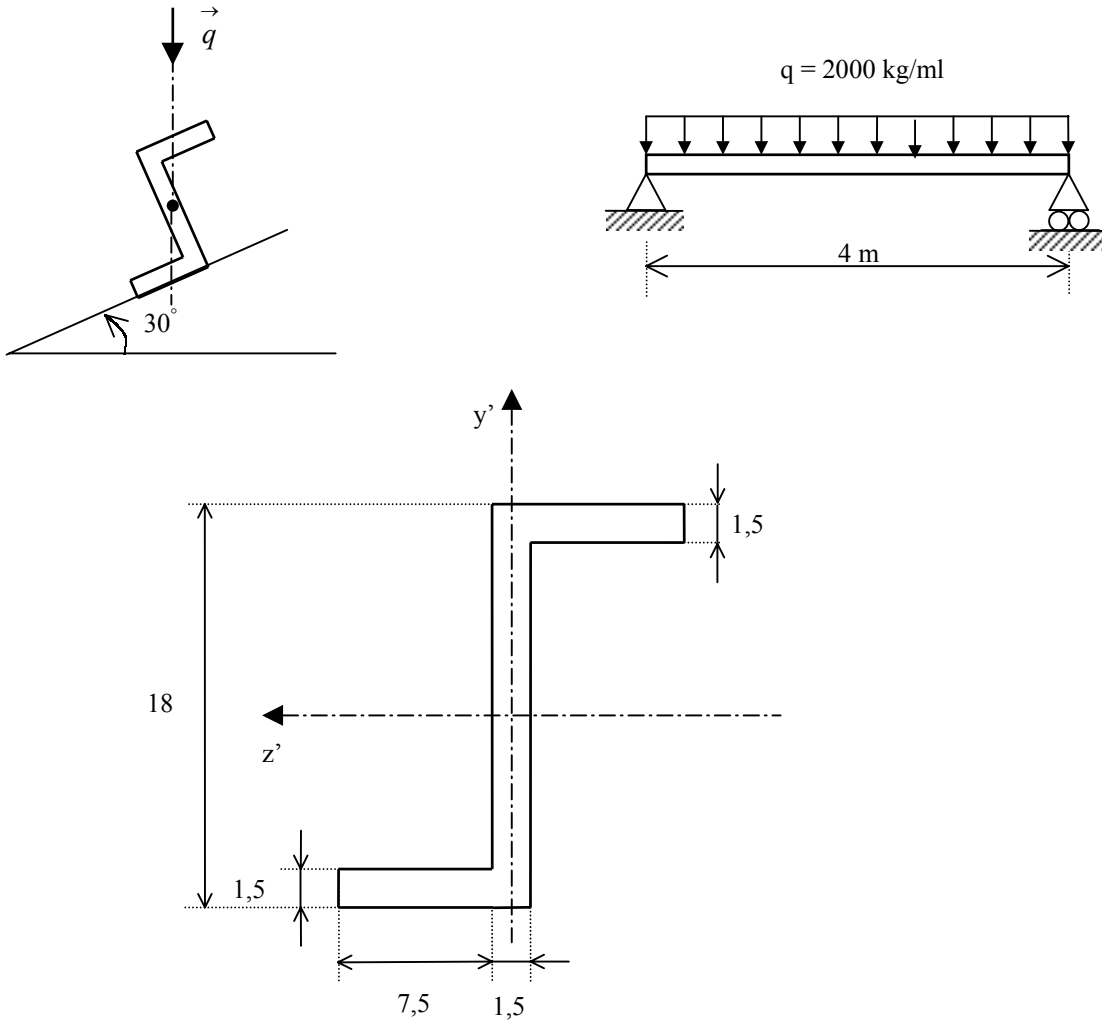
$$\dots | \frac{M_{pl.z}}{M_{el.z}} | \frac{2648}{1802} | 1,47$$



6 Flexión desviada y flexión compuesta

Problema 6.1 *

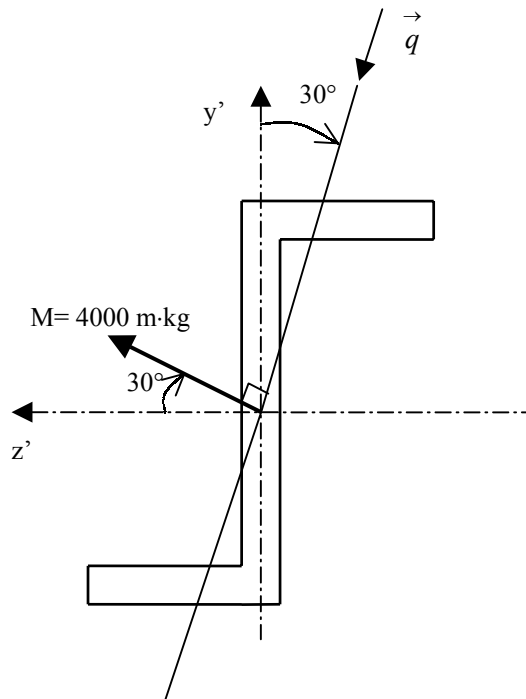
Hallar el punto de la sección con mayor tensión normal, y el valor de esta tensión.

**Resolución:**

a) Determinación del momento flector máximo

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2000 \cdot 4^2}{8} = 4000 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

(en la sección central $x = 2 \text{ m}$)



\vec{M} es perpendicular a \vec{q} y forma 30° con el eje z' . Los ejes y' - z' no son los ejes principales de inercia. Vamos a determinarlos.

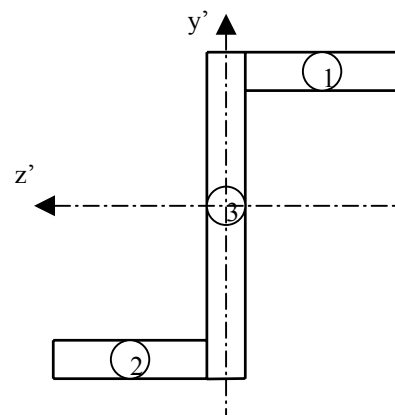
b) Determinación de los momentos de inercia principales $I_{y'}$, $I_{z'}$.

Primero hallaremos el tensor de inercia en ejes y' - z' (no principales) y a continuación lo diagonalizaremos, para hallar los momentos de inercia principales y sus direcciones (ejes principales)

$$I_{3z'} = \frac{1}{12} \cdot 1,5 \cdot 18^3 = 729 \text{ cm}^4$$

$$I_{3y'} = \frac{1}{12} \cdot 18 \cdot 1,5^3 = 5,06 \text{ cm}^4$$

$$I_{1z'} = I_{2z'} = \frac{1}{12} \cdot (9 - 1,5) \cdot 1,5^3 + 7,5 \cdot 1,5 \cdot \left(9 - \frac{1,5}{2}\right)^2 = 767,8 \text{ cm}^4$$



$$I_{1y'} = I_{2y'} = \frac{1}{12} \cdot 1,5 \cdot 7,5^3 + 7,5 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{1,5}{2} + \frac{7,5}{2} \right)^2 = 280,54 \text{ cm}^4$$

$$I_{z'} = 729 + 2 \cdot 767,8 = 2264,6 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'} = 5,06 + 2 \cdot 280,54 = 566,14 \text{ cm}^4$$

$I_{3y'z'} = 0$ por tener eje de simetría.

$$I_{1y'z'} = I_{2y'z'} = - \left[0 + 7,5 \cdot 1,5 \cdot (9 - 0,75) \cdot \left(0,75 + \frac{7,5}{2} \right) \right] = -417,65 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'z'} = -417,65 \cdot 2 = -835,3 \text{ cm}^4$$

Tensor de inercia

$$\begin{vmatrix} I_{z'} & -I_{y'z'} \\ -I_{y'z'} & I_{y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2264,6 & 835,3 \\ 835,3 & 566,14 \end{vmatrix} \quad (\text{cm}^4)$$

Los momentos principales de inercia son los valores propios.

$$\begin{vmatrix} 2264,6 - \lambda & 835,3 \\ 835,3 & 566,14 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2264,6 - \lambda)(566,14 - \lambda) - (835,3)^2 = 0$$

$$2264,6 \cdot 566,14 - 2264,6\lambda - 566,14\lambda + \lambda^2 - 835,3^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2830,74\lambda + 584354,55 = 0$$

$$\lambda = \frac{2830,74 \pm \sqrt{2830,74^2 - 4 \cdot 584354,55}}{2} = \begin{cases} \frac{2830,74 + 2382,36}{2} = 2606,55 \text{ cm}^4 \\ \frac{2830,74 - 2382,36}{2} = 224,19 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Momentos de inercia} \\ \text{principales} \end{array} \right\} \begin{array}{l} I_z = 2606,55 \text{ cm}^4 \\ I_y = 224,19 \text{ cm}^4 \end{array}$$

Los vectores propios serán las direcciones principales.

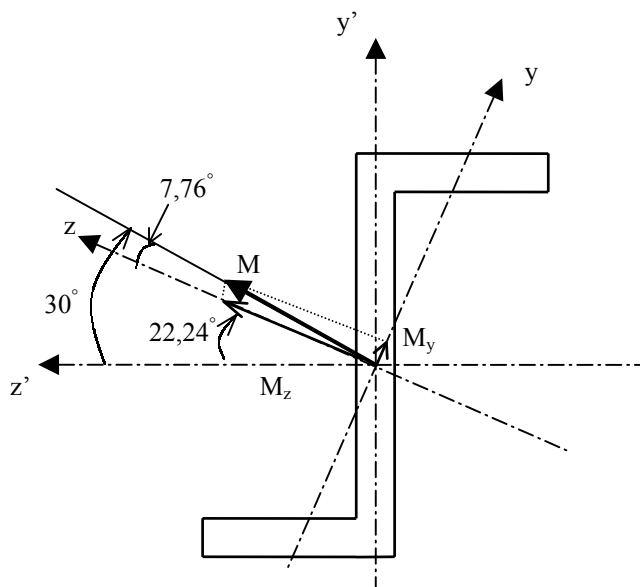
El vector propio correspondiente al valor propio $2606,55 \text{ cm}^4$.

$$\begin{vmatrix} (2264,6 - 2606,55) & 835,3 \\ 835,3 & (566,14 - 2606,55) \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_z^1 \\ n_y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -314,95 \cdot n_z^1 + 835,3 \cdot n_y^1 = 0 \\ 835,3 \cdot n_z^1 - 2040,41 \cdot n_y^1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{n_y^1}{n_z^1} = \frac{314,95}{835,3} = 0,409$$

$$\alpha = \text{arctg } 0,409 = 22,24^\circ$$



$$M_y = 4000 \cdot \text{sen}(30 - 22,24)^\circ =$$

$$4000 \cdot \text{sen } 7,76^\circ = 540 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

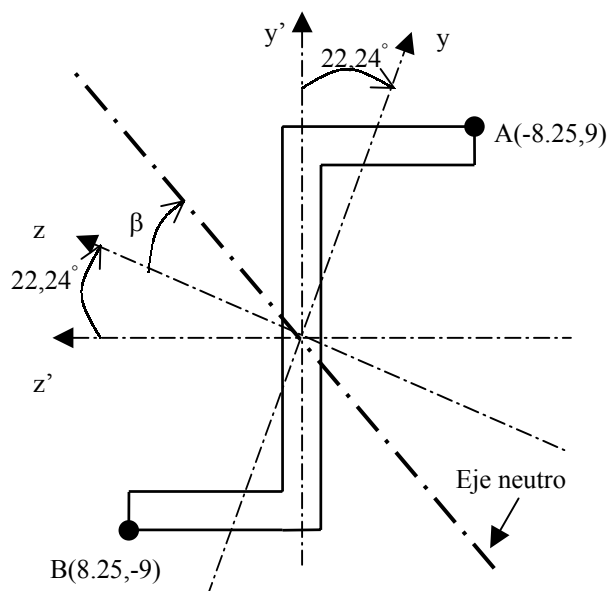
$$M_z = 4000 \cdot \text{cos}(30 - 22,24)^\circ = 3963,36 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$$\sigma_x = -\frac{3963,36 \cdot 10^2}{2606,55} \cdot y + \frac{540 \cdot 10^2}{224,19} \cdot z$$

$$\sigma_x = -152,05y + 240,86z$$

Ecuación del eje neutro.



$$0 = -152,05y + 240,86z$$

$$y = \frac{240,86}{152,05} z$$

$$y = 1,58z$$

Angulo que forma el eje neutro con el eje principal z:

$$\text{tg } \beta = \frac{y}{z} = 1,58 \Rightarrow \beta = 57,67^\circ$$

Relación entre coordenadas de ambas referencias.

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 22,24^\circ & \operatorname{sen} 22,24^\circ \\ -\operatorname{sen} 22,24^\circ & \cos 22,24^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} z &= 0,9256z' + 0,3784y' \\ y &= -0,3784z' + 0,9256y' \end{aligned} \right\}$$

Las tensiones máximas aparecen en los puntos más alejados del eje neutro (A y B)

Para A

$$\left\{ \begin{aligned} z'_A &= -8,25 & z_A &= 0,9256 \cdot (-8,25) - 0,3784 \cdot 9 = -4,230 \\ y'_A &= 9 & y_A &= -0,3784 \cdot (-8,25) + 0,9256 \cdot 9 = 11,452 \end{aligned} \right.$$

Tensión en A:

$$\sigma_A = -152,05 \cdot 11,452 + 240,86 \cdot (-4,230) = -2760,11 \text{ kg/cm}^2$$

Tensión en B:

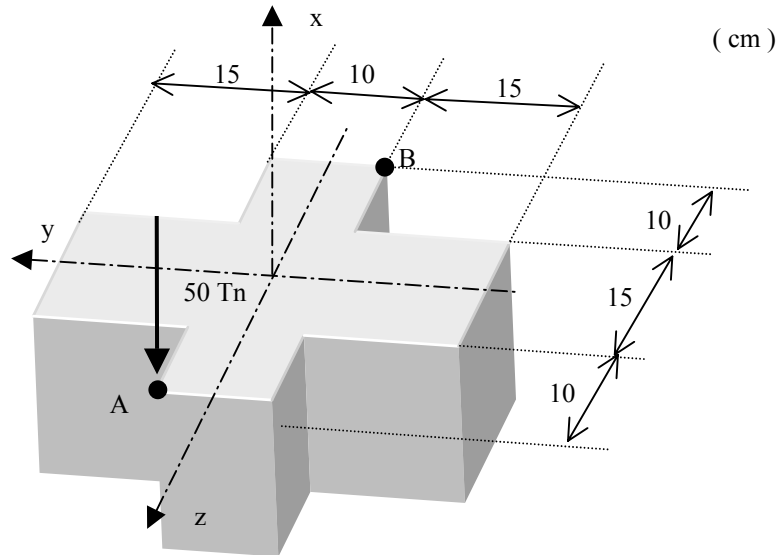
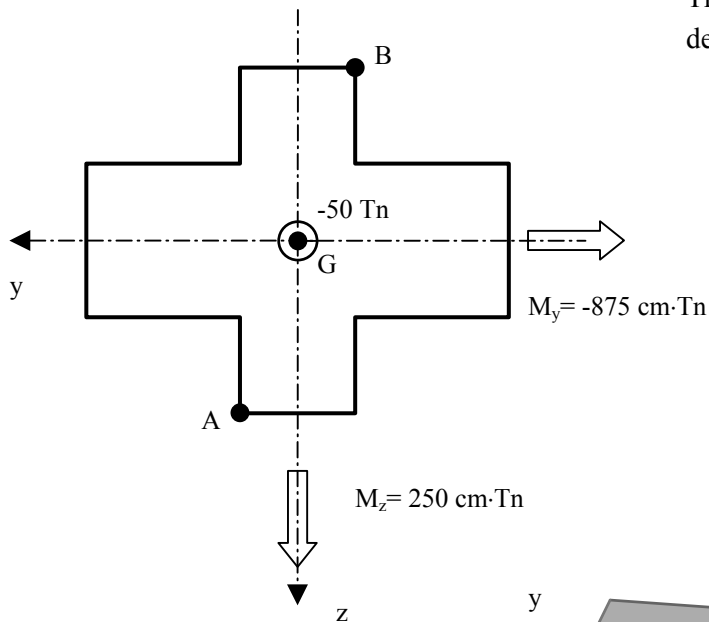
$$\left. \begin{aligned} z'_B &= 8,25 \\ y'_B &= -9 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} z &= 0,9256 \cdot (8,25) - 0,3784 \cdot (-9) = 4,230 \\ y &= -0,3784 \cdot (8,25) + 0,9256 \cdot (-9) = -11,452 \end{aligned}$$

$$\sigma_B = -152,05 \cdot (-11,452) + 240,86 \cdot 4,230 = 2760,11 \text{ kg/cm}^2$$

Problema 6.2

Una columna tiene la sección en cruz indicada en la figura. La fuerza resultante es de compresión (50 Tn) y pasa por el punto A. Hallar la tensión normal en B y dibujar el eje neutro.

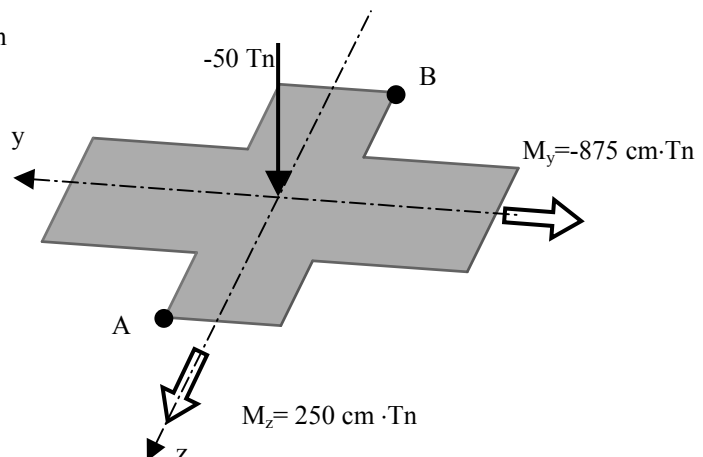
**Resolución:**

Trasladando la fuerza al centro de gravedad G de la sección, los esfuerzos equivalentes son:

$$N = -50 \text{ Tn}$$

$$M_y = -50 \text{ Tn} \cdot \left(10 + \frac{15}{2}\right) \text{ cm} = -875 \text{ cm} \cdot \text{Tn}$$

$$M_z = 50 \text{ Tn} \cdot \frac{10}{2} \text{ cm} = 250 \text{ cm} \cdot \text{Tn}$$



$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_x = \frac{-50\,000}{A} - \frac{250\,000}{I_z} y + \frac{-875\,000}{I_y} z$$

$$A = 10 \cdot 35 + 2 \cdot 15 \cdot 15 = 800 \text{ cm}^2$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot (15 + 10 + 15)^3 + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 10^3 = 81667 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot (10 + 15 + 10)^3 + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 15^3 = 44167 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_x = \frac{-50\,000}{800} - \frac{250\,000}{81667} y - \frac{875\,000}{44167} z \Rightarrow \sigma_x = -62,5 - 3,06y - 19,81z \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

a) Tensión normal en B

$$\text{Coordenadas de B} \quad \begin{cases} y = -5 \text{ cm} \\ z = -17,5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\sigma_{x_B} = -62,5 - 3,06 \cdot (-5) - 19,81 \cdot (-17,5) = 299,47 \text{ kp/cm}^2$$

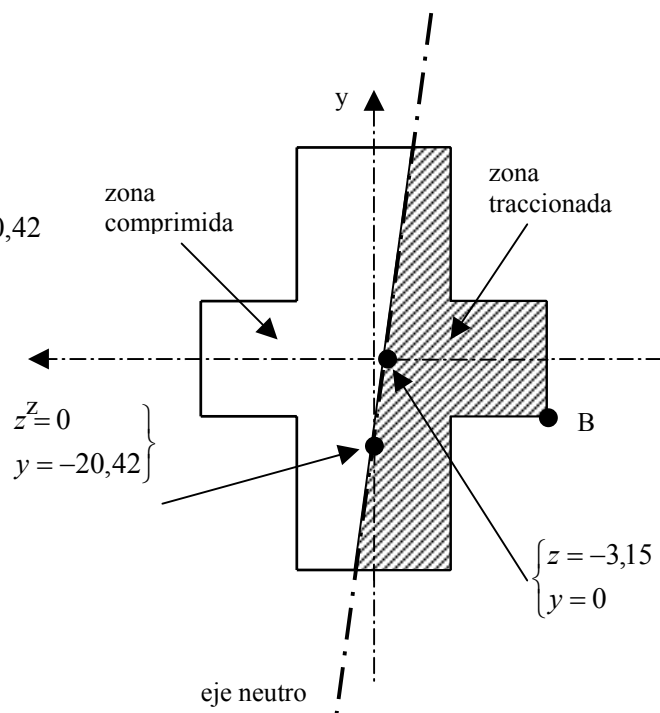
b) Eje neutro

$$0 = -62,5 - 3,06y - 19,81z$$

$$y = -\frac{19,81}{3,06} z - \frac{62,5}{3,06} \Rightarrow y = -6,47z - 20,42$$

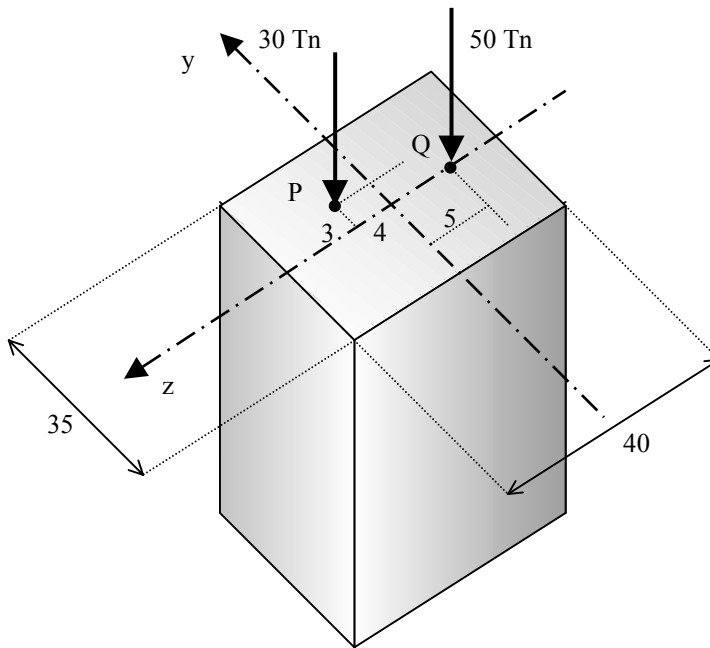
$$\text{para } y = 0 \rightarrow z = \frac{-20,42}{6,47} = -3,15$$

$$\text{para } z = 0 \rightarrow y = -20,42$$



Problema 6.3

Sobre una columna de sección rectangular ($35 \cdot 40$ cm), se aplican dos fuerzas excéntricas: 30 Tn en el punto P ($y = 3$, $z = 4$ cm) y 50 Tn en el punto Q ($y = 0$, $z = -5$ cm). Dibujar el eje neutro y hallar el punto de máxima tensión normal.

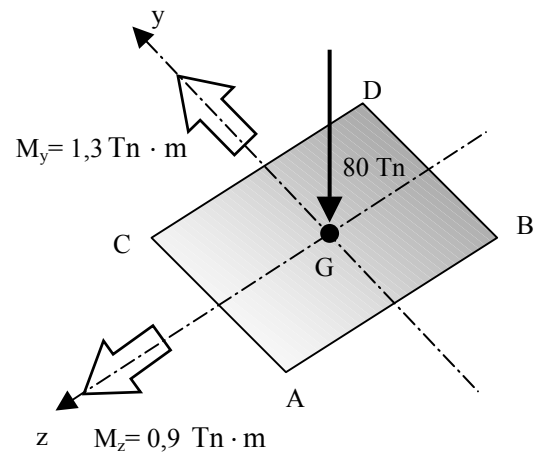
**Resolución:**

Trasladando las dos fuerzas al centro de gravedad G de la sección obtenemos:

$$M_y = -30 \cdot 0,04 + 50 \cdot 0,05 = -1,2 + 2,5 = 1,3 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 30 \cdot 0,03 = 0,9 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$N = -30 - 50 = -80 \text{ Tn}$$



$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 40 \cdot 35 = 1400 \text{ cm}^2 \\ I_z &= \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 35^3 = 142916,7 \text{ cm}^4 \\ I_y &= \frac{1}{12} \cdot 35 \cdot 40^3 = 186666,7 \text{ cm}^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_x = \frac{-80000}{1400} - \frac{90000}{142916,7} y + \frac{130000}{186666,7} z \quad (\text{kg/cm}^2)$$

$$\sigma_x = -57,14 - 0,630y + 0,696z \quad (\text{kg/cm}^2) \Leftrightarrow \sigma_x = -5,71 - 0,0630y + 0,0696z \quad (\text{N/mm}^2)$$

(y, z en cm) (y, z en mm)

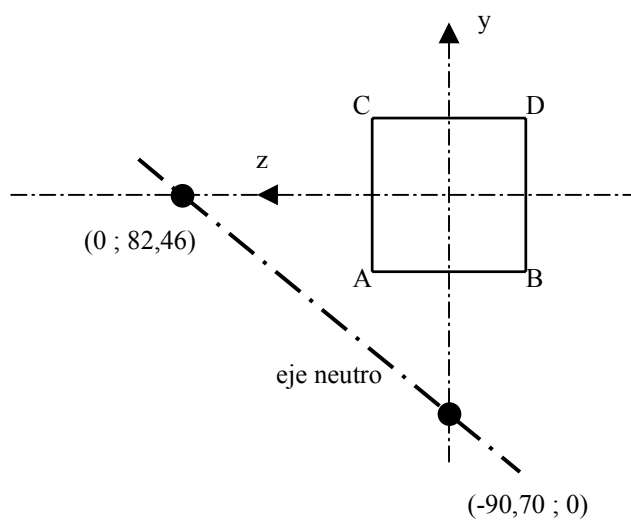
Eje neutro:

$$0 = -57,14 - 0,630y + 0,696z$$

$$y = \frac{0,696}{0,630} z - \frac{57,14}{0,630} \left. \vphantom{y} \right\} \rightarrow y = 1,1z - 90,70$$

$$y = 0 \rightarrow z = 82,46$$

$$z = 0 \rightarrow y = -90,70$$



$$\sigma_A = -57,14 - 0,630 \cdot (-17,5) + 0,696 \cdot 20 = -32,19 \text{ kg/cm}^2 = -3,219 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = -57,14 - 0,630 \cdot (-17,5) + 0,696 \cdot (-20) = -60,04 \text{ kg/cm}^2 = -6,004 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_C = -57,14 - 0,630 \cdot 17,5 + 0,696 \cdot 20 = -54,24 \text{ kg/cm}^2 = -5,424 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_D = -57,14 - 0,630 \cdot 17,5 + 0,696 \cdot (-20) = -82,08 \text{ kg/cm}^2 = -8,208 \text{ N/mm}^2$$

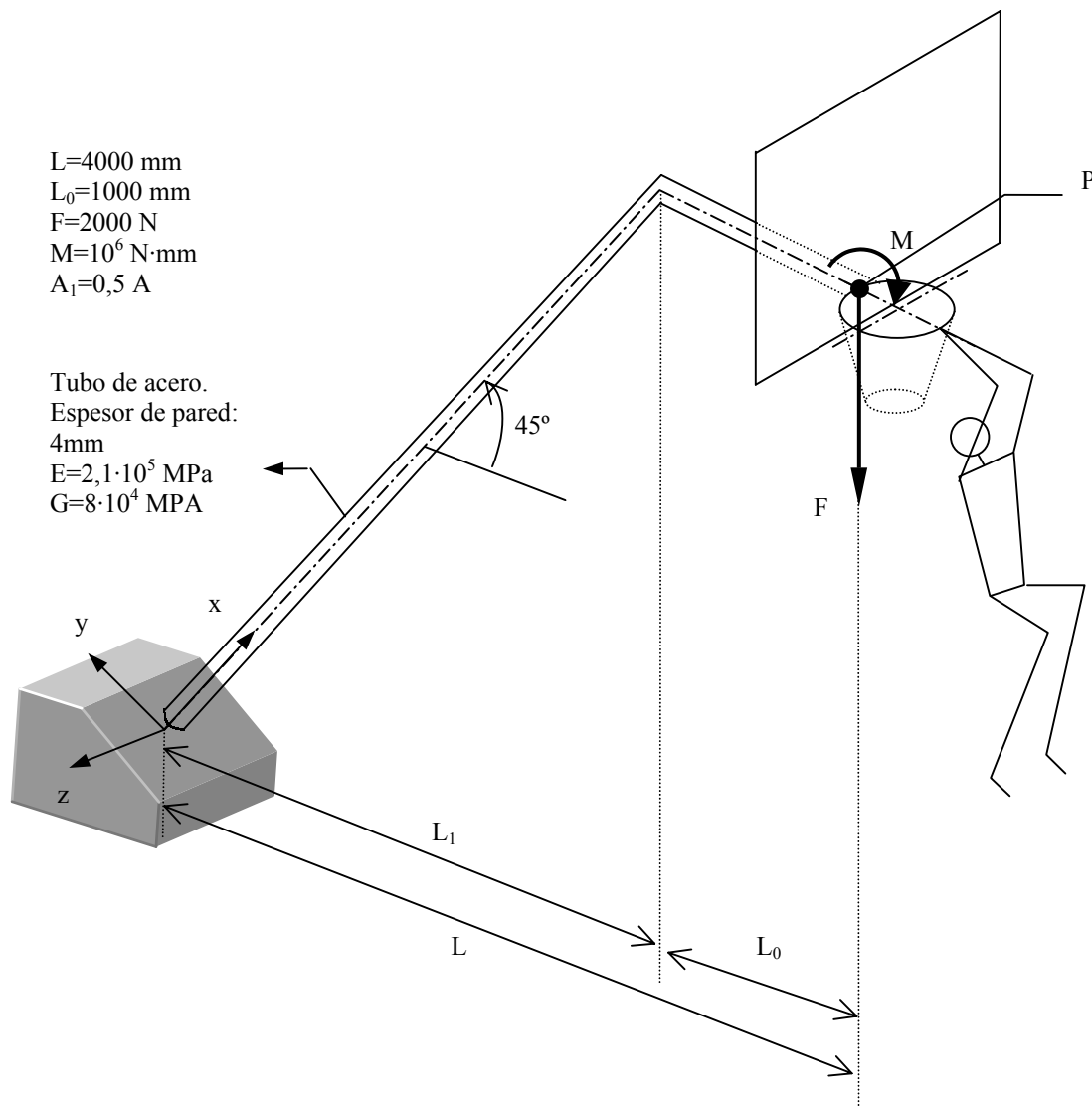
Problema 6.4

Se ha proyectado una sencilla estructura para soportar el tablero y la canasta de una pista de baloncesto. Se trata de un tubo de acero embebido en un bloque de hormigón a 45° de la horizontal según se indica en la figura.

Se supone que el estado de carga más desfavorable es el que se produce cuando un jugador permanece unos instantes sujeto al aro de la canasta, transmitiendo así todo su peso a la estructura en la forma indicada en la figura.

Una vez estudiados los efectos dinámicos de esta acción, se estima que el esfuerzo máximo que el jugador puede llegar a transmitir al aro es de $F = 2000 \text{ N}$ y $M = 10^6 \text{ Nmm}$.

La estructura se quiere construir en tubo redondo de acero con espesor de pared de 4 mm.

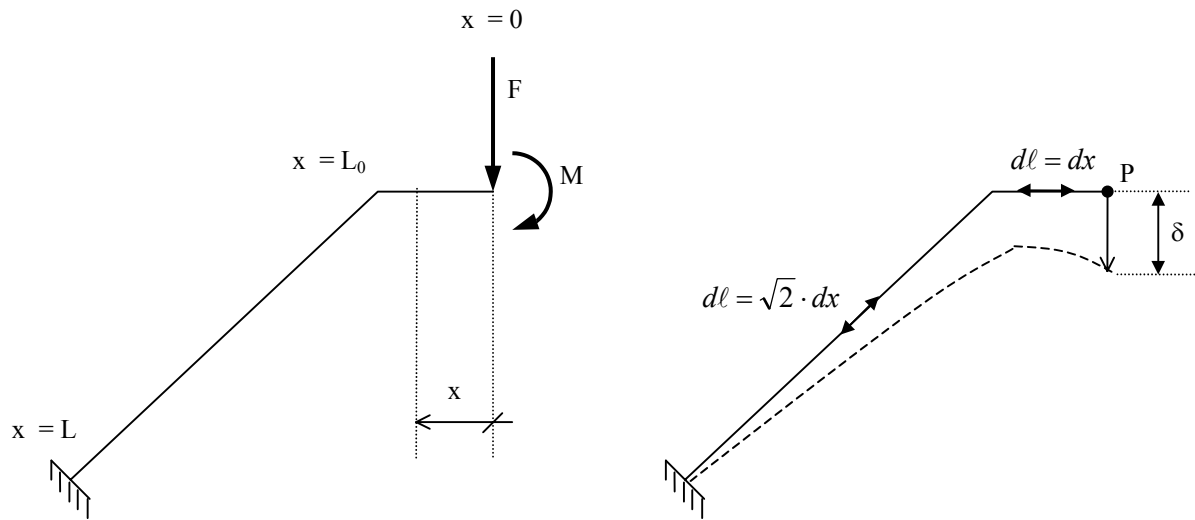


Calcular el diámetro necesario, según la tabla de perfiles normalizados, para que el descenso vertical del punto P no exceda los 80 mm.

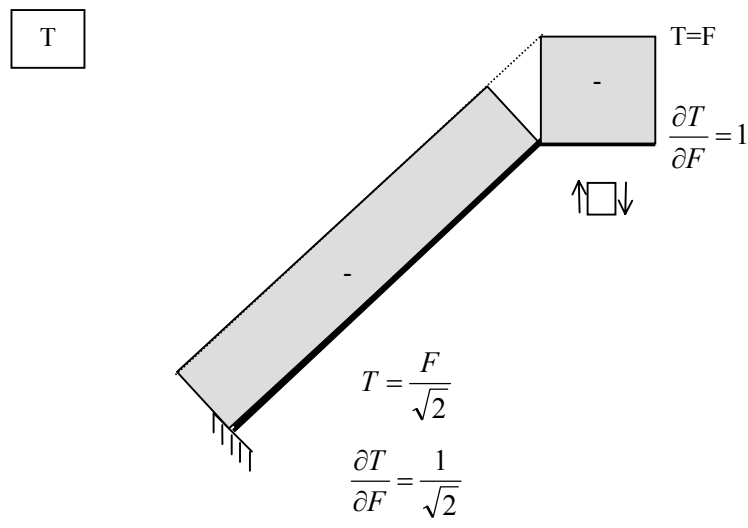
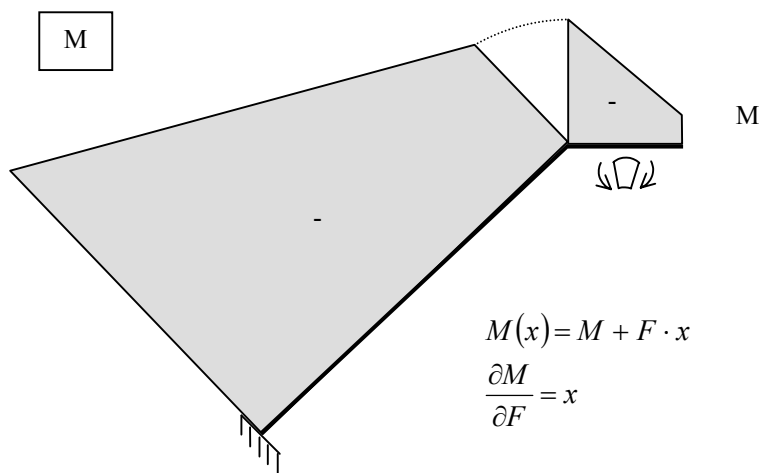
Notas importantes:

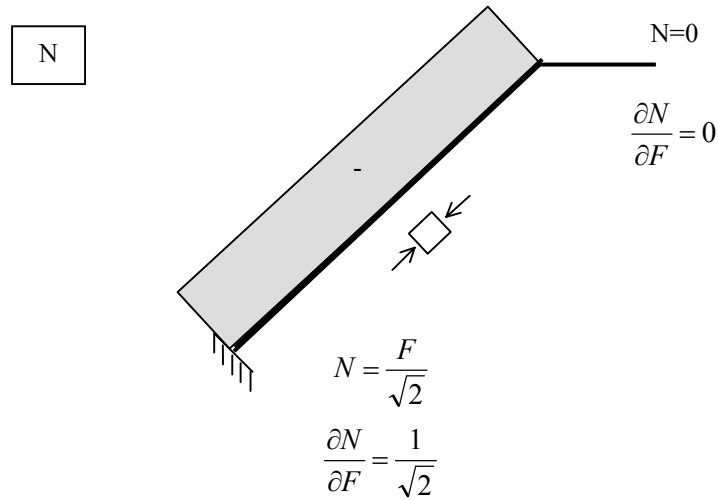
- Considerar todos los esfuerzos de sección para calcular el descenso de P.
- Trabajar con la carga trasladada al punto P, como se indica en la figura.

Resolución:



Aplicamos el teorema de Castigliano al punto P en la dirección F:





$$\delta = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} d\ell + \int \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial F} d\ell + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F} d\ell$$

$$\delta = \int_0^{L_0} \frac{(M + F \cdot x)}{EI} x dx + \int_0^{L_0} \frac{F}{G \frac{A}{2}} dx + \int_{L_0}^L \frac{(M + F \cdot x)}{EI} x (\sqrt{2} dx) + \int_{L_0}^L \frac{\frac{F}{\sqrt{2}}}{G \frac{A}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} dx) + \int_{L_0}^L \frac{\frac{F}{\sqrt{2}}}{EA} \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} dx) =$$

$$= \left[\frac{ML_0^2}{2EI} + \frac{FL_0^3}{3EI} \right] + \left[\frac{2FL_0}{GA} \right] + \left[\frac{M(L^2 - L_0^2)}{\sqrt{2} EI} + \frac{\sqrt{2} F(L^3 - L_0^3)}{3EI} \right] + \left[\frac{2F(L - L_0)}{\sqrt{2} GA} \right] + \left[\frac{F(L - L_0)}{\sqrt{2} EA} \right]$$

$$\delta = \frac{3,389 \cdot 10^8}{I} + \frac{176,3}{A}$$

Buscamos en las tablas de perfiles tubulares circulares:

Tubo ($D_{\text{ext}} \times e$)	A (cm^2)	I (cm^4)	δ (mm)
135 x 4	16,46	353,4	96
150 x 4	18,34	489,2	69,4

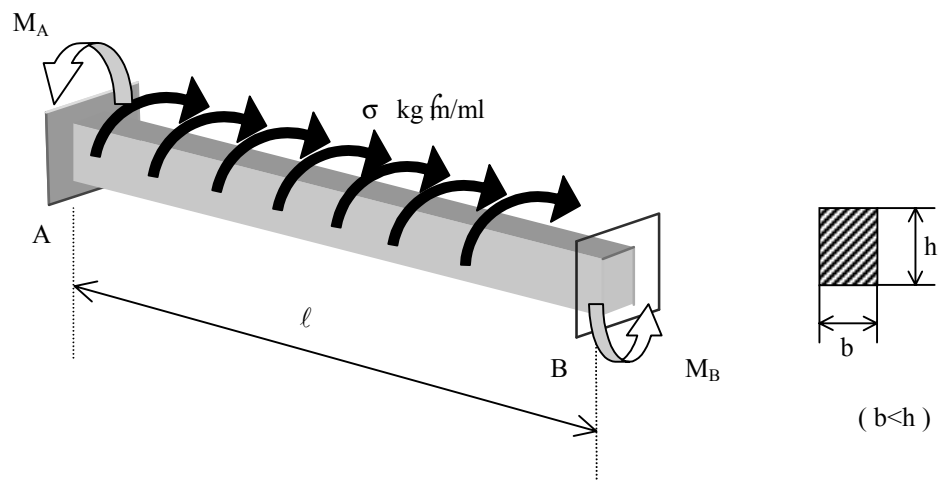
(>80)
(<80)

Tomaremos pues un tubo $D_{\text{ext}} \times e$: 150 x 4 (mm).

7 Torsión y esfuerzos combinados

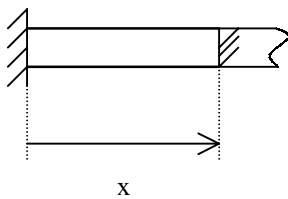
Problema 7.1

Una viga biempotrada está sometida a un momento torsor producido por una torsión uniformemente repartida. Hallar el $M_{T\text{ máx}}$ y el ángulo de torsión máximo.

**Resolución:**

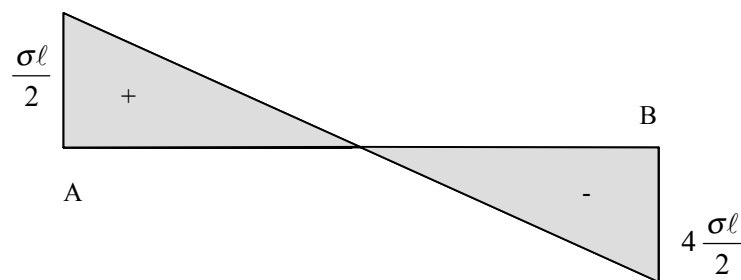
Por ser una viga simétrica ♥ los momentos de empotramiento han de ser iguales.

$$M_A = M_B = \frac{\sigma l}{2}$$



$$M_T(x) = \frac{\sigma l}{2} - 4 \sigma x, \quad \text{en } x = \frac{l}{2} \quad M_T = 0$$

Diagrama de momentos torsores:



El ángulo de torsión máximo se tiene para la sección central, $x = \frac{\ell}{2}$:

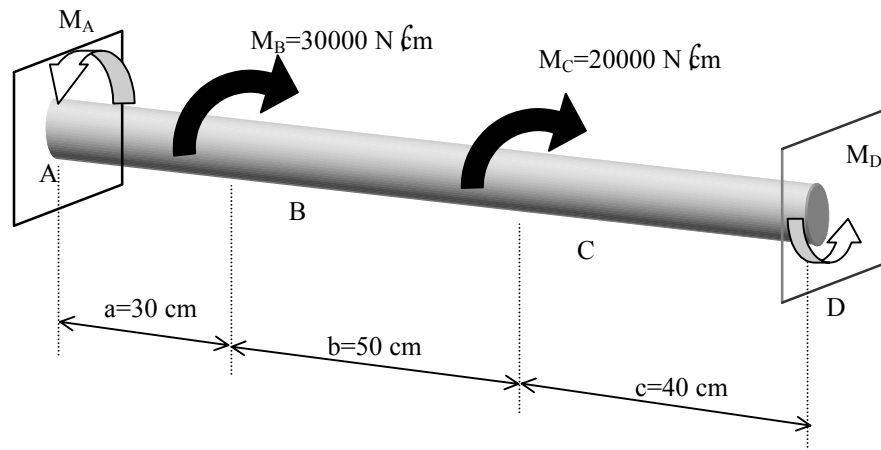
$$\begin{aligned} \chi_{\text{TM}}^{\text{R}} &= \int_0^{\ell/2} \frac{M_T(x)}{GK_3 b^3 h} dx = \frac{1}{GK_3 b^3 h} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{\sigma \ell}{2} x \right) dx = \frac{1}{GK_3 b^3 h} \left(\frac{\sigma \ell}{2} x^2 \right) \Big|_0^{\ell/2} \\ &= \frac{1}{GK_3 b^3 h} \left(\frac{\sigma \ell^2}{4} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{GK_3 b^3 h} \frac{\sigma \ell^2}{8} \end{aligned}$$

G: módulo de rigidez a torsión del material del eje $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$

K_3 : coeficiente para secciones rectangulares, que depende de la relación $\frac{h}{b}$ (ver tabla 5.87 del capítulo 5. Torsión)

Problema 7.2

Hallar los momentos en los empotramientos M_A y M_D . Dibujar el diagrama de momentos torsores.



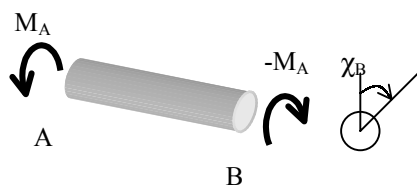
Resolución:

Es un problema hiperestático.

$$\sum M_T = 0 \quad \heartsuit \quad M_A - 4M_B + 4M_C - 2M_D = 0$$

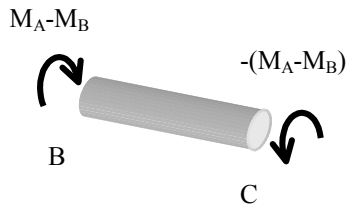
$$M_A - 2M_D = 30000 - 2 \cdot 20000 \quad | \quad 50000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

Considerando por tramos:



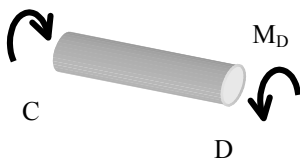
$$\chi_A = 0$$

$$\chi_{BA} = \chi_B = 4\chi_A = \frac{4M_A \cdot a}{G \cdot I_o} = \frac{4M_A \cdot 30}{G \cdot I_o}$$



$$\chi_{CB} = \chi_C = 4\chi_B = \frac{4}{G} \frac{M_A - M_B}{I_o} \cdot 50$$

$$-M_D = M_A - M_B - M_C$$



$$\chi_{DC} = \chi_D = 4\chi_C = \frac{M_D}{G} \frac{40}{I_o}$$

$$\chi_D = 0$$

$$\chi_D = \chi_{BA} = 2\chi_{CB} = 2\chi_{DC} = 0$$

$$4 \frac{M_A}{G} \frac{50}{I_o} = 2 \frac{M_D}{G} \frac{40}{I_o} = 4 \frac{M_A - M_B}{G} \frac{50}{I_o} = 0$$

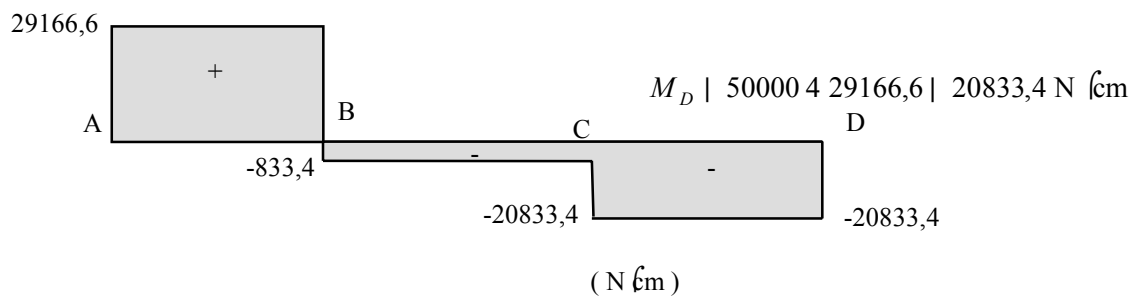
$$4 M_A \cdot 50 = 4 \frac{M_D}{G} \cdot 40 = 4 \frac{M_A - M_B}{G} \cdot 50 = 0$$

$$4 M_A \cdot 50 = 4 M_A \cdot 50 = 2 M_D \cdot 40 = 0$$

$$80 M_A = 40 M_D = 1500000$$

$$\begin{bmatrix} M_A & 2 M_D \\ 80 M_A & 40 M_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50000 & 2000000 \\ 1500000 & 1500000 \end{bmatrix} \quad \heartsuit \quad M_A = \frac{3500000}{120} = 29166,6 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

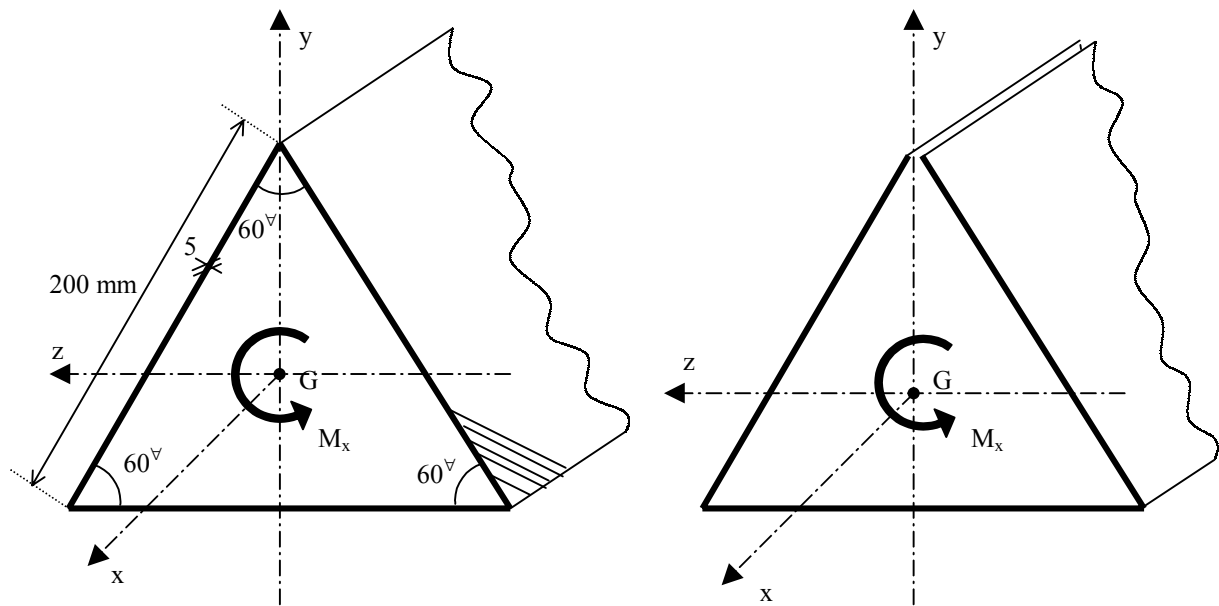
Diagrama de momentos torsores:



Problema 7.3

Calcular para cada una de las secciones abierta y cerrada de la figura adjunta, sometidas a un momento torsor $M_x = 1000 \text{ Nm}$:

- el valor y la posición de la tensión tangencial máxima, τ_{\max} .
- el momento de inercia a torsión, I_t .

**Resolución:**

Sección cerrada :

A_m : área limitada por la curva media

a)

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{2 \int A_m e} = \frac{1000 \text{ Nmm} \cdot 10^3}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm} \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 \text{ mm}} = 5,77 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

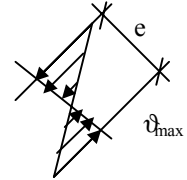
$$c) \quad I_t = \frac{4 \int A_m^2}{\int \frac{ds}{e}} = \frac{4 \int A_m^2}{s} e = \frac{4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 200 \cdot 200 \cdot \cos 30^\circ}{3 \cdot 200} \cdot 5 \text{ mm} = 1000 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

d)

Sección abierta:

a)

$$v_{\max} = \frac{M_x}{\frac{1}{3} b_i e_i^3} \left[e = \frac{1000 \text{ Nmm} \cdot 10^3}{3 \cdot \frac{\pi}{32} (200 \text{ mm})^4} \right] \cdot 15 \text{ mm} = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



b)

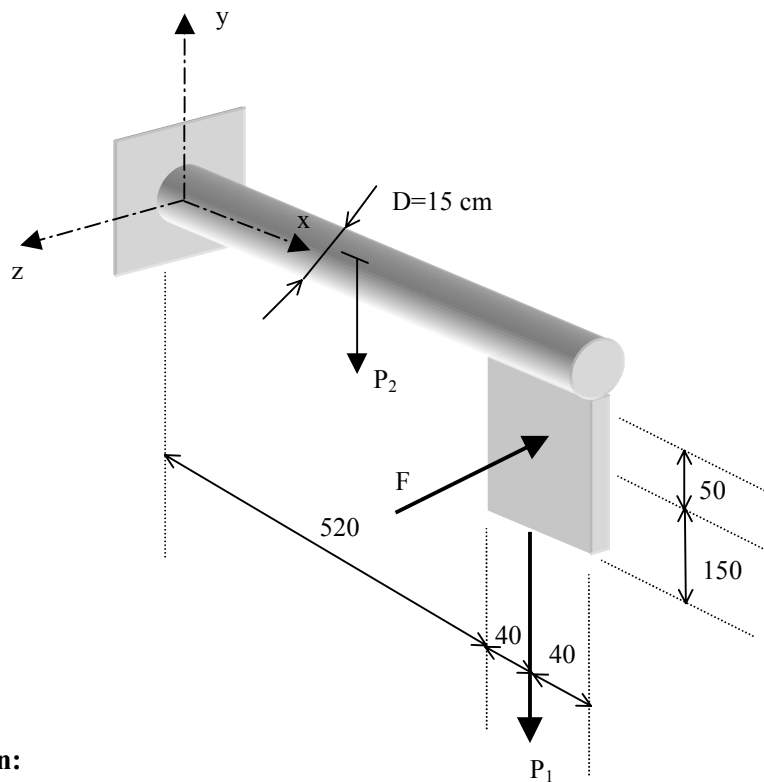
$$I_i = \frac{1}{3} b_i e_i^3 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Problema 7.4

Un panel está sujeto por un mástil horizontal, según el esquema de la figura. Teniendo en cuenta el peso propio del panel, el peso propio del mástil y la acción del viento, hallar las tensiones máximas en el empotramiento del mástil a la pared.

Datos: Peso propio del panel $P_1 = 90 \text{ kp}$
 Dimensiones $80 \times 100 \text{ cm}$
 Diámetro del mástil $D = 15 \text{ cm}$
 Empuje del viento $f = 80 \text{ kg/m}^2$

(Peso propio del mástil de acero: $P_2 = 7850 \text{ kp/m}^3 \left(6 \text{ m} \left(\frac{\phi 0,15^2}{4} \right) \right) = 832 \text{ kp}$)

**Resolución:**

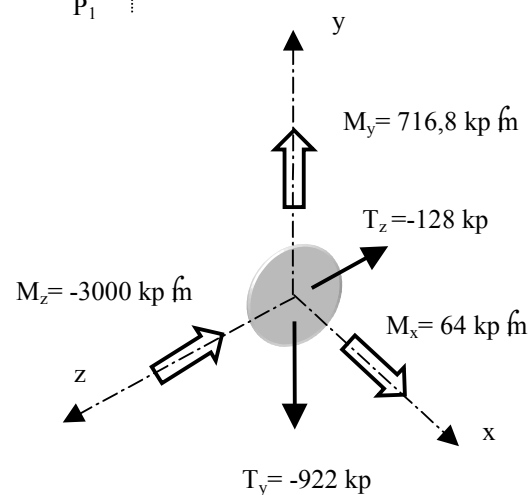
$$F = 80 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} (0,8 \times 2) = 128 \text{ kp}$$

Sección en el empotramiento. Esfuerzos:

$$N_x = 0$$

$$T_y = 490 + 832 = 4922 \text{ kp}$$

$$T_z = 4128 \text{ kp}$$

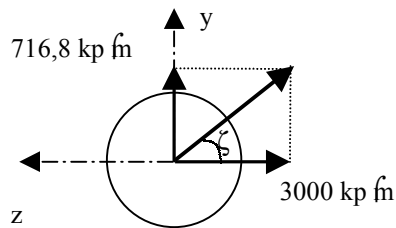


$$M_x \mid 128 \text{ kp } (0,5 \text{ m} \mid 64 \text{ kp } \text{fm})$$

$$M_y \mid 128 \text{ kp } ((0,4 \text{ 2 } 5,2) \text{ m} \mid 716,8 \text{ kp } \text{fm})$$

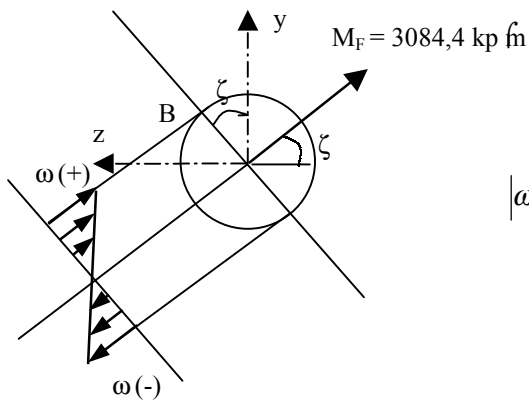
$$M_z \mid 490 \text{ kp } ((5,2 \text{ 2 } 0,4) \text{ m} \mid 4832 \text{ kp } \text{fm})$$

Tensiones normales debidas a los momentos flectores:



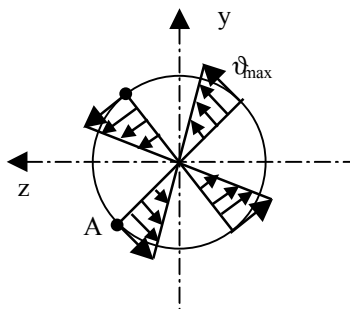
$$M_F \mid \sqrt{3000^2 + 716,8^2} \mid 3084,4 \text{ kp } \text{fm}$$

$$z \mid \arctan \frac{716,8}{3000} \mid 13,4^\circ$$



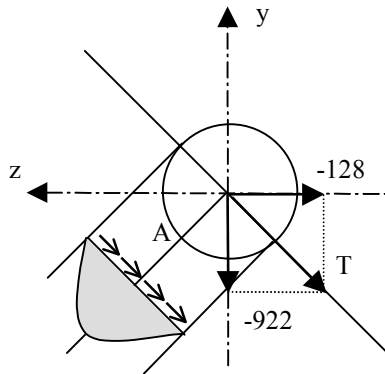
$$|\omega_{x_{max}}| \mid \frac{M_F D}{I_z} \mid \frac{3084,4 \text{ (10}^2 \text{ 15)}}{\frac{\phi \sqrt{5^4}}{64}} \mid 930,9 \text{ kp/cm}^2$$

Tensiones tangenciales debidas al momento torsor:



$$v_{max} \mid \frac{M_x r_{max}}{I_o} \mid \frac{6400 \frac{15}{2}}{\frac{\phi \sqrt{5^4}}{32}} \mid 9,66 \text{ kp/cm}^2$$

Tensiones tangenciales debidas a los esfuerzos cortantes:

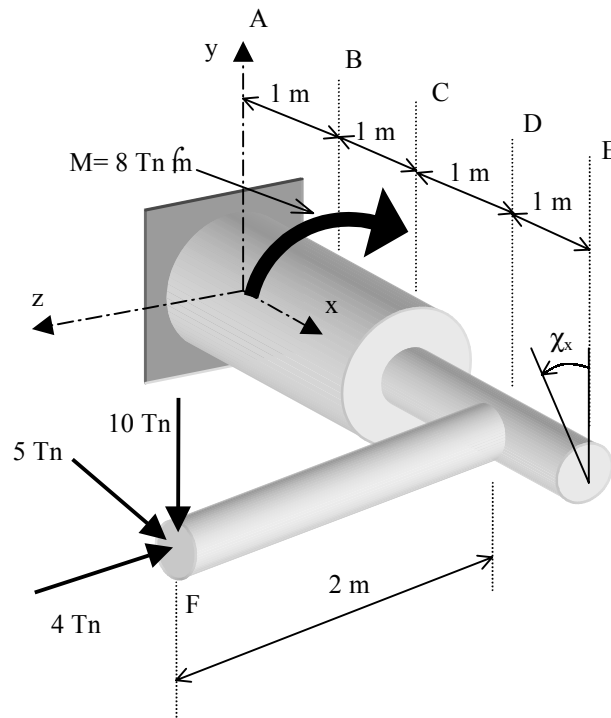


$$T = \sqrt{T_z^2 + 2 T_y^2} = \sqrt{128^2 + 2 \cdot 922^2} = 930,8 \text{ kp}$$

$$\vartheta_{max} = \frac{4 T}{3 A} = \frac{4 \cdot 930,8}{3 \cdot \frac{\pi \cdot 15^2}{4}} = 7,0 \text{ kp/cm}^2$$

Problema 7.5

Hallar las tensiones máximas en el empotramiento A y el giro, alrededor del eje x, de la sección E. El momento torsor de 8 Tn f̄m está aplicado en la sección B.



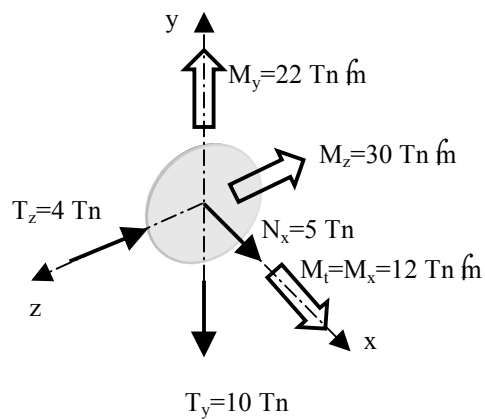
Tramo AC: ∴ = 40 cm
 Tramo CE: ∴ = 10 cm
 Tramo DF: ∴ = 10 cm
 Material: acero
 $G = 8,4 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2$

Resolución:

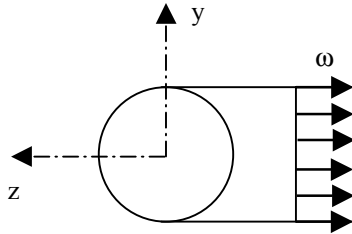
a) Tensiones máximas en el empotramiento A

Sección A

- $N_x \mid 25 \text{ Tn}$
- $T_y \mid 410 \text{ Tn}$
- $T_z \mid 44 \text{ Tn}$
- $M_x \mid 48 \cdot 2 \cdot 10 \text{ f̄m} \mid 12 \text{ Tn f̄m}$
- $M_y \mid 4 \cdot \beta \cdot 2 \cdot 5 \text{ f̄m} \mid 22 \text{ Tn f̄m}$
- $M_z \mid 410 \text{ f̄m} \mid 430 \text{ Tn f̄m}$

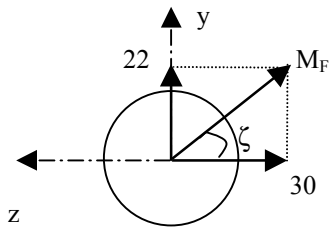


Tensión normal debida al esfuerzo axial:



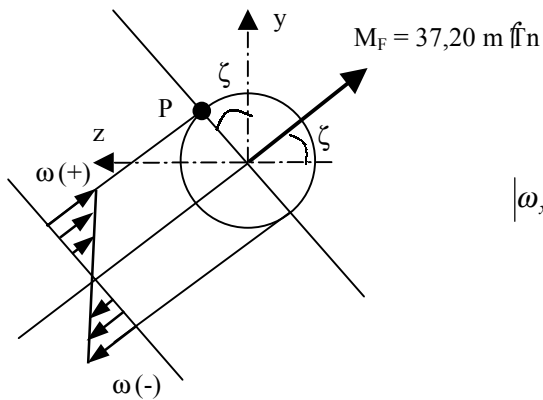
$$\omega_x \mid \frac{5000}{\frac{\phi \cdot 40^2}{4}} \mid 3,97 \text{ kp/cm}^2$$

Tensión normal debida a los momentos flectores:



$$M_F \mid \sqrt{22^2 + 30^2} \mid 37,20 \text{ Tn } \cdot \text{m}$$

$$\zeta \mid \arctan \frac{22}{30} \mid 36,25^\circ$$

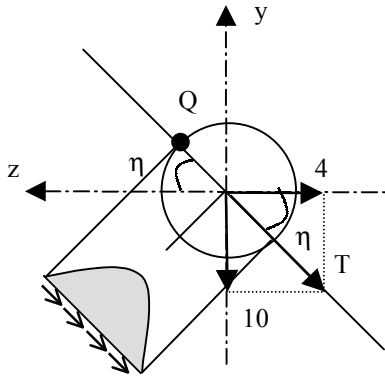


$$|\omega_{x \max}| \mid \frac{M}{I} y_{\max} \mid \frac{3720000}{\frac{\phi \cdot 40^4}{64}} \cdot 20 \mid 592 \text{ kp/cm}^2$$

Tensión normal máxima total:

$$\omega_{\max} \mid 592 + 3,97 \mid 596 \text{ kp/cm}^2$$

Tensión tangencial debida a los esfuerzos cortantes:



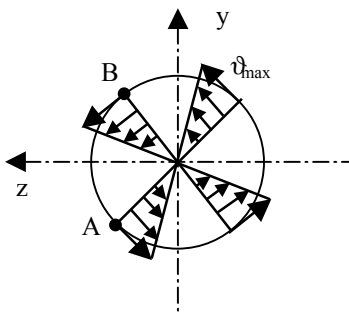
$$T \mid \sqrt{4^2 \cdot 2 \cdot 10^2} \mid 10,77 \text{ Tn}$$

$$\eta \mid \arctan \frac{10}{4} \mid 68,2^\circ$$

Distribución parabólica de ϑ con una ϑ_{\max}

$$\vartheta_{\max} \mid \frac{4 T}{3 A} \mid \frac{4 \cdot 10770}{3 \cdot \frac{\phi \cdot 40^2}{4}} \mid 11,43 \text{ kp/cm}^2$$

Tensión tangencial debida al momento torsor



$$\vartheta_{\max} \mid \frac{M_x \cdot r_{\max}}{I_o} \mid \frac{1200000 \cdot 20}{\frac{\phi \cdot 40^4}{32}} \mid 95,49 \text{ kp/cm}^2$$

La tensión tangencial máxima total

$$\vartheta_{\max} \mid \vartheta_A \mid 11,43 + 95,49 \mid 106,92 \text{ kp/cm}^2$$

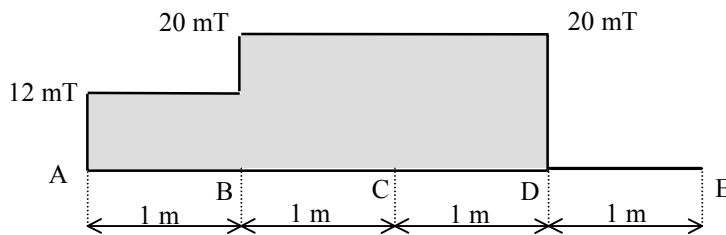
Aplicación del criterio de Von Mises en el punto P

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} / N, M \mid 596 \text{ kp/cm}^2 \\ \vartheta / M_x, T \mid 95,49 \text{ kp/cm}^2 \quad (1) \end{array} \right\} \omega_{\text{equiv}} \mid \sqrt{\sigma^2 + 3\vartheta^2} \mid 618,5 \text{ kp/cm}^2$$

(1) En el punto P la tensión cortante debida al esfuerzo cortante T no es exactamente 0, pues es 0 en el punto Q, pero Q y P no coinciden, ya que los ángulos ζ y η no son complementarios. Pero como están muy próximos, y por tanto ϑ debido a T será muy pequeño, puede despreciarse frente a la ϑ debida a M_x .

b) Giro de la sección C (alrededor del eje x)

Dibujamos el diagrama de momentos torsores



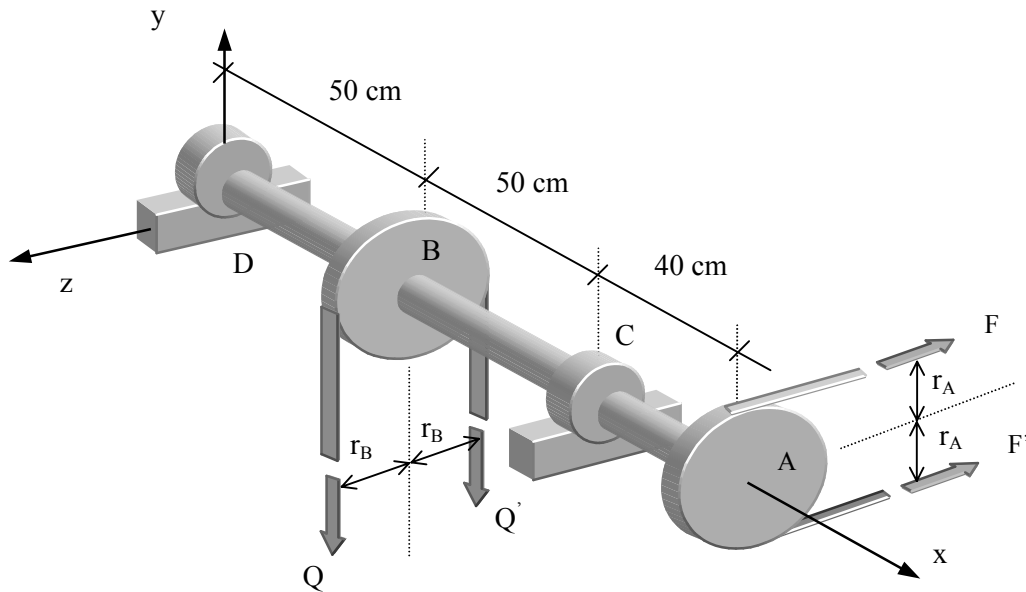
El giro alrededor del eje x en la sección E será el mismo que el de la sección D.

$$\chi_x = \int \frac{M_x}{GI_o} dx = \frac{12 \text{ mT} \int 1 \text{ m}}{GI_{\dots 40}} + \frac{20 \text{ mT} \int 1 \text{ m}}{GI_{\dots 40}} + \frac{20 \text{ mT} \int 1 \text{ m}}{GI_{\dots 10}}$$

$$\chi_x = \frac{1200000 \int 100}{840000 \phi \cdot 40^4} + \frac{2000000 \int 100}{840000 \phi \cdot 40^4} + \frac{2000000 \int 100}{840000 \phi \cdot 10^4} = 0,244 \text{ rad} = 13,98^\circ$$

Problema 7.6

Un árbol, de acero, debe de transmitir 120 CV a 600rpm desde la polea A a la B. La tensión cortante admisible para el material del árbol es $\tau_{adm} = 420 \text{ Kg/cm}^2$ y la tensión normal admisible es $\sigma_{adm} = 728 \text{ kp/cm}^2$. Calcular el diámetro del árbol. Datos: $F=2 \cdot F'$, $Q=2 \cdot Q'$, $r_A=15 \text{ cm}$, $r_B=22 \text{ cm}$. (radios de las poleas).

**Resolución:**

$$P \mid M_x \mid \omega \downarrow \quad M_x \mid \frac{P}{\omega} \quad \left[\begin{array}{l} 1 \text{ CV} \mid 736 \text{ W} \\ 1 \text{ rpm} \mid \frac{2\phi}{60} \text{ rad/s} \end{array} \right] \quad M_x \mid \frac{120 \cdot 7360}{600 \cdot \frac{2\phi}{60}} \mid 1405 \text{ Nm}$$

$$M_x \mid 1405 \text{ Nm} \mid 14324 \text{ cmKg}$$

$$M_x = F \cdot r_A - F' \cdot r_A = (2F' - F') \cdot r_A = F' \cdot r_A$$

$$F' \mid 5 \mid 14324 \text{ cmKg} \quad \Downarrow \quad F' \mid \frac{14324}{15} \mid 955 \text{ Kg}$$

$$F \mid 2F' \mid 1910 \text{ Kg}$$

también

$$M_x = Q \cdot r_B - Q' \cdot r_B$$

$$Q \mid 22 \mid 14324 \text{ cmKg} \quad \Downarrow \quad Q \mid \frac{14324}{12} \mid 1193,7 \text{ Kg}$$

$$Q \mid 2 \mid 1193,7 \mid 2387,4 \text{ Kg}$$

Diagrama de momentos en el plano xy :

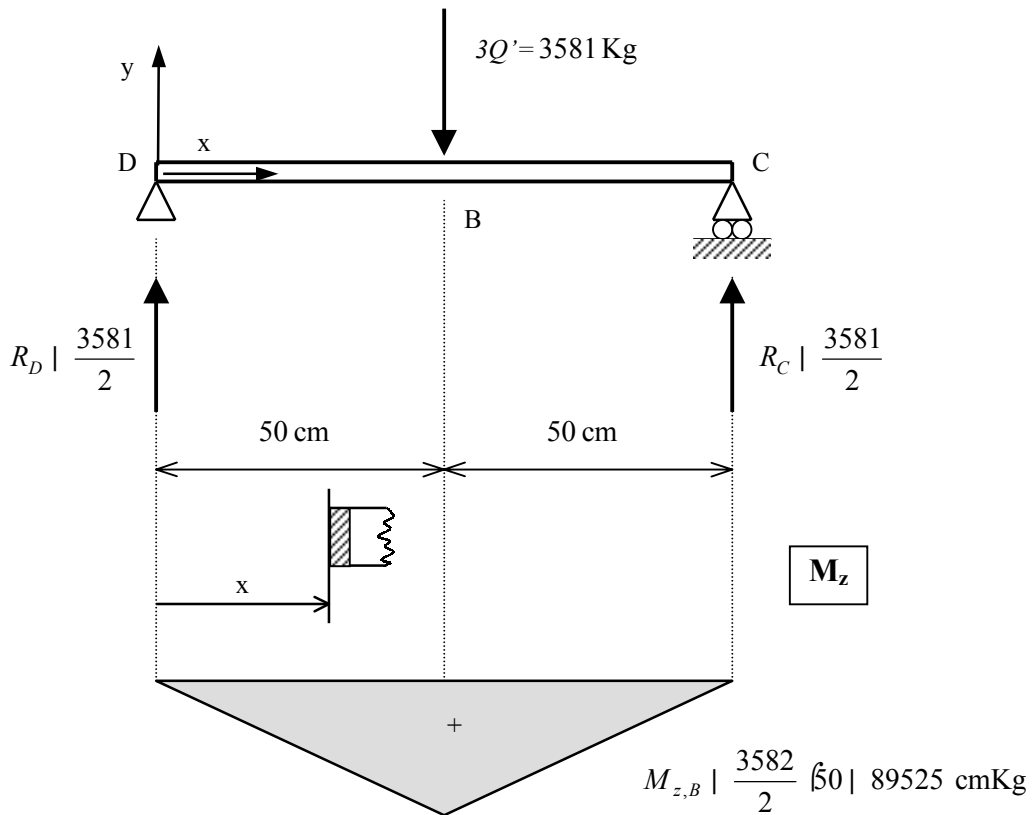
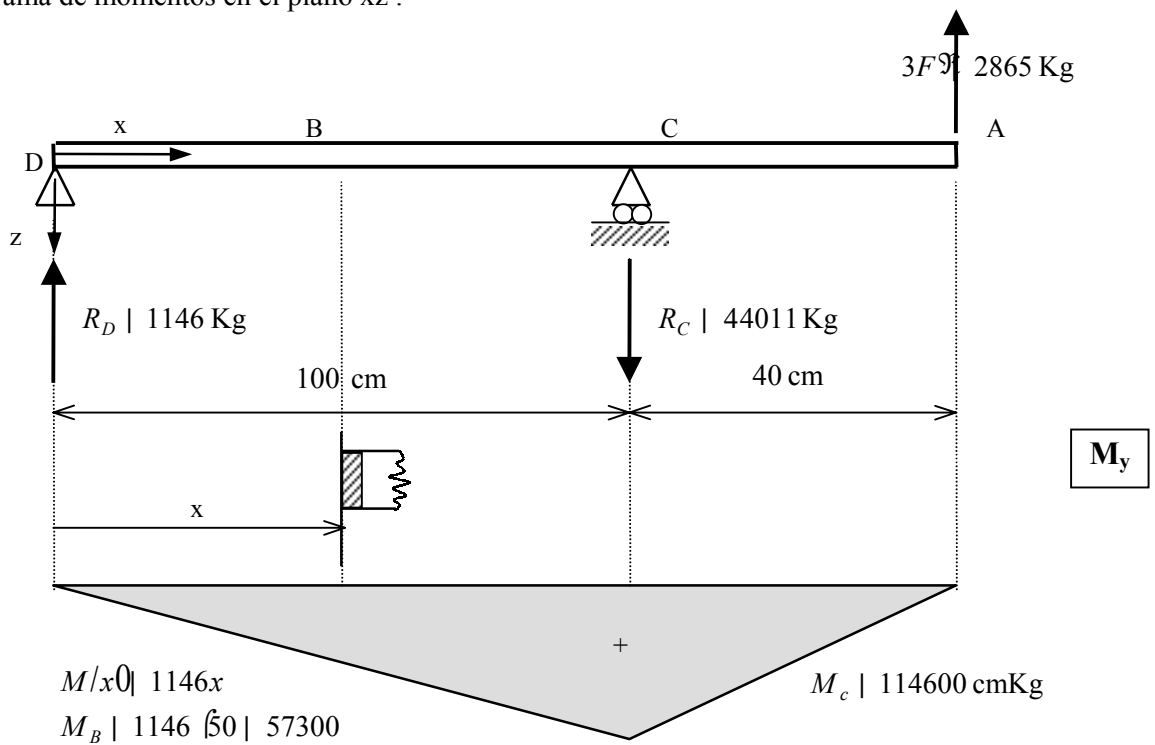


Diagrama de momentos en el plano xz :



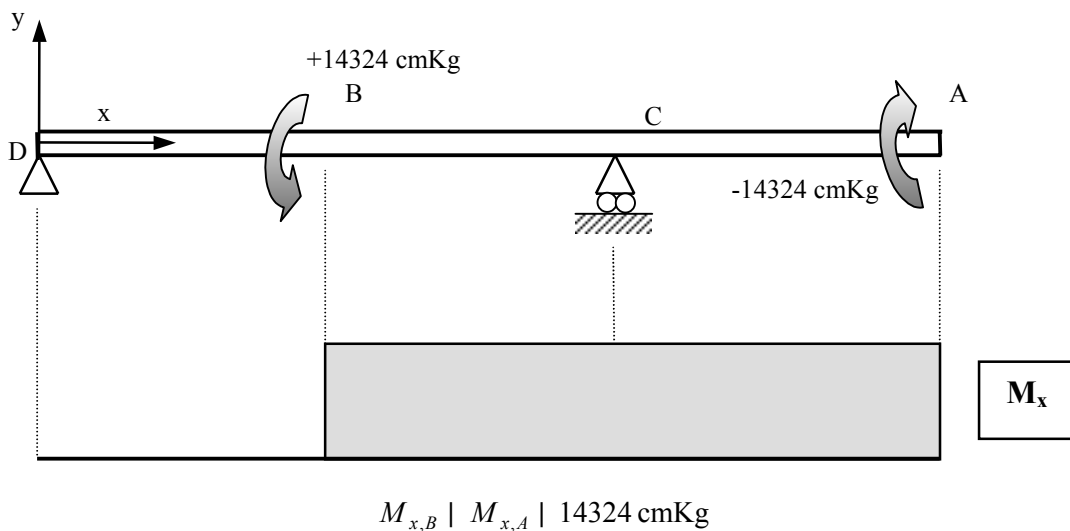
$$\begin{aligned}
 R_C &= 2 R_D = 2 \cdot 2865 = 5730 \\
 R_D &= 2865 \\
 R_D &= \frac{40 \cdot 2865}{100} = 1146 \text{ Kg} \\
 R_C &= 42865 + 4 \cdot 1146 = 44011 \text{ Kg}
 \end{aligned}$$

Determinación del momento flector en B (combinando M_z y M_y):

$$M_B = \sqrt{895250^2 + 573000^2} = 106292,12 \text{ cmKg}$$

El máximo está en C: $M_f = 114600 \text{ cmKg}$

Diagrama de momentos torsores:



Determinación del diámetro mínimo del eje.

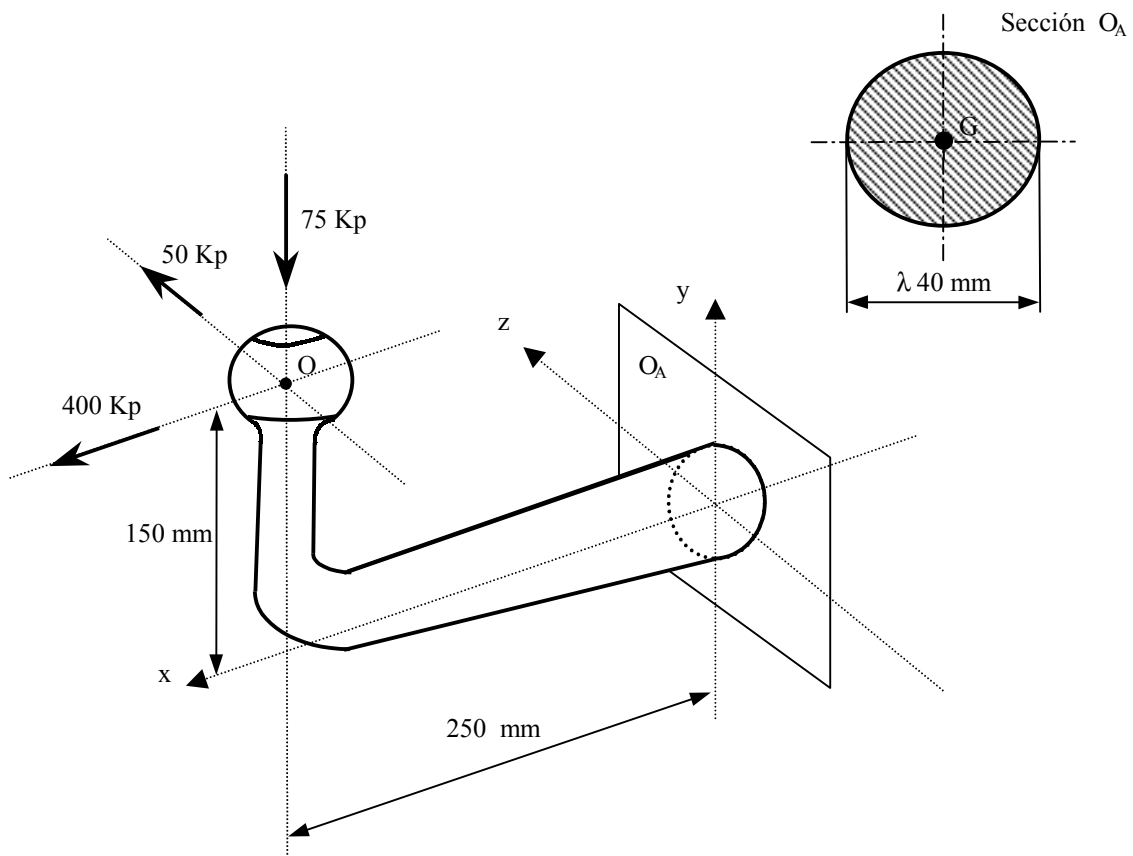
Aplicando el criterio de Von Mises:

$$\begin{aligned}
 d_{min}^3 &= \frac{16}{\phi \cdot \sigma_{adm}} \sqrt{4M_f^2 + 3M_x^2} \\
 d_{min}^3 &= \frac{16}{\phi \cdot 728} \sqrt{4 \cdot 114600^2 + 3 \cdot 14324^2} \\
 d_{min} &= 11.7 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Problema 7.7

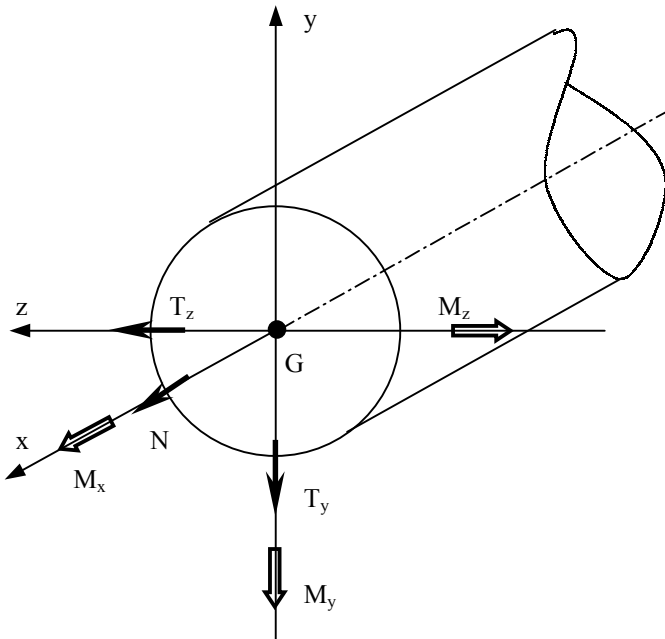
En la figura se ha esquematizado la pieza desmontable de un enganche tipo cuello de cisne para el arrastre de caravanas de camping por parte de vehículos de turismo convencionales. La sollicitación sobre la bola corresponde a una hipótesis de carga de arrastre con fuerte pendiente.

- Determinar para la sección circular O_A los esfuerzos de sección: normal, cortante, flector y torsor.
- Dibujar para la misma sección O_A la distribución de tensiones normal y tangencial que provoca independientemente cada esfuerzo de sección. Indicar sobre el dibujo la posición de las tensiones máximas para cada una de dichas distribuciones y calcular numéricamente sus valores.
- Como resumen del estudio, indicar la tensión normal máxima total y la tensión tangencial máxima total.



Resolución:

a) Esfuerzos de sección



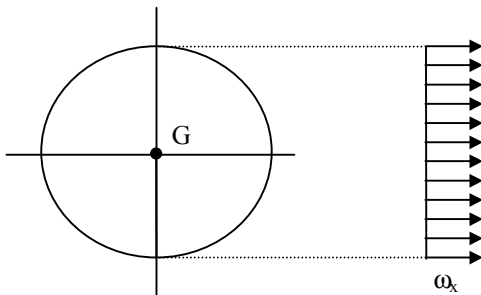
$$\begin{cases} N \mid 400 \text{ Kp} \\ T_y \mid 475 \text{ Kp} \\ T_z \mid 50 \text{ Kp} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_x \mid 50 \text{ (} \int 50 \text{)} \mid 7500 \text{ mmKp} \\ M_y \mid 450 \text{ (} \int 250 \text{)} \mid 412500 \text{ mmKp} \\ M_z \mid 4400 \text{ (} \int 50 \text{ } 4 \text{ } 75 \text{ (} \int 250 \text{)} \mid 478750 \text{ mmKp} \end{cases}$$

Nota: El signo del valor numérico y el sentido del vector en el dibujo son redundantes.

b) Determinación de las tensiones

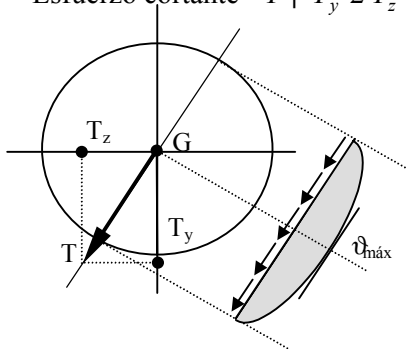
∉ Esfuerzo normal $N \mid 400 \text{ Kp}$



Distribución uniforme de tensiones ω_x :

$$\omega_{x,\text{máx}} \mid \frac{N}{A} \mid \frac{400 \text{ Kp}}{\phi \frac{40^2}{4}} \mid 0,32 \text{ Kp/mm}^2$$

∉ Esfuerzo cortante $\vec{T} \mid \vec{T}_y \ 2 \ \vec{T}_z$

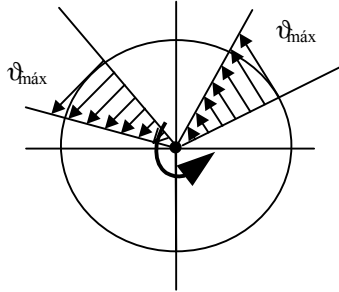


$$T \mid \sqrt{T_y^2 + 2 T_z^2} \mid \sqrt{75^2 + 2 \cdot 50^2} \mid 90 \text{ Kp}$$

Distribución parabólica de ϑ

$$\vartheta_{\text{máx}} \mid \frac{4 T}{3 A} \mid \frac{4}{3} \frac{90}{\phi \frac{40^2}{4}} \mid 0,1 \text{ Kp/mm}^2$$

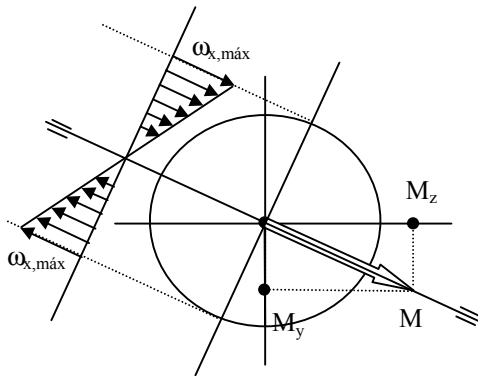
∉ Momento torsor $M_x \mid 7500 \text{ mmKp}$



Distribución de tensión ϑ con una ley lineal radial:

$$\vartheta_{\text{máx}} \mid \frac{M_x r_{\text{máx}}}{I_0} \mid \frac{7500 (20)}{\phi \frac{40^4}{32}} \mid 0,6 \text{ Kp/mm}^2$$

∉ Momento flector $\vec{M} \mid \vec{M}_y \ 2 \ \vec{M}_z$



$$M \mid \sqrt{M_y^2 + 2 M_z^2} \mid \sqrt{12500^2 + 2 \cdot 78750^2} \mid 79737 \text{ mmKp}$$

Distribución lineal de tensión ω_x respecto al eje de giro:

$$\omega_{x,\text{máx}} \mid \frac{M (y_{\text{máx}})}{I} \mid \frac{79737 \left(\frac{40}{2}\right)}{\phi \frac{40^4}{64}} \mid 12,69 \text{ Kp/mm}^2$$

c) La tensión normal máxima total vale:

$$\omega_{x,\text{máx}} \mid 0,32 + 12,69 \mid 13,01 \text{ Kp/mm}^2$$

La tensión tangencial máxima total vale:

$$\vartheta_{\text{máx}} \mid 0,6 + 0,1 \mid 0,7 \text{ Kp/mm}^2$$

Problema 7.8

Un tubo de acero $\lambda 200$ mm y de bajo espesor, e , constituye el soporte para el arrollamiento motorizado de una persiana según muestra la figura adjunta.

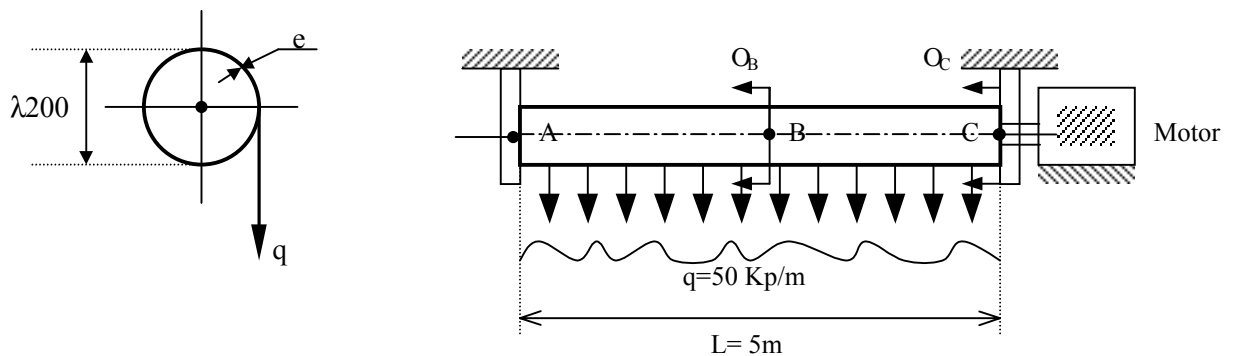
El peso propio de la persiana y el rozamiento de arrastre equivalen a una carga de $q = 50$ Kp/m, la cual se aplica excéntricamente respecto de la directriz del tubo. La luz efectiva es $L = 5$ m, y se supone simplemente apoyado en A y C.

- Representar gráficamente los diagramas de esfuerzos y calcular sus valores máximos.
- Determinar el espesor mínimo del tubo para que se cumplan los siguientes requisitos:
 - La tensión equivalente de von Mises en las secciones críticas O_A y O_B sea inferior a $\sigma_{adm} = 500$ Kp/cm².
 - El corrimiento vertical $t_B \leq \Omega 1/1000 L$.

NOTAS:

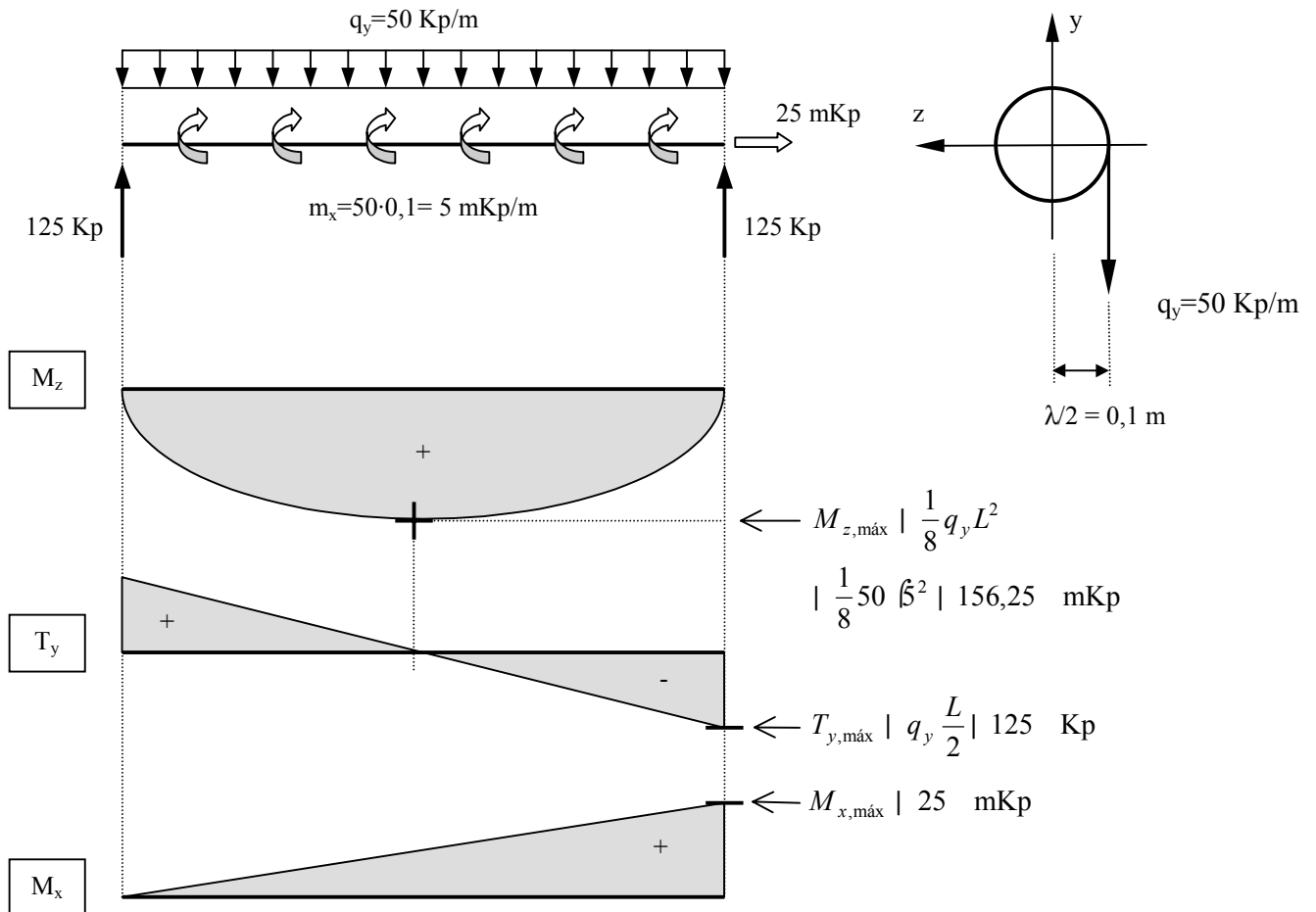
- Resolución suponiendo el peso propio del tubo incluido en q .
- Tubo de acero $E = 2100000$ Kp/cm².
- Valores aproximados para la sección tubular de bajo espesor:

$$I_0 = \frac{\phi e \lambda^3}{4} \quad I_z = \frac{\phi e \lambda^3}{8} \quad A = \phi e \lambda$$



Resolución:

a) Determinación de los diagramas de esfuerzos.



b) Características mecánicas de la sección.

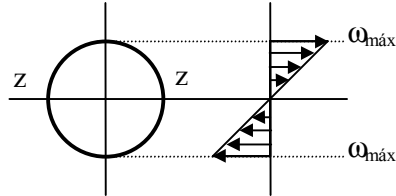
$$I_0 = \frac{\phi e \lambda_m^3}{4} \circ \frac{\phi e \lambda^3}{4} \quad \heartsuit \quad W_0 = \frac{I_0}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\phi e \lambda^2}{2}$$

$$I_y = I_z = \frac{I_0}{2} = \frac{\phi e \lambda^3}{8} \quad \heartsuit \quad W_z = \frac{I_z}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\phi e \lambda^2}{4}$$

$$A = 2\phi \frac{\lambda}{2} e = \phi e \lambda$$

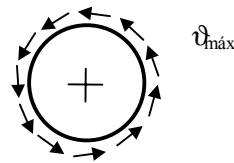
c) Comprobación de tensiones en la sección central O_B .

$$\begin{cases} M_z | 156,25 \text{ mKp} \\ \omega_{x,\text{máx}} | \frac{M_z}{W_z} \end{cases}$$



$$T_y | 0$$

$$\begin{cases} M_x | 12,5 \text{ mKp} \\ \vartheta_{\text{máx}} | \frac{M_x}{W_0} \end{cases}$$



Aplicando el criterio de falla de von Mises:

$$\omega_{equiv} | \sqrt{\omega_{x,\text{máx}}^2 + 2 \cdot 3 \vartheta_{\text{máx}}^2} \quad \Omega \quad 500 \text{ Kp/cm}^2$$

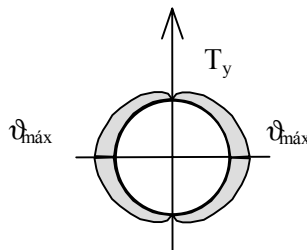
$$\omega_{equiv} | \sqrt{\left[\begin{array}{c} \text{R} \\ \text{C} \\ \text{C} \\ \text{C} \\ \text{C} \\ \text{TM} \end{array} \right] \frac{15625}{20^2} \cdot \frac{20^2}{4} }^2 + 2 \cdot 3 \left[\begin{array}{c} \text{R} \\ \text{C} \\ \text{C} \\ \text{C} \\ \text{C} \\ \text{TM} \end{array} \right] \frac{1250}{20^2} \cdot \frac{20^2}{2} } \quad \Omega 500 \text{ Kp/cm}^2$$

$$e | \frac{\sqrt{2474211,8}}{500} | 0,1 \text{ cm} \quad \heartsuit \quad e \varnothing 1 \text{ mm}$$

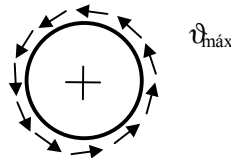
Comprobación de tensiones en la sección extrema O_C

$$M_z | 0$$

$$\begin{cases} T_y | 125 \text{ Kp} \\ \vartheta_{\text{máx}}^T | 2 \left(\frac{T_y}{A} \right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} M_x | 25 \text{ mKp} \\ \vartheta_{\text{máx}} | \frac{M_x}{W_0} \end{cases}$$



Apliendo el criterio de falla de von Mises:

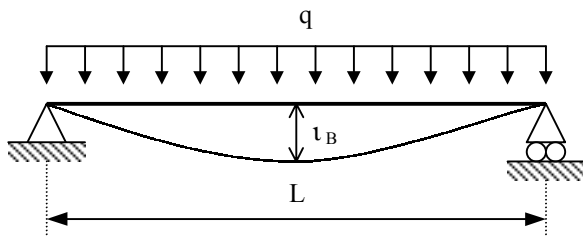
$$\omega_{equiv} \mid \sqrt{0,23 \left(\sigma_{m\acute{a}x}^T + 2 \sigma_{m\acute{a}x} \right) \sigma_{\theta}} \quad \Omega \quad 500 \quad \text{Kp/cm}^2$$

$$\omega_{equiv} \mid \sqrt{3 \left(\frac{\sigma_{\phi}}{\phi} \frac{125}{e} \frac{I_2}{I_0} \right)^2 + \frac{2500}{\phi^2 e^2} \frac{20^2}{2}} \quad \Omega 500 \quad \text{Kp/cm}^2$$

$$e \mid \frac{\sqrt{47,5 \cdot 2 \cdot 47,5}}{500} \mid 0,02 \quad \text{cm} \quad \heartsuit \quad e \approx 0,2 \quad \text{mm}$$

Con el espesor anterior de $e = 1 \text{ mm}$, las tensiones en la sección extrema O_c son de $\omega_{equiv} = 100 \text{ Kp/cm}^2$.

d) Comprobación del corrimiento vertical de la sección central $\iota_B \Omega L / 1000 = 5 \text{ mm}$.



$$\iota_B \mid \frac{5}{384} \frac{q L^4}{EI_z} \Omega 5 \quad \text{mm}$$

$$\iota_B \mid \frac{5}{384} \frac{\frac{5}{100} \text{ Kp/cm} \cdot /500 \text{ cm}^4}{2100000 \text{ Kp/cm}^2 \cdot \frac{\phi^2 e^2 I_2}{8}} \Omega 0,5 \text{ cm}$$

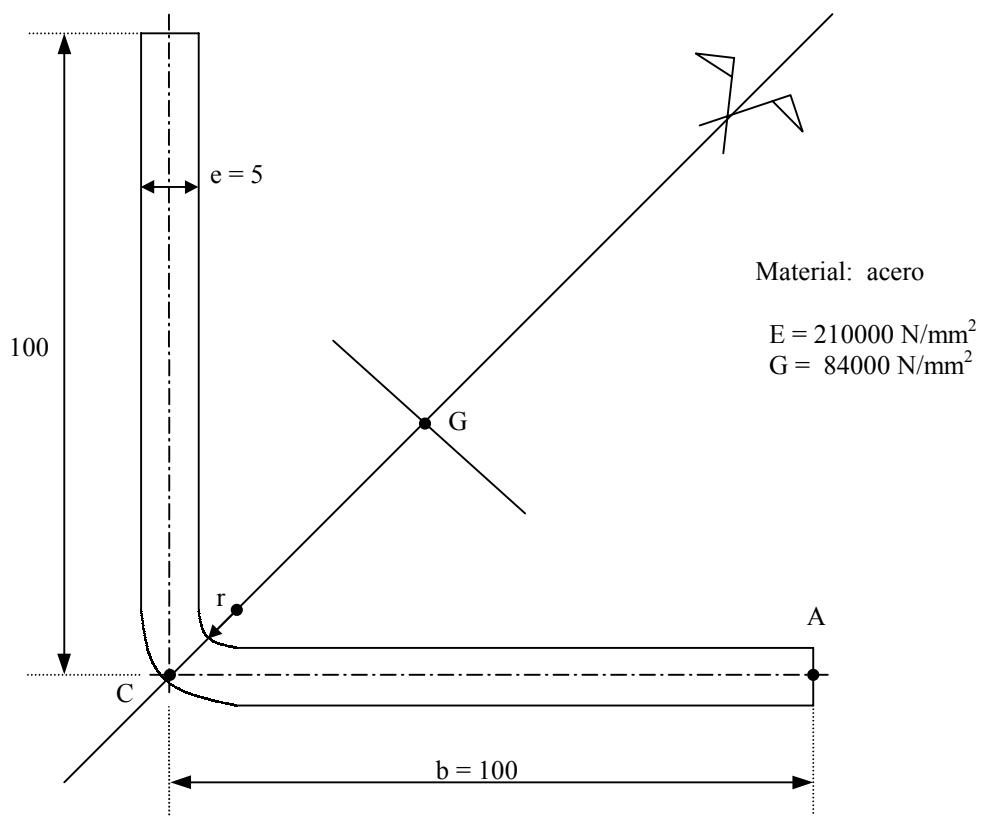
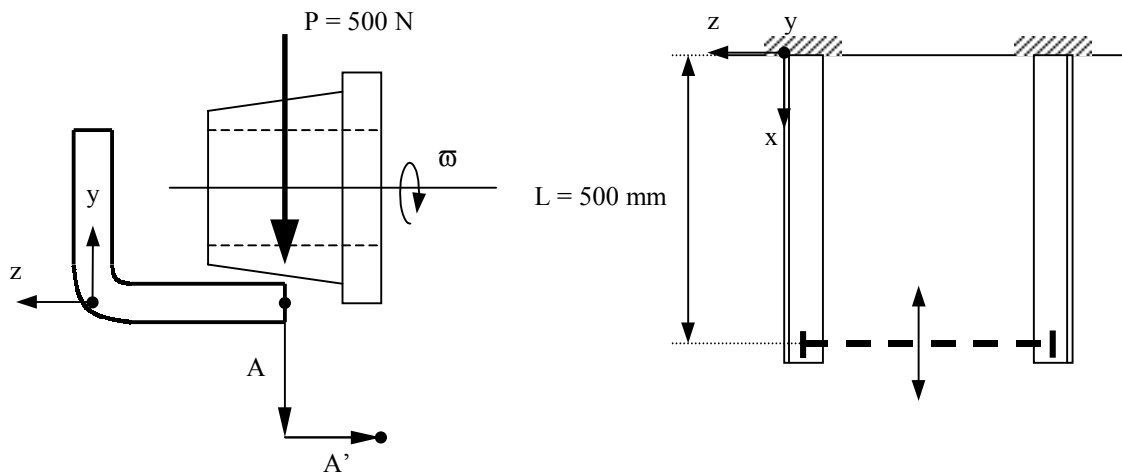
Despejando el espesor de la ecuación $e = 0,123 \text{ cm} \Downarrow 1,3 \text{ mm}$.

En conclusión, para verificar los requisitos de resistencia y deformación el espesor $e \approx 1,3 \text{ mm}$. Una solución comercial sería $\lambda 200 \times 1,5 \text{ mm}$.

Problema 7.9 *

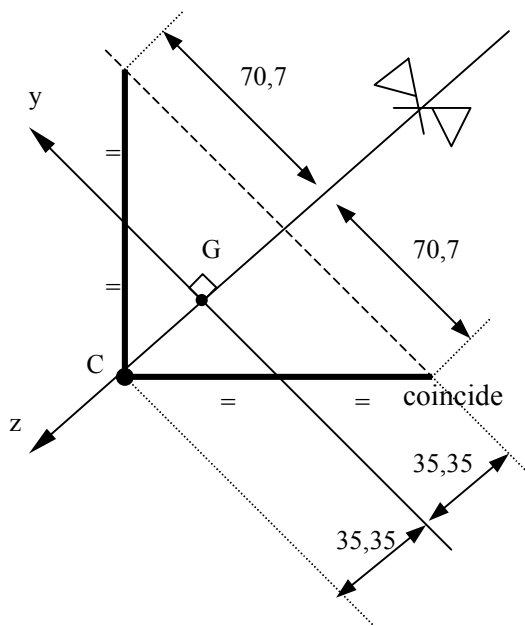
Un perfil angular de alas iguales es utilizado como carril de rodadura.

- Determinar las tensiones normales y tangenciales máximas en la sección del empotramiento.
- Determinar el movimiento del perfil, calculando el corrimiento total del punto A.
- Comentar el diseño y proponer mejoras.



Resolución:

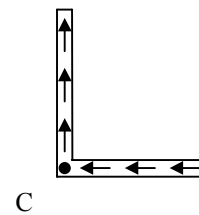
Por razones de simplicidad se trabaja con la curva media del perfil de espesor constante y acuerdo recto. (*)



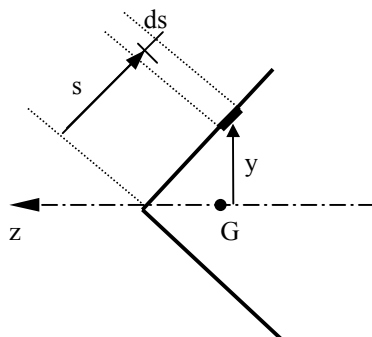
- El eje de simetría proporciona las direcciones principales centrales yy' y z'z'.
- El baricentro G cumple la condición:

$$0 = \int y \, dA \quad 0 = \int z \, dA$$

- El centro de cizalladura C (ó de torsión) coincide con el punto de encuentro de los elementos.



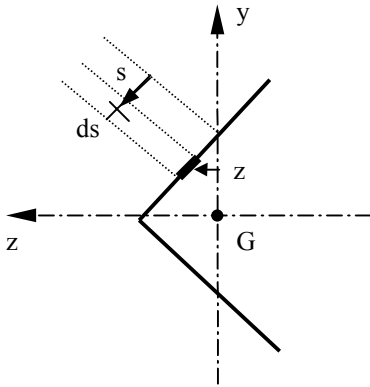
- Los momentos de inercia y módulos resistentes.



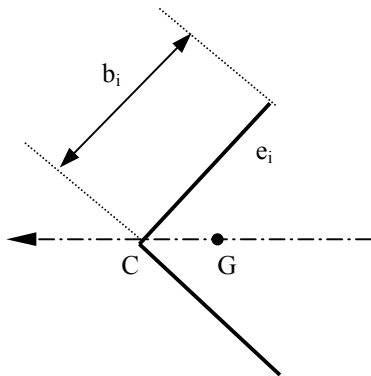
$$\left[I_z = \int y^2 \, dA = 2 \int_0^{\frac{b}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} s \right)^2 e \, ds = \frac{1}{3} b^3 e \right]$$

$$\left[W_z = \frac{I_z}{y_{\text{máx}}} = \frac{1666666 \, \text{mm}^4}{70,7 \, \text{mm}} = 23574 \, \text{mm}^3 \right]$$

(*) También, pueden obtenerse estas características de la tabla de perfiles del fabricante con mayor precisión (sin utilizar la simplificación inicial , v = 0).

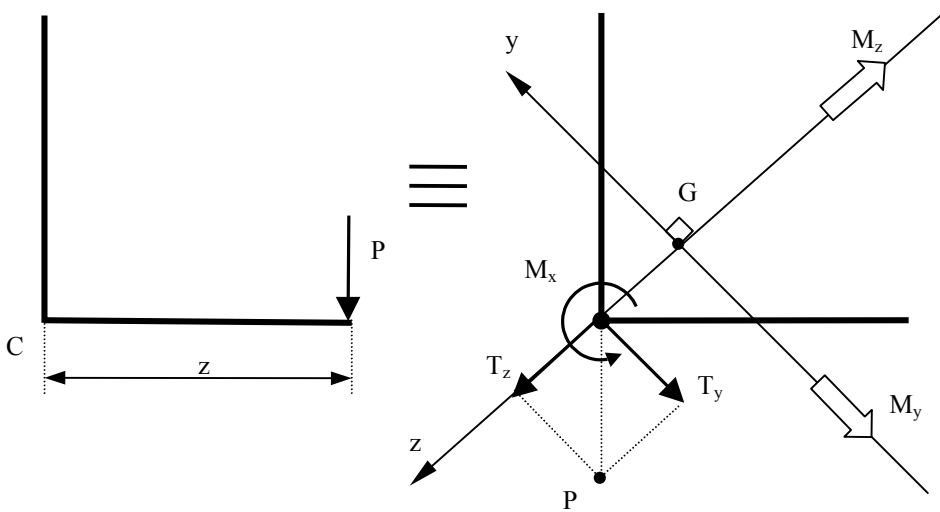


$$\left[\begin{aligned} I_y &= \int z^2 dA = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z \right)^2 e ds = \frac{1}{12} b^3 e \\ W_y &= \frac{I_y}{z_{\text{máx}}} = \frac{416666 \text{ mm}^4}{35,35 \text{ mm}} = 11786 \text{ mm}^3 \end{aligned} \right.$$



$$\left[I_t = \frac{1}{3} b_i e_i^3 + \frac{2}{3} b e^3 \right] = 8333 \text{ mm}^4$$

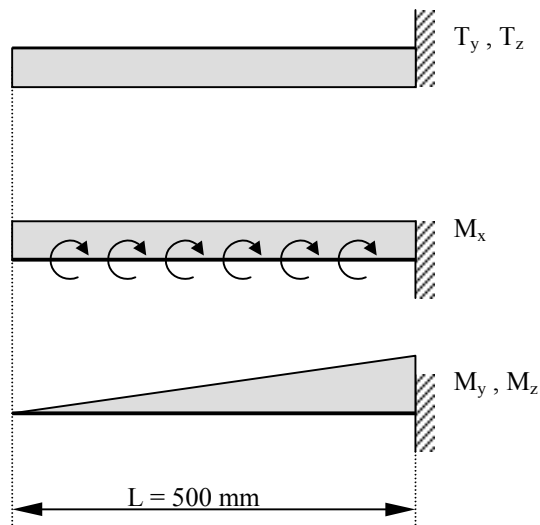
a)



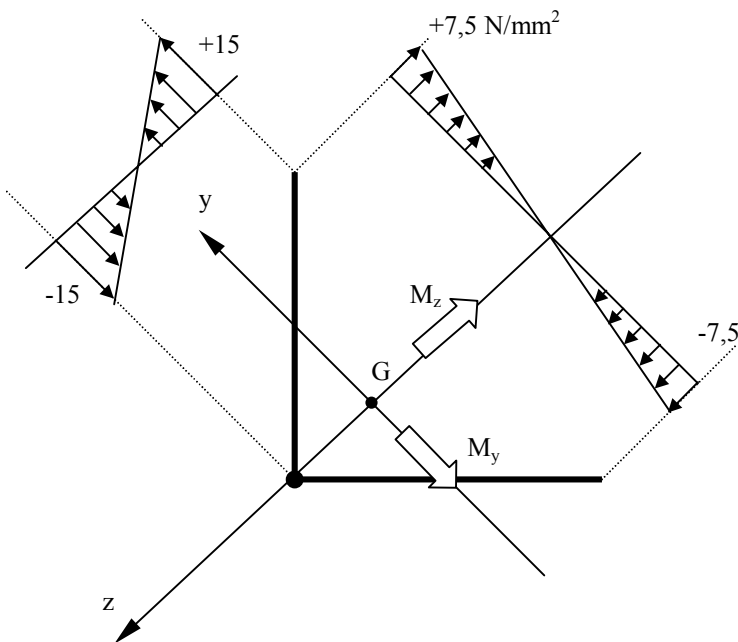
$$\begin{cases} T_y \\ T_z \end{cases} \left| 4P \frac{\sqrt{2}}{2} \right| 4353 \text{ N}$$

$$M_x \left| P \cdot b \right| 450000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\begin{cases} M_y / \text{máx} \\ M_z / \text{máx} \end{cases} \left| 4P \frac{\sqrt{2}}{2} L \right| 176777 \text{ N} \cdot \text{mm}$$



∉ Tensiones normales ω_x debidas a la flexión desviada M_y, M_z .



- Para M_y

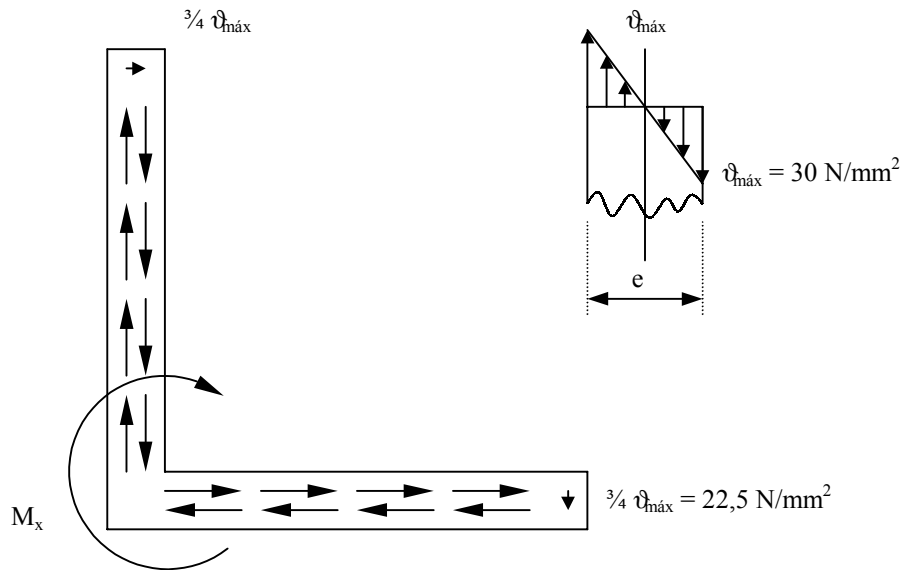
$$\omega_{\text{máx}} \left| \frac{M_y}{W_y} \right| \frac{176777 \text{ Nmm}}{11786 \text{ mm}^3} \left| 15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right.$$

- Para M_z

$$\omega_{\text{máx}} \left| \frac{M_z}{W_z} \right| \frac{176777 \text{ Nmm}}{23574 \text{ mm}^3} \left| 7,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right.$$

∉ Tensiones tangenciales debidas a la torsión uniforme o de Saint Venant (ya que $I_\omega = 0$ en este tipo de secciones).

$$M_x \left| \underbrace{GI_t \frac{d\chi_x}{dx}}_{\text{TORSIÓN UNIFORME}} \right. \quad 4 \quad \left. \underbrace{EI_\omega \frac{d^3\chi_x}{dx^3}}_{\text{TORSIÓN NO UNIFORME}} \right.$$



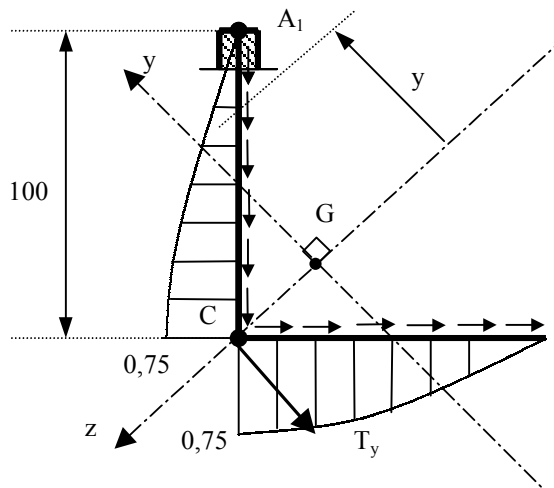
$$\left[\begin{aligned} \vartheta_{\text{máx}} & \left| \frac{M_x \cdot e_{\text{máx}}}{I_t} \right| \frac{50000 \text{ N} \cdot \text{mm} \cdot 5 \text{ mm}}{8333 \text{ mm}^4} \left| 30 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right. \\ \left. \frac{3}{4} \vartheta_{\text{máx}} \right| \frac{3}{4} \cdot 30 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \left| 22,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right. \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{d\chi_x}{dx} & \left| \frac{M_x}{GI_t} \right| \frac{50000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{84000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 8333 \text{ mm}^4} \left| 7,14 \cdot 10^{-45} \frac{\text{rad}}{\text{mm}} \right. \end{aligned} \right.$$

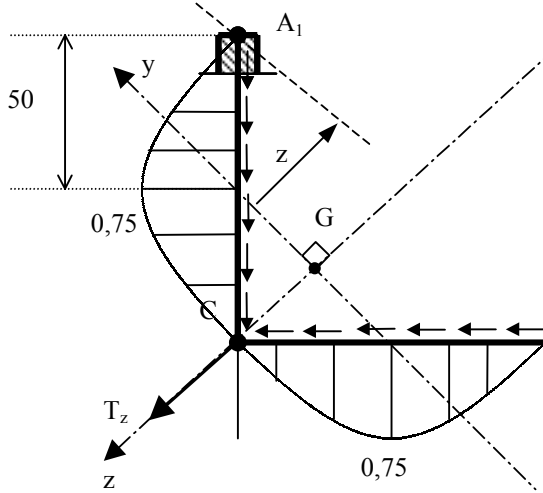
∄ Tensiones tangenciales debidas al cortante T_y, T_z .

Aplicamos superposición: $\vartheta_{\text{TOTAL}} = \vartheta + \vartheta'$

T_y :

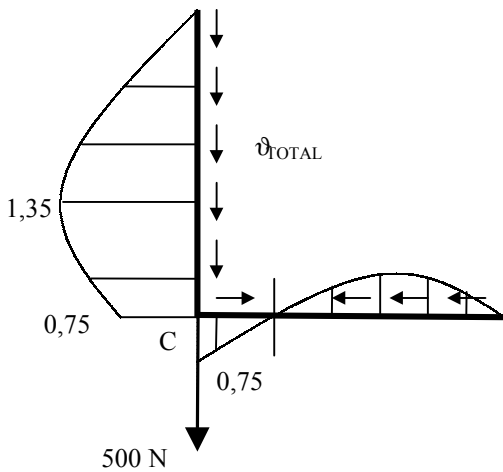


$$\left[\begin{aligned} \vartheta & \left| \frac{T_y \cdot \int m_z^2}{I_z \cdot e} \right. \quad \text{variable según } y \\ \text{Para } y & \left| 0, \vartheta_{\text{máx}} \cdot \right. \\ \vartheta_{\text{máx}} & \left| \frac{353 \text{ N} \cdot 100 \cdot 50 \cdot \left(\frac{100 \sqrt{2}}{2} \right)^3}{1666666 \text{ mm}^4 \cdot 5 \text{ mm}} \right| 0,75 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \text{ó directamente se demuestra que } & \left. \vartheta_{\text{máx}} \left| \frac{3}{4} \frac{P}{b \cdot e} \right. \right. \end{aligned} \right.$$



$T_z:$

$$\left[\begin{aligned} & \vartheta \propto \frac{T_z \int m_y^2}{I_y \ell} \quad \text{variable según } z \\ & \text{Para } z \mid 0, \vartheta_{\max} \\ & \vartheta_{\max} \mid \frac{353 \text{ N} \cdot 50 \cdot 50 \cdot \frac{50 \sqrt{2}}{2} \text{ mm}^3}{416666 \text{ mm}^4 \cdot 5 \text{ mm}} \mid 0,75 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ & \text{ó directamente se demuestra que } \vartheta_{\max} \frac{3}{4} \frac{P}{b \ell} \end{aligned} \right.$$

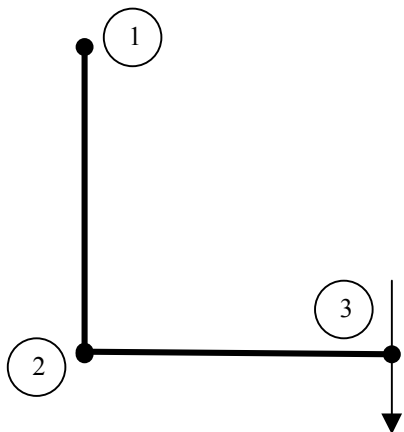


Se demuestra que

$$\left[\begin{aligned} \vartheta_{TOTAL \max} \mid & \frac{27}{20} \left(\frac{P}{b \ell} \right) \\ \mid & \frac{27}{20} \left(\frac{500 \text{ N}}{100 \cdot 5} \right) \mid 1,35 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned} \right.$$

Obsérvese que en el ala horizontal debe anularse la distribución de tensiones tangenciales, ya que solo tenemos fuerza vertical de 500 N.

Composición de tensiones:



Punto (1)

$$\left[\begin{aligned} \omega_x \mid & 215 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad 27,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (M_y \ M_z) \\ \vartheta \mid & 22,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (M_x) \end{aligned} \right.$$

Punto (2)

$$\left[\begin{array}{l} \omega_x \\ \vartheta \end{array} \right] \left| \begin{array}{l} 415 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ 30 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{array} \right. \quad (M_y)$$

$$\left[\begin{array}{l} \omega_x \\ \vartheta \end{array} \right] \left| \begin{array}{l} 215 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ 20,75 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{array} \right. \quad (M_x, T_y, T_z)$$

Punto (3)

$$\left[\begin{array}{l} \omega_x \\ \vartheta \end{array} \right] \left| \begin{array}{l} 215 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ 47,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{array} \right. \quad (M_y, M_z)$$

$$\left[\begin{array}{l} \omega_x \\ \vartheta \end{array} \right] \left| \begin{array}{l} 22,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \end{array} \right. \quad (M_x)$$

De los puntos estudiados, el (1) es el más desfavorable.

Aplicando Von Mises

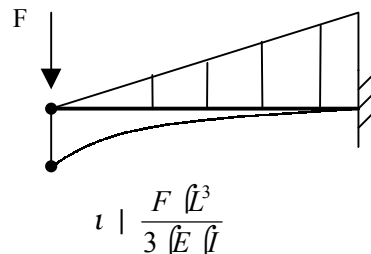
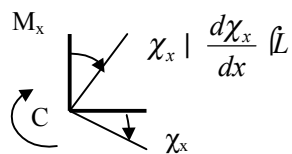
$$\omega_{equiv} \left| \sqrt{\omega_x^2 + 3\vartheta^2} \right| = \sqrt{22,5^2 + 3(22,5)^2} = 45 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Ante la duda que exista un punto con una combinación más desfavorable y dada la complejidad del problema, es posible tomar los valores máximos correspondientes a cada esfuerzo (aunque físicamente no estén en el mismo punto). Así

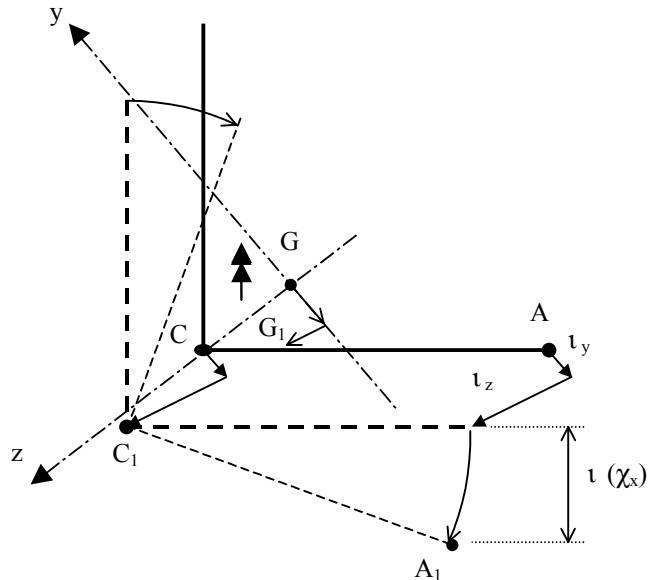
$$\omega_{equiv} \left| \sqrt{\omega_x^2 + 3\vartheta^2} \right| = \sqrt{(152,75)^2 + 3(302,135)^2} = 58,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Esta operativa está contemplada en diferentes normativas.

b)



Se desprecian los corrimientos debidos al esfuerzo cortante T_y, T_z .



Corrimiento según el eje y debido a la flexión M_z :

$$u_y \mid \frac{F L^3}{3 E I_z} \mid \frac{500 \frac{\sqrt{2}}{2} (500)^3}{3 (210000) (666666)} \mid 0,04 \text{ mm}$$

Corrimiento según el eje z debido a la flexión M_y :

$$u_z \mid \frac{F L^3}{3 E I_y} \mid \frac{500 \frac{\sqrt{2}}{2} (500)^3}{3 (210000) (416666)} \mid 0,17 \text{ mm}$$

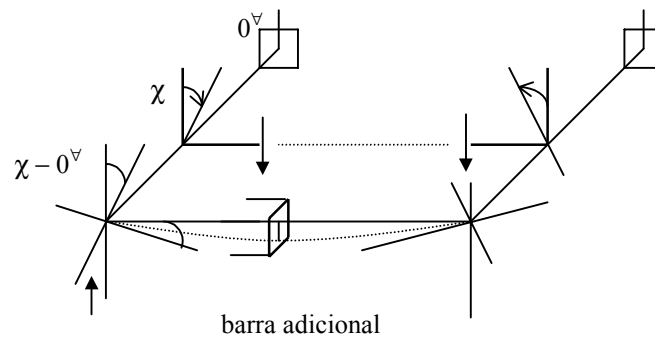
Amplificación del giro debido al torsor M_x :

$$u \mid \chi_x \mid 0,001 \mid \frac{M_x L}{G I_x} \mid 0,001 \mid 7,14 \cdot 10^4 \mid 500 \mid 0,001 \mid 3,57 \text{ mm}$$

d) Posibles modificaciones en el diseño.

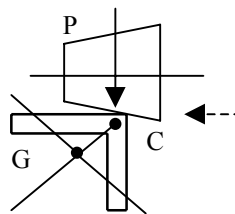
- 1) Cerrar los extremos de los voladizos.

La barra adicional trabaja a flexión y limita considerablemente el giro a torsión del extremo del angular. Sin embargo, para otra posición del carro se reproduce el problema.

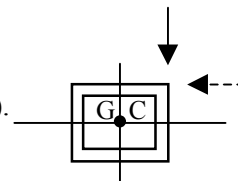


- 2) Cambiar la posición del angular.

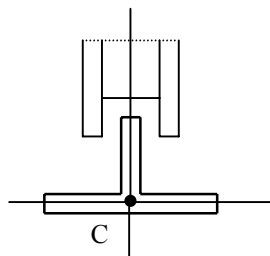
La carga vertical (y horizontal) se realiza en el centro de cizalladura.



- 3) Elegir otro perfil con mayor rigidez torsional (perfil cerrado).

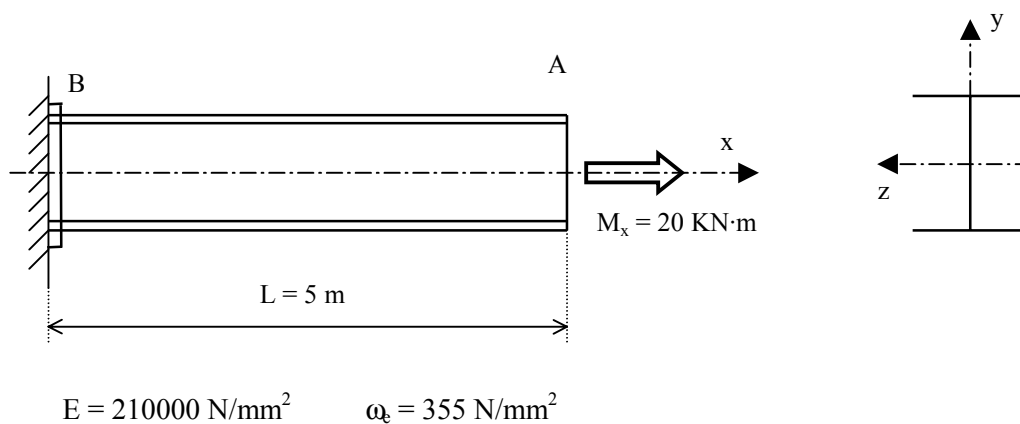


- 4) Elegir un perfil de guiado simétrico



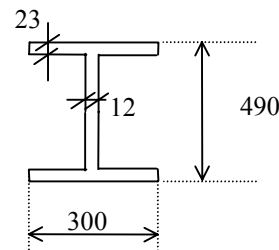
Problema 7.10 *

- a) Determinar las tensiones normales y tangenciales en el perfil HEA-500 sometido a torsión constante $M_x = 20 \text{ KN} \cdot \text{m}$ y con coacción total al alabeo en el extremo empotrado.
- b) Calcular el giro χ_x en la sección A.

**Resolución:**

Se trata de un problema de torsión no uniforme, ya que está impedido el alabeo en el empotramiento.
Ecuación diferencial de gobierno:

$$M_x = G I_t \frac{d\chi}{dx} - 4 E I_w \frac{d^3\chi}{dx^3}$$



donde :

Momento de inercia a torsión o constante de Saint Venant:

$$I_t = \frac{1}{3} (b_f t_f^3 + \frac{1}{3} (2 \cdot 300 \cdot 23^3 + 2 \cdot 467 \cdot 12^3)) = 270 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Módulo de alabeo o momento de inercia sectorial:

$$I_w = I_f \left(\frac{h^2}{2} \right) + \frac{1}{12} b^3 t \left(\frac{h^2}{2} \right) + \frac{1}{12} 300^3 \cdot 23 \left(\frac{467^2}{2} \right) = 5643 \cdot 10^9 \text{ mm}^6$$

El reparto del momento torsor total $M_x = M_{t1} + M_{t2}$ (para $L = \nabla$):

$$\left[\begin{array}{l} \text{Torsión uniforme} \quad M_{t1} \mid M_x / 14 e^{4\zeta x} \mid 0 \\ \text{Torsión no uniforme} \quad M_{t2} \mid M_x e^{4\zeta x} \end{array} \right.$$

$$\zeta \mid \sqrt{\frac{G \hat{I}_t}{E \hat{I}_w}} \mid \sqrt{\frac{80000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 309,3 \hat{I}_0^4 \text{ mm}^4}{210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 5,64 \hat{I}_0^{12} \text{ mm}^4}} \mid 4,57 \hat{I}_0^{44} \text{ mm}^4$$

El ángulo girado por unidad de longitud es variable:

$$\frac{d\chi_x}{dx} \mid \frac{M_x}{G \hat{I}_t} \mid 14 e^{4\zeta x} \mid 0 \mid \frac{M_{t1}}{G \hat{I}_t}$$

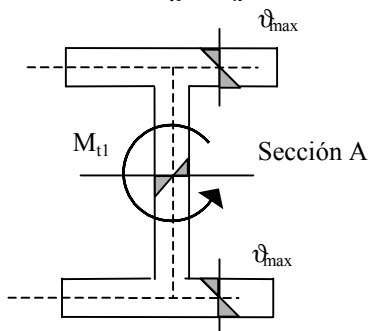
Para encontrar el ángulo de giro total en el extremo:

$$\chi_x \mid \int_0^L \frac{d\chi_x}{dx} dx \mid \int_0^L \frac{M_x}{G \hat{I}_t} \cdot 14 e^{4\zeta x} dx \mid \frac{M_x}{G \hat{I}_t} \left[\frac{1}{\zeta} e^{4\zeta x} \right]_0^L \mid \frac{M_x}{G \hat{I}_t} \left[\frac{1}{\zeta} e^{4\zeta L} - \frac{1}{\zeta} \right]$$

$$\mid \frac{20000 \hat{I}_0^3 \text{ Nmm}}{81000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 309,3 \hat{I}_0^4 \text{ mm}^4} \cdot 5000 \text{ mm} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4,57 \hat{I}_0^4} \cdot \frac{5000}{4,57 \hat{I}_0^4} \cdot 4 \mid$$

$$\chi_x \mid 0,44 \mid 0,17 \text{ rad} \mid 23^\circ \mid 410^\circ \mid 13^\circ \text{ (valor muy elevado)}$$

≠ Tensiones tangenciales debidas a la torsión uniforme o de Saint Venant en el extremo del voladizo $M_{t1} \circ M_x$.



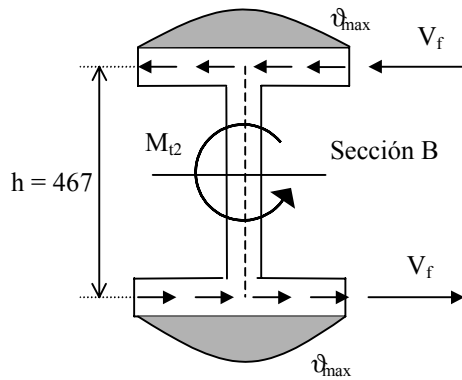
Alas:

$$\tau_{V_{max}} \mid \frac{M_{t1}}{I_t} \cdot e_{max} \mid \frac{20000 \hat{I}_0^3 \text{ Nmm}}{309,3 \hat{I}_0^4 \text{ mm}^4} \cdot 23 \text{ mm} \mid 149 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Alma:

$$\tau_{V_{max}} \mid \frac{M_{t1}}{I_t} \cdot e_{alma} \mid \frac{20000 \hat{I}_0^3 \text{ Nmm}}{309,3 \hat{I}_0^4 \text{ mm}^4} \cdot 2 \text{ mm} \mid 78 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

∉ En el empotramiento la torsión no uniforme provoca tensiones tangenciales ϑ_w y normales ω_w , donde $M_{t2} \circ M_x$:

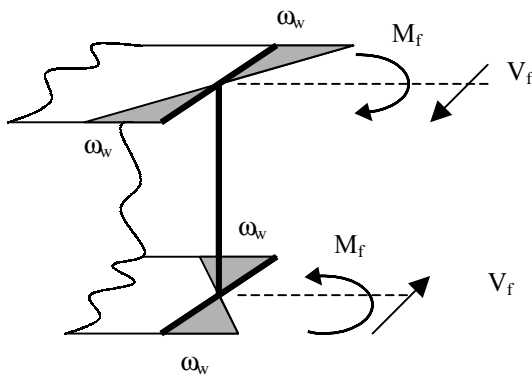


$$M_{t2} = V_f \cdot h \quad \Downarrow \quad V_f \mid \frac{20 \text{ KN } \overline{\text{fm}}}{0,467 \text{ m}} \mid 42,8 \text{ KN}$$

Por aplicación de Collignon en la sección rectangular del ala :

$$\vartheta_{w \max} \mid \frac{3 V_f}{2 A_f} \mid \frac{3 \cdot 42800 \text{ N}}{2 \cdot 300 \cdot 23} \mid 9,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$(\text{el valor exacto es } 9,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \mid \frac{3}{4} \frac{M_x}{e \left(\frac{b}{h}\right)^2})$$



Obsérvese el autoequilibrio de los esfuerzos en las alas, M_f , V_f , respecto a la sección global:

$$M_f \mid \frac{M_{t2}}{\zeta \overline{h}} \mid \frac{20000 \overline{\text{fm}}^3 \text{ N } \overline{\text{fm}}}{4,57 \overline{\text{fm}}^{44} \text{ mm}^{41} \overline{\text{fm}} \mid 467 \text{ mm}} \mid$$

$$\mid 93,7 \overline{\text{fm}}^6 \text{ N } \overline{\text{fm}} \mid 93,7 \text{ KN } \overline{\text{fm}}$$

valor superior al momento torsor aplicado

La tensión normal en la sección rectangular del ala por aplicación de Navier:

$$\omega_w \mid \frac{M_f \left(\frac{b}{2}\right)}{I_f} \mid \frac{93,6 \overline{\text{fm}}^6 \text{ Nmm} \left(\frac{300}{2} \text{ mm}\right)}{\frac{1}{12} \overline{\text{fm}} \text{ mm} \left(300 \text{ mm}\right)^3} \mid 272 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

(el valor exacto por aplicación de las fórmulas del bimomento es $\omega_w = 261 \text{ N/mm}^2$)

∉ Aplicación del criterio de Von Mises


Sección A: punto contorno del ala

$$\omega_{equiv} = \sqrt{\omega^2 + 2.3 \theta^2} = \sqrt{0 + 2.3 \theta^2} = \sqrt{3} \cdot 149 = 258 \frac{N}{mm^2} \quad \{ \omega_e$$

Sección B: punto extremo del ala ($\omega_{max}, \theta_w = 0$)

$$\omega_{equiv} = \sqrt{\omega^2 + 2.3 \theta^2} = \sqrt{\omega_w^2 + 2.3 \theta_w^2} = \sqrt{272^2 + 2.3 \cdot 0} = 272 \frac{N}{mm^2} \quad \{ \omega_e$$

Comentarios:

- La tensión equivalente es parecida en ambos casos.
- Si existe N, M_y , M_z , para secciones tipo  :

$$\omega_{max} = \frac{N}{A} + 2 \frac{M_y}{W_y} + 2 \frac{M_z}{W_z} + 2 \omega_w$$

Problema 7.11 *

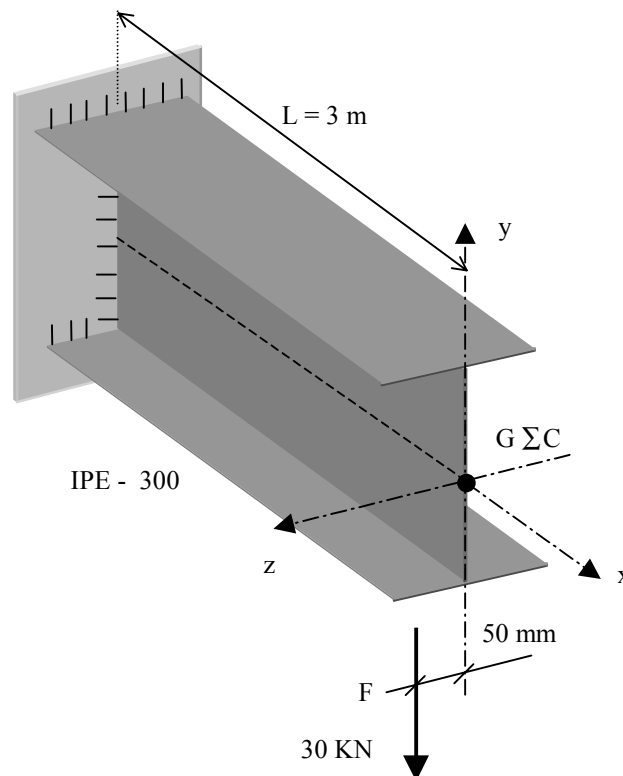
Una viga IPE-300 está sometida a una carga vertical $F = 30 \text{ KN}$ con una excentricidad accidental de 50 mm .

- Determinar, en la sección del empotramiento, la distribución de tensiones normales ω_x debidas a la flexión y a la torsión no uniforme (bimomento). Calcular el valor máximo.
- Determinar, en la sección del extremo del voladizo, la distribución de tensiones tangenciales debidas a la torsión no uniforme o de Saint Venant. Calcular el valor máximo.

Acero S 355
 $E = 210000 \text{ N/mm}^2$
 $G = 80000 \text{ N/mm}^2$
 $\omega_s = 355 \text{ N/mm}^2$

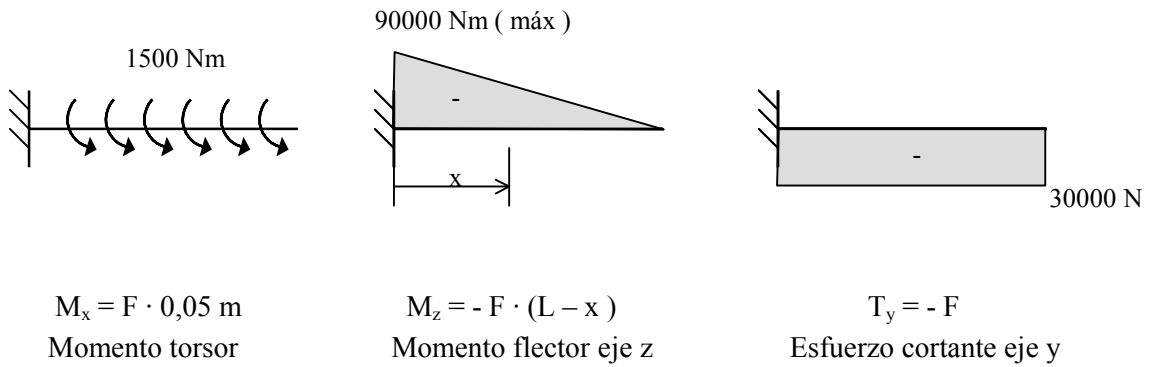
Notas:

- Se supone la viga arriostrada convenientemente para evitar el vuelco lateral.
- Puede utilizarse la tabla de la serie normalizada IPE para determinar las características mecánicas de la sección.



Resolución:

Diagramas de esfuerzos



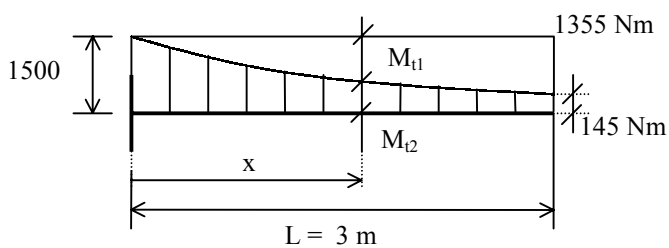
Características mecánicas sección IPE – 300.



Análisis de la torsión mixta

Ecuación general de gobierno de la torsión mixta:

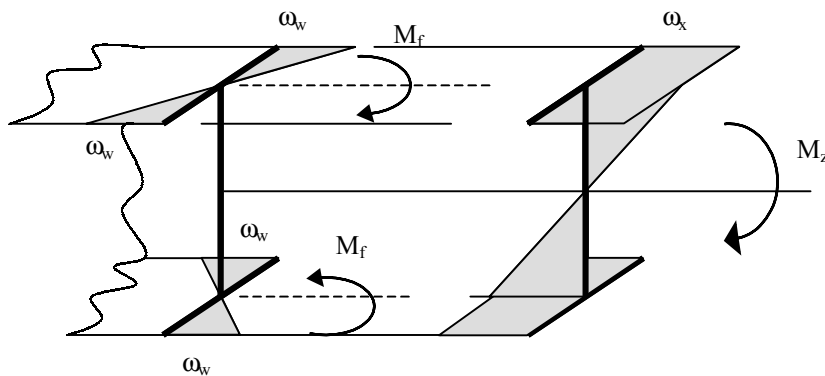
$$M_x \left| \underbrace{G \hat{I}_T \frac{d^2 \chi_x}{dx^2}}_{\text{Uniforme } M_{t1}} + 4 E \underbrace{\hat{I}_w \frac{d^3 \chi_x}{dx^3}}_{\text{No uniforme } M_{t2}} \right.$$



$$\left[\begin{array}{l} \text{Torsión uniforme: } M_{t1} | M_x / 14 e^{4\zeta x} | 0, \text{ para } x | L \quad M_{t1} | 1500 / 14 e^{40,78 \cdot 0} | 1355 \text{ N } \cdot \text{m} \\ \text{Torsión no uniforme: } M_{t2} | M_x | e^{4\zeta x} \quad , \text{ para } x | L \quad M_{t2} | 145 \text{ N } \cdot \text{m} \end{array} \right.$$

$$\zeta | \sqrt{\frac{G I_t}{E I_w}} | \sqrt{\frac{80000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} | 20,12 \text{ cm}^4}{210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} | 25,9 | 10^3 \text{ cm}^6}} | 7,8 | 10^{43} \text{ cm}^{41} | 0,78 \text{ m}^{41}$$

a) Tensiones normales máximas: $x = 0$



Debidas al bimomento M_f : $(I_f - I_y / 2)$

$$M_f | \frac{M_{t2}}{\zeta h} | \frac{1500 \text{ N } \cdot \text{m}}{0,78 \text{ m}^{41} | 0,289 \text{ m}} | 6654 \text{ N } \cdot \text{m}$$

$$\omega_w | \frac{M_f \frac{b}{2}}{I_f} | \frac{6654 | 10^3 \text{ Nmm } | 75 \text{ mm}}{\frac{6038000 \text{ mm}^4}{2}} | 165 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

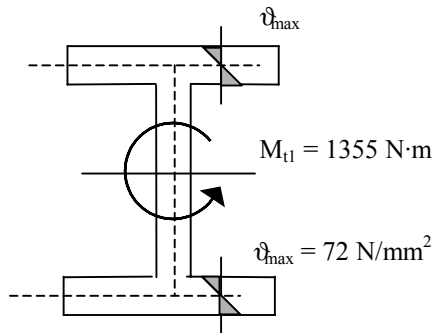
Debidas al momento flector M_z :

$$\omega_{x \max}(M_z) | \frac{M_z}{W_{elz}} | \frac{90000 | 10^3 \text{ N } \cdot \text{mm}}{557,1 | 10^3 \text{ mm}^3} | 162 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Así, la tensión normal máxima:

$$\sigma_{x_{max}} = \frac{M_z}{I_z} y_{max} = \frac{1652162}{327} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

b) Tensiones tangenciales debidas a la torsión uniforme en la sección $x = L$:



Alas superior e inferior:

$$\tau_{max} = \frac{M_{t1}}{I_t} e_{max}$$

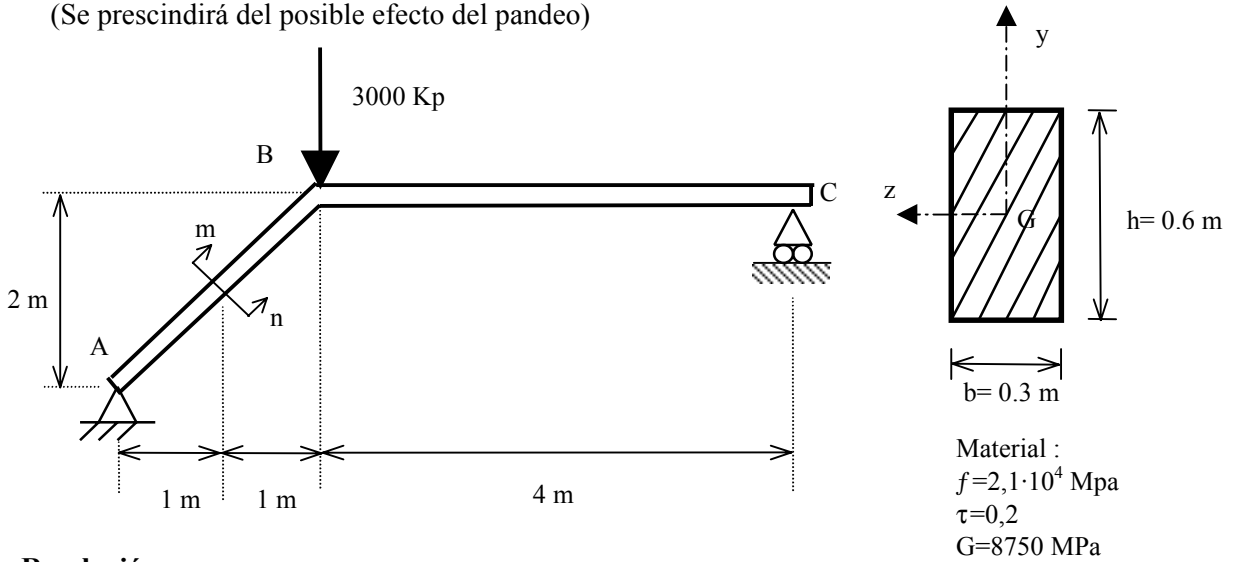
$$\tau_{max} = \frac{1355 \cdot 1000}{201200} \cdot 0.7 = 72 \text{ N/mm}^2$$

8 Corrimientos en piezas prismáticas

Problema 8.1

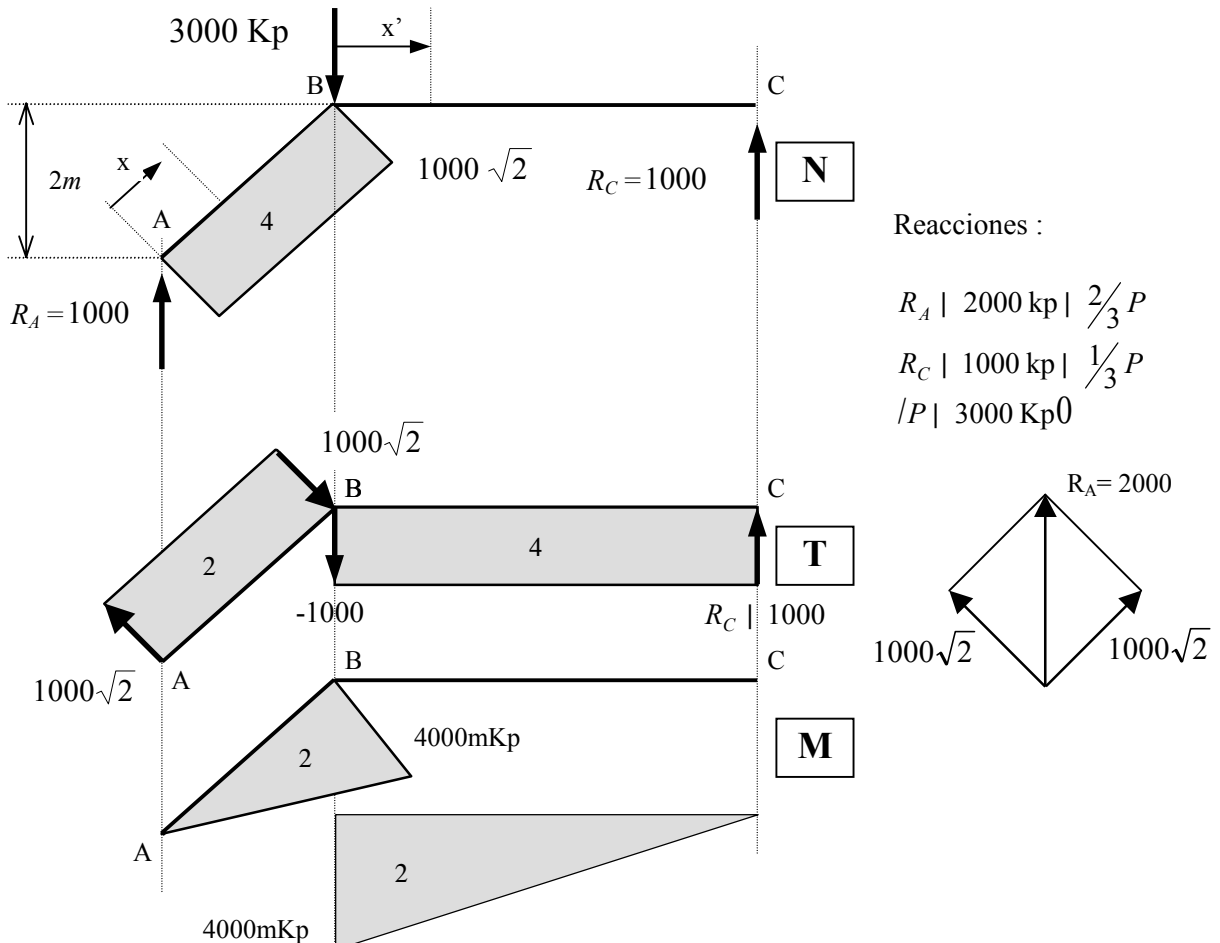
En la viga quebrada de la figura, sometida a las cargas que se indican, determinar:

- a) La distribución de tensiones en la sección mn.
- b) El corrimiento vertical en B, v_B .
(Se prescindirá del posible efecto del pandeo)



Resolución:

- a) Diagramas de esfuerzos



	N	T	M
Tramo AB	$4\ 1000\sqrt{2}$	$1000\sqrt{2}$	$1000\sqrt{2} \int x$
Tramo BC	0	-1000	$4000\ 4\ 1000 \int x^2$

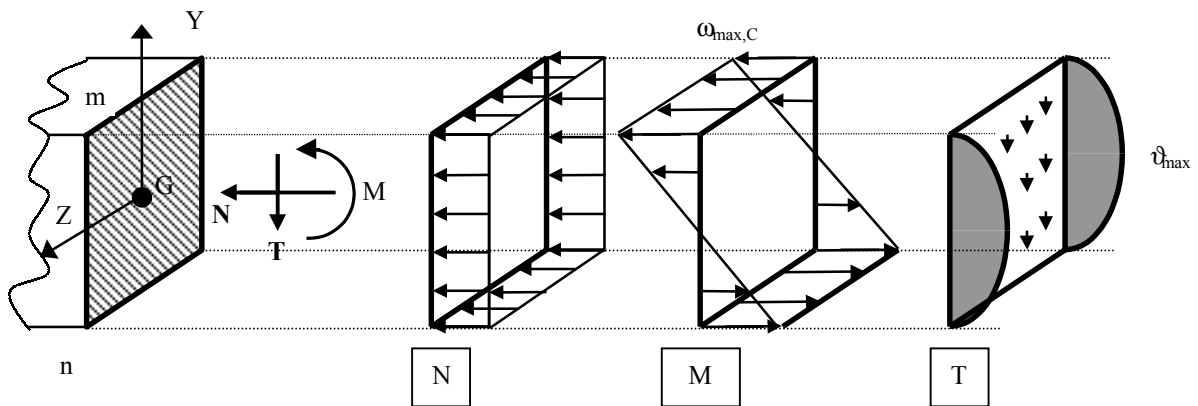
Esfuerzos en la sección mn:

$$N_{mn} \mid 4\ 1000\sqrt{2} \text{ Kp}$$

$$T_{mn} \mid 1000\sqrt{2} \text{ Kp}$$

$$M_{mn} \mid 2000 \text{ mKp}$$

Tensiones provocadas por cada esfuerzo, por separado:



$$\left. \begin{aligned} \omega_x \mid \frac{N}{A} \\ \omega_x \mid 4 \frac{1000\sqrt{2}}{1800} \mid 40,8 \text{ Kp/cm}^2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \omega_x \mid \frac{4 M}{I} y \\ \omega_x \mid \frac{4\ 2000 \int 100}{540000} y \\ |\omega_{x \max}| \mid 11,1 \text{ Kp/cm}^2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \vartheta_{xy} \mid \frac{3 T}{2 A} \left(4 \frac{y^2}{h^2} \right) \\ \vartheta_{xy} \mid \frac{3}{2} \frac{4\ 1000\sqrt{2}}{1800} \left(4 \frac{y^2}{60^2} \right) \\ \vartheta_{xy \max} \mid 41,2 \text{ Kp/cm}^2 \end{aligned} \right\}$$

$$A \mid 1800 \text{ cm}^2$$

$$A_1 \mid \frac{5}{6} A \mid 1500 \text{ cm}^2$$

$$I_z \mid 540000 \text{ cm}^4$$

$$W_z \mid 18000 \text{ cm}^3$$

Suma de tensiones normales ω_x :

$$\omega_x \mid \frac{N}{A} \pm \frac{M}{I} y \mid 40,84 \pm 0,37y$$

$$\omega_{x \text{ máx}_2} \mid 40,84 \pm 0,37 \sqrt{4 \cdot 300} \mid 10,3 \text{ Kp/cm}^2 \text{ (máxima tensión de tracción)}$$

$$\omega_{x \text{ mín}_4} \mid 40,84 \pm 0,37 \sqrt{30} \mid 411,9 \text{ Kp/cm}^2 \text{ (máxima tensión de compresión)}$$

b) Corrimiento vertical en B

$$v_B \mid \int \frac{\epsilon W}{\epsilon P} \mid \int_{TOTAL} \left(\frac{N}{EA} \pm \frac{T}{GA_1} \pm 2 \frac{M}{EI} \right) dl \mid$$

$$\mid \int_0^{200\sqrt{2}} \left(\frac{4\sqrt{2}P}{3EA} \pm \frac{4\sqrt{2}}{3GA_1} \pm 2 \frac{\sqrt{2}P}{3EI} x \right) dx \mid 2$$

$$2 \int_0^{400} \left(\frac{4P}{3GA_1} \pm \frac{4P}{3EI} x' \right) dx'$$

$$\mid \int_0^{200\sqrt{2}} \left(\frac{2000}{3EA} \pm \frac{2000}{3GA_1} \pm 2 \frac{2000x^2}{3EI} \right) dx \mid 2 \mid \int_0^{400} \left(\frac{1000}{GA_1} \pm \frac{16000 + 8000x' + 1000(x')^2}{3EI} \right) dx' \mid$$

$$\mid \left(\frac{2000x}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 11800} \pm \frac{2000x}{3 \cdot 87500 \cdot 11500} \pm \frac{2000x^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1540000} \right) \Big|_0^{200\sqrt{2}} \mid 2$$

$$2 \left(\frac{1000x'}{3 \cdot 87500 \cdot 11500} \pm \frac{16000x' + 8000x'^2 + 1000x'^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1540000} \right) \Big|_0^{400}$$

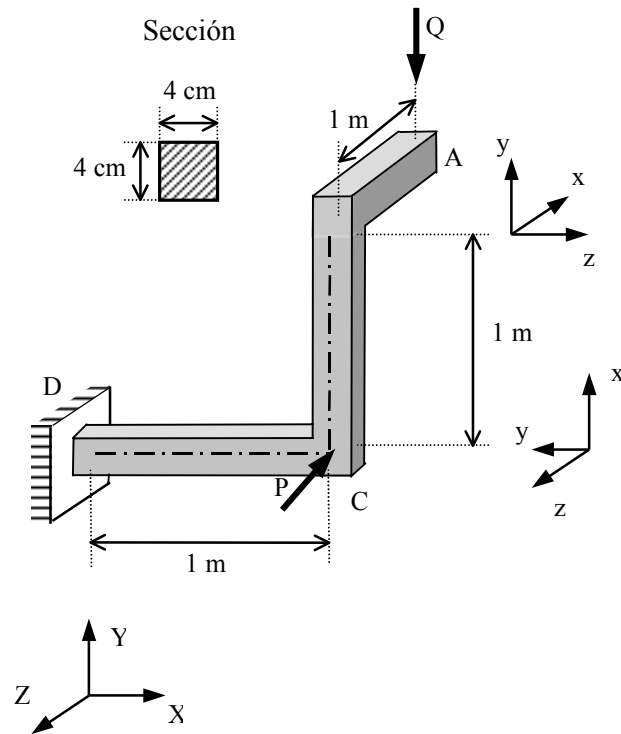
$$\mid 0,00052 \pm 0,00142 \pm 0,0442 \pm 0,0012 \pm 0,0608$$

$$\mid 0,00052 \pm 0,00242 \pm 0,105 \mid 0,108 \text{ cm} \mid 1,08 \text{ mm}$$

(N) (T) (M)

Problema 8.2

Para la pieza quebrada de la figura, hallar :

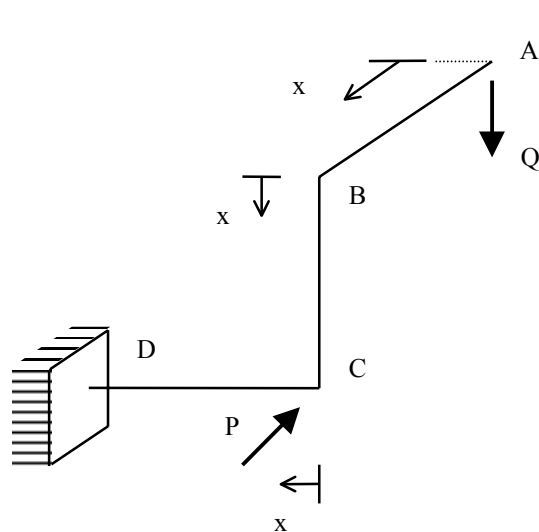


- a) El desplazamiento vertical de la sección A.
 b) El desplazamiento transversal de la sección C (en la dirección Z).

Aplicación a : $P=300 \text{ N}$
 $Q=2P=600 \text{ N}$
 $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$
 $G=0,4E$

Resolución :

Determinación de esfuerzos:



$$\text{Tramo AB} \begin{cases} T_y | 4Q | 4600 \text{ N} \\ M_z | 4Qx | 4600x \text{ mN} \end{cases}$$

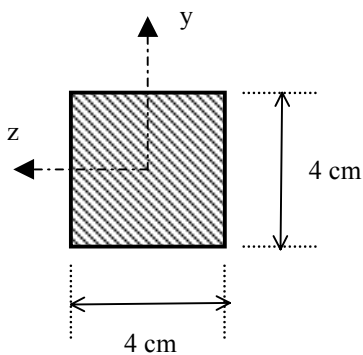
$$\text{Tramo BC} \begin{cases} N_x | 4Q \\ M_y | Q \int | 600 \text{ mN} \end{cases}$$

$$\text{Tramo CD} \begin{cases} T_y | 4Q | 4600 \text{ N} \\ T_z | 4P | 4300 \text{ N} \\ M_x | 4Q \int | 4600 \text{ mN} \\ M_z | 4Qx | 4600x \text{ mN} \\ M_y | P \int x | 300x \text{ mN} \end{cases}$$

a) Desplazamiento vertical de la sección A:

$$\begin{aligned}
 v_A &= \frac{\epsilon W_{total}}{\epsilon Q} = \left[\int_0^b \frac{T_y}{GA_1} \frac{\epsilon T_y}{\epsilon Q} + 2 \frac{M_z}{EI_z} \frac{\epsilon M_z}{\epsilon Q} \right] dx + 2 \left[\int_0^c \frac{Nx}{EA} \frac{\epsilon Nx}{\epsilon Q} + 2 \frac{M_y}{EI_y} \frac{\epsilon M_y}{\epsilon Q} \right] dx + \\
 & 2 \left[\int_0^d \frac{T_y}{GA_1} \frac{\epsilon T_y}{\epsilon Q} + 2 \frac{T_z}{GA_1} \frac{\epsilon T_z}{\epsilon Q} + 2 \frac{M_x}{GK_t} \frac{\epsilon M_x}{\epsilon Q} + 2 \frac{M_y}{EI_y} \frac{\epsilon M_y}{\epsilon Q} + 2 \frac{M_z}{EI_z} \frac{\epsilon M_z}{\epsilon Q} \right] dx + \\
 & \left| \int_0^m \frac{4Q}{GA_1} \frac{Q}{4} + 10 \frac{4Q}{EI_z} \frac{Q}{4} x \right| dx + 2 \left| \int_0^m \frac{4Q}{EA} \frac{Q}{4} + 10 \frac{Q}{EI_y} \frac{Q}{4} \right| dx + \\
 & 2 \left| \int_0^m \frac{4Q}{GA_1} \frac{Q}{4} + 10 \frac{4P}{GA_1} \frac{Q}{4} + 2 \frac{4Q}{GK_t} \frac{Px}{4} + 10 \frac{Px}{EI_y} \frac{Q}{4} + 2 \frac{4Q}{EI_z} \frac{Q}{4} x \right| dx + \\
 & \left| \int_0^m \frac{1}{EA} \frac{Q}{2} + \frac{1}{GA_1} \frac{Q}{2} + 2 \frac{1}{GK_t} \frac{Q}{2} + \frac{1}{EI_y} \frac{Q}{2} + \frac{1}{EI_z} \frac{Q}{2} \left(x^2 + 2Qx \right) \right| dx + \\
 & \left| \frac{1}{EA} \frac{Q}{2} + \frac{1}{GA_1} \frac{2Q}{2} + \frac{1}{GK_t} \frac{Q}{2} + \frac{1}{EI_y} \frac{Q}{2} + \frac{1}{EI_z} \frac{2}{3} Q \right| \cdot 0,042 \text{ m} = 4,2 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Términos de la sección:



$$Q = 600 \text{ N}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$G = 0,4 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$A = 16 \text{ cm}^2 = 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_1 = \frac{5}{6} A = \frac{40}{3} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{12} (4 \text{ cm})^4 = \frac{4^3}{3} \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$K_t = K_3 = (2a^3/2b^3) = 0,141 (4 \text{ cm})^4 = 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$b/a = 1 \quad \heartsuit \quad K_3 = 0,141$$

b) Desplazamiento transversal de la sección C.

$$\begin{aligned}
 v_{C/z0} &= \frac{\epsilon W_{total}}{\epsilon P} \left| \int_0^m \frac{4Q}{GA_1} \left(2 \frac{4Q}{EI_z} \int_0^x \right) dx + 2 \int_0^m \frac{4Q}{EA} \left(2 \frac{Q}{EI_y} \int_0^x \right) dx + \right. \\
 & 2 \int_0^m \frac{4Q}{GA_1} \left(2 \frac{4P}{GA_1} / 4 + 2 \frac{4Q}{GK_k} \left(2 \frac{P}{EI_y} \int_0^x / x + 2 \frac{4Q}{EI_z} \int_0^x \right) dx \right) \left. + \frac{1}{GA_1} / P + 2 \frac{1}{EI_y} \frac{P}{3} \right| \\
 & \left| \frac{P}{0,4 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot \frac{40}{3} \cdot 10^{44}} + 2 \frac{\frac{P}{3}}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot \frac{4^3}{3} \cdot 10^{48}} + \frac{12P \cdot 2 \cdot 10^4 P}{64 \cdot 2,1 \cdot 10^7} \right| = 2,235 \cdot 10^{-43} \text{ m} = 0,2235 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

9 Piezas y sistemas hiperestáticos

- Estado isostático (II):

$$\widehat{R}_A + 2 \widehat{R}_B = 5000$$

$$\widehat{R}_A (4) = 45000 \quad \heartsuit$$

$$\begin{cases} \widehat{R}_A = 4 \frac{5000}{4} = 41250 \text{ Kp} \\ \widehat{R}_B = 6250 \text{ Kp} \end{cases}$$

$$\widehat{M}_A = 0$$

$$\widehat{M}_B = 45000 \text{ mKp}$$

$$\widehat{M}_C = 0$$

- Estado momento hiperestático (III):

$$\begin{aligned} R_A' &= 4R_B' \\ M_A' &= R_B' (4) \\ M_B' &= 0 \end{aligned}$$

∄ Para encontrar M_A' , aplicaremos el 2º teorema de Mohr entre A y B, en el estado final (I):

$$0 = \frac{1}{EI} \sum A_i y_i = \frac{1}{EI} \left[\frac{L}{2} M_B \left(\frac{1}{3} L \right) + \frac{L}{2} M_A \left(\frac{2}{3} L \right) \right] \quad \heartsuit \quad M_A = 4 \frac{M_B}{2} = 4 \frac{45000}{2} \text{ mKp}$$

A_i = área diagrama momentos flectores

y_i = distancia desde el baricentro A_i hasta B

$L = 4 \text{ m}$

$$M_A = 2500 \text{ mKp}$$

$$\begin{aligned} M_A' &= M_A = 2500 \text{ mKp} & R_B' &= \frac{M_A'}{4} = \frac{2500}{4} = 625 \text{ Kp} \end{aligned}$$

- Estado final (I):

$$M_A = \widehat{M}_A + 2 M_A' = 0 + 2 M_A' = M_A' = 2500 \text{ mKp}$$

$$M_B = \widehat{M}_B + 2 M_B' = 45000 + 2 \cdot 0 = 45000 \text{ mKp}$$

$$M_C = 0$$

$$R_A = \widehat{R}_A + 2 R_A' = 41250 + 4 \cdot 625 = 41875 \text{ Kp}$$

$$R_B = \widehat{R}_B + 2 R_B' = 6250 + 2 \cdot 625 = 6875 \text{ Kp}$$

$$M/x = 40 \quad M_A = 4 M_A' = M_B \quad \heartsuit \quad R_A = \frac{M_A + 4 M_B}{4} = \frac{2500 + 4 \cdot 5000}{4} = 1875 \text{ Kp}$$

$$R_B = 6875 \text{ Kp}$$

b) Para el cálculo de v_C , vamos a aplicar el 2º teorema de Mohr entre A y C.

$$v_C = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) y(x) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{4M_B}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4M_A}{2} \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{4 \cdot 20000 \text{ /kg } \cdot \text{fm}^3}{3EI \text{ /Kg/m}^2 \cdot \text{fm}^4}$$

$$= \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 10^6}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot I} \cdot \{ 40,3 / \text{cm} \} \cdot I_{min} = \frac{2 \cdot 10^4}{3 \cdot 2,1 \cdot 10,3} \cdot 10582 \text{ cm}^4 \xrightarrow{\text{TABLAS}} \text{IPE330} \begin{cases} I_z = 11770 \text{ cm}^4 \\ W_z = 713 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

c) Comprobación del perfil a resistencia :

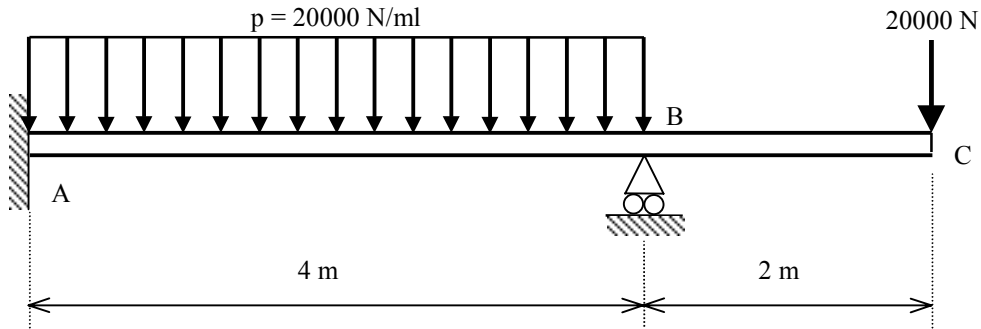
$$\omega_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_z} = \frac{5000 \text{ mKp}}{713 \text{ cm}^3} = 7,01 \text{ Kp/mm}^2 = 701 \text{ Kp/cm}^2 \{ 1600 \text{ Kp/cm}^2 = \omega_{adm} \}$$

$$\vartheta_{max} = \frac{|T_{max}|}{A_1} = \frac{5000 \text{ Kp}}{271 \cdot 7,50 \text{ mm}^2} = 2,46 \text{ Kp/mm}^2 = 246 \text{ Kp/cm}^2 \{ 923,8 \text{ Kp/cm}^2 = \frac{\omega_{adm}}{\sqrt{3}} = \vartheta_{adm} \}$$

El perfil IPE 330 cumple la condición de resistencia y la condición de rigidez.

Problema 9.2

Dada la viga de la figura,



determinar :

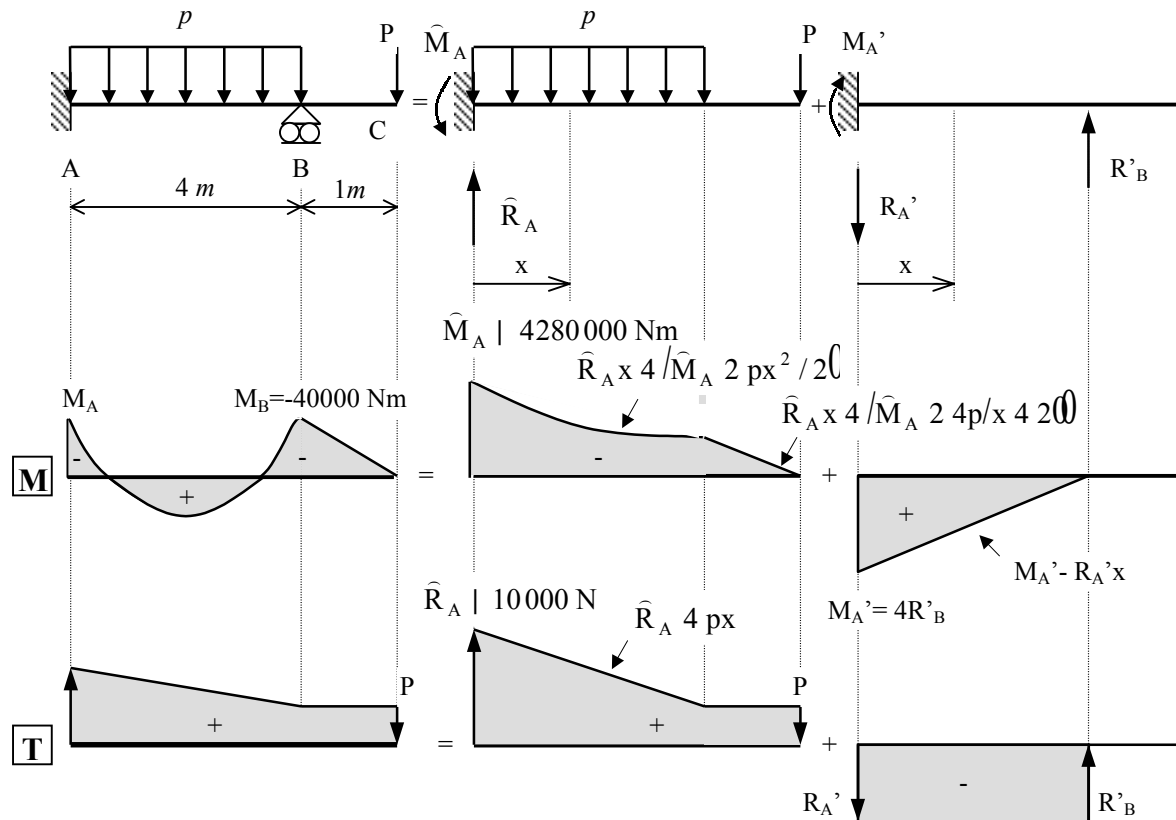
- a) Diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes.
- b) Valores de las reacciones.
- c) El perfil IPN necesario para $\omega_{adm}=140$ MPa.
- d) La pendiente en el apoyo B.

Material:

Acero
 $E=2,1 \cdot 10^6$ MPa

Resolución:

a) Descomposición en un problema isostático, más una incógnita hiperestática (R'_B).



b) Determinación de la incógnita hiperestática y de las reacciones totales.

$$\begin{aligned} M/x_{A,B} &= M_A - R_A x + \frac{M_A}{2} p \left(\frac{x^2}{2} \right) \\ M/x_{B,C} &= R_A x - \frac{M_A}{2} p \left(\frac{x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Para hallar R_B , aplicaremos el 2º teorema de Mohr entre A y B :

$$0 = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$\frac{1}{EI} \left(\int_A^B R_A x dx - \int_A^B \frac{M_A}{2} p \frac{x^2}{2} dx + \int_A^B \frac{M_A}{2} p \frac{x^2}{2} dx \right) = 0$$

$$R_A = 100000 \text{ N}$$

$$M_A = 4280000 \text{ Nm}$$

$$M_B = 4R_B$$

$$\frac{1}{EI} \left(\int_A^B 100000x dx - \int_A^B \frac{4280000}{2} p \frac{x^2}{2} dx + \int_A^B \frac{4280000}{2} p \frac{x^2}{2} dx \right) = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left(\int_0^4 100000x dx - \int_0^4 \frac{4280000}{2} p \frac{x^2}{2} dx + \int_0^4 \frac{4280000}{2} p \frac{x^2}{2} dx \right) = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{4 \cdot 100000}{2} - \frac{4280000}{2} p \frac{4^3}{3} + \frac{4280000}{2} p \frac{4^3}{3} \right) = 0 \quad \heartsuit \quad R_B = 65000 \text{ N}$$

$$R_A - 80000 + 65000 - 20000 = 0 \quad \heartsuit \quad R_A = 35000 \text{ N}$$

$$M_A = -20000 \cdot 6 + 65000 \cdot 4 - 80000 \cdot 2 \quad \heartsuit \quad M_A = -20000 \text{ Nm}$$

c) Determinación del IPN.

$$\omega_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_z} = \frac{40000 \cdot 100}{W_z} \leq 14000 \text{ N/cm}^2 \quad \heartsuit$$

$$\heartsuit W_{z,min} = \frac{4 \cdot 10^6}{14000} = 285,7 \text{ cm}^3 \longrightarrow \text{IPN240} \begin{cases} I_z = 4250 \text{ cm}^4 \\ W_z = 354 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

TABLAS

d) Pendiente en B.

$$M/x_{A,B} | 420000 - 2 \cdot 35000x + 4 \cdot 10000x^2$$

$$\frac{d^2v_1}{dx^2} | M/x_{A,B}$$

$$\frac{dv_1}{dx} | \frac{1}{EI} \left[20000x - 2 \cdot 35000 \frac{x^2}{2} + 4 \cdot 10000 \frac{x^3}{3} + C_1 \right]$$

$$x | 0: \quad \frac{dv_1}{dx} | 0 \quad \heartsuit \quad C_1 | 0$$

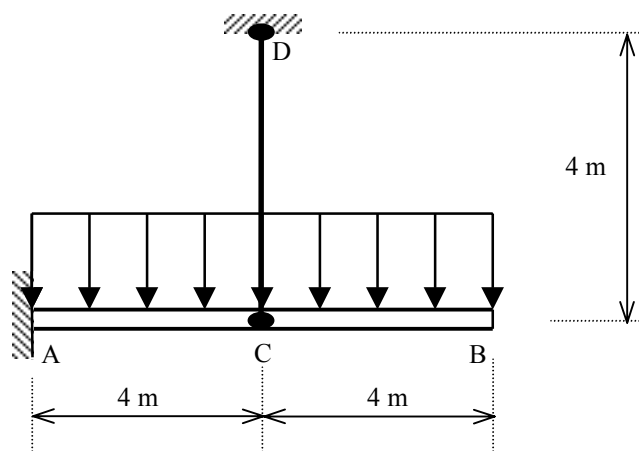
$$x | 4: \quad \chi_B - \frac{dv_1}{dx} | \frac{1}{EI} \left[20000 - 4 \cdot 35000 \left(\frac{16}{2} \right) + 4 \cdot 10000 \left(\frac{64}{3} \right) + C_1 \right]$$

$$\chi_B | \frac{4 \cdot 240000 - 2 \cdot 840000 + 4 \cdot 640000}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 4250} | \frac{4 \cdot 40000}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^3 \cdot 4250}$$

$$\chi_B | 40,00149 \text{ rad} | 40,0856^\circ$$

Problema 9.3

- a) Determinar el valor máximo de la carga uniformemente repartida, p , que se puede aplicar en la viga de la figura, si la tensión máxima admisible es de 140 MPa (tanto para la viga AB como para el tirante CD).
- b) Calcular asimismo el descenso que tendrá el punto C.



- La viga AB es un perfil IPN 400.
- El tirante CD tiene una sección de 5 cm^2 .
- Módulo de elasticidad :
 $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ (para la viga y el tirante).

Resolución :

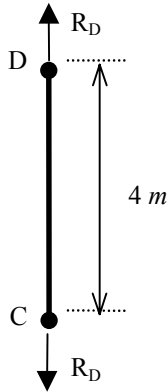
a)

Se trata de un problema hiperestático. Para resolver la hiperestaticidad, imponemos la siguiente condición :

$$t_C = 4v_C$$

donde : t_C = corrimiento del punto C del tirante CD.
 v_C = corrimiento vertical de la viga AB en el punto C.

Cálculo de ι_C :



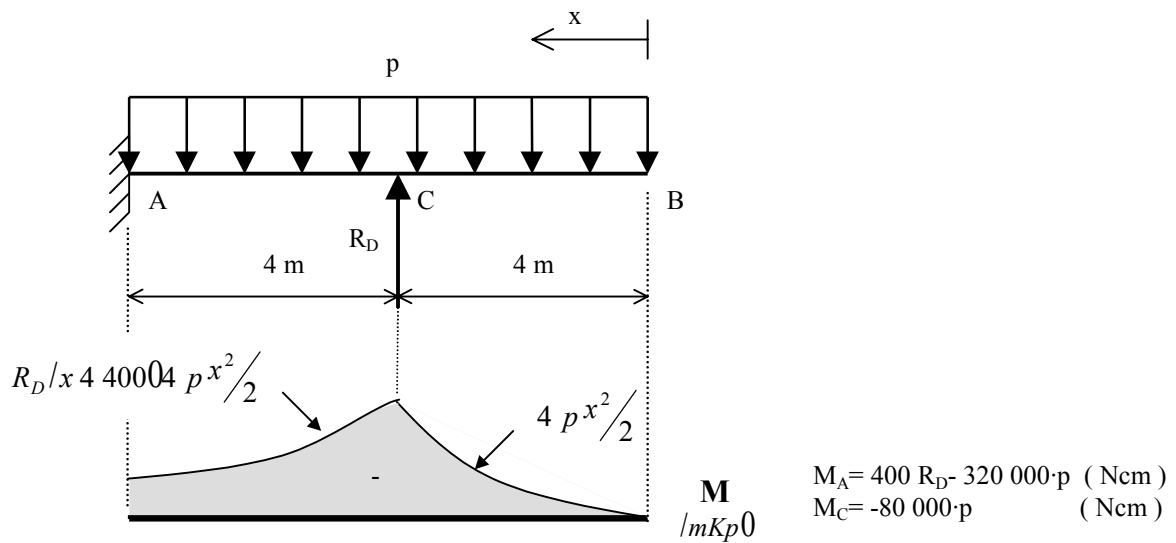
$$\iota_C = \pm \ell_{CD} \left[\kappa \ell_{CD} + \frac{\omega}{E} \ell_{CD} + \frac{R_D \ell_{CD}}{EA} \right]$$

$$\left(\kappa + \frac{\omega}{E}, \omega + \frac{R_D}{A} \right)$$

$$\iota_C = \frac{R_D (400 \text{ cm})}{2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2 (5 \text{ cm}^2)} = 3,81 \cdot 10^{-6} (R_D \text{ cm} / R_D \text{ en N})$$

Cálculo de v_C :

Aplicaremos el Teorema de Castigliano:



$$v_C = \frac{\partial W_{TOTAL}}{\partial R_D} = \int_B^C \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_D} dx + 2 \int_C^A \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_D} dx$$

$$= \int_0^{400} \frac{4 p \frac{x^2}{2}}{EI} dx + 2 \int_{400}^{800} \frac{R_D/x - 4000 + 4 p \frac{x^2}{2}}{EI} dx$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{400}^{800} \frac{4 p \frac{x^2}{2} 2 R_D \left(x 4 400 R_D \right)}{EI} / x 4 4000 \left(dx \right) \right| \\
 & \left| \frac{1}{EI} \left(\frac{4 p}{8} x^4 2 \frac{200 p 2 R_D}{3} \right) \left(x^3 4 400 \left(R_D \right) \left(x^2 2 160000 \left(R_D \right) \left(x \right) \right) \right) \right| \\
 & \left| \frac{1}{EI} / 4 18133 \int 10^6 p 2 21,3 \int 10^6 R_D \right| \frac{4 18133 \int 10^6 p 2 21,3 \int 10^6 R_D}{2,1 \int 10^7 \int 29210} \left| \right. \\
 & \left. \left| / 4 29561,5 p 2 34,8 \left(R_D \right) \int 10^{46} \text{ cm} \right. \right.
 \end{aligned}$$

Entonces: $v_C \left| 4 v_C \right. \heartsuit 3,81 \int 10^{46} \left(R_D \right) \left| 4 / 4 29561,5 p 2 34,8 \left(R_D \right) \int 10^{46} \right. \diamond$

$$\diamond 38,61 \left(R_D \right) \left| 29561,5 p \right. \diamond R_D \left| 766 p$$

(1) $R_D \left| 766 p \right. \left(R_D \text{ en N} \right)$

(2) $p \left| 0,13 \left(R_D \right) \right. \left(p \text{ en N/cm} \right)$

Determinación de p_{\max} :

Para el tirante:

$$\omega_{\max, \text{tirante}} \left| \frac{R_{D, \max}}{5 \text{ cm}^2} \Omega \omega_{\text{adm}} \left| 140 \int 10^2 \text{ N/cm}^2 \right. \heartsuit R_{D, \max} \left| 70000 \text{ N} \right. \heartsuit /_{20}$$

$$\heartsuit /_{20} p_{\max} \left| 0,13 \left(R_{D, \max} \right) \left| 0,13 \left(70000 \right) \left| 9100 \text{ N/ml} \right. \right.$$

Para el perfil:

$$\omega_{\max, \text{viga}} \left| \frac{|M_{\max}|}{W_{z, \text{IPN } 400}} \Omega \omega_{\text{adm}}$$

$$M_A \left| 400 R_D 4 320000 p \left| 400 \left(766 p 4 320000 p \right) \left| 413600 p$$

$$M_C \left| 480000 p$$

$$|M_{\max}| \left| 80000 p$$

$$\omega_{max,viga} \mid \frac{|M_{max}|}{W_{z,IPN400}} \mid \frac{80000 \text{ (p)}}{1460} \Omega \omega_{adm} \mid 14000 \text{ N/cm}^2$$



$$p_{m\acute{a}x} \mid \frac{140000 \text{ (f)460}}{80000} \mid 255,5 \text{ N/cm}\ell \mid 25550 \text{ N/m}\ell$$

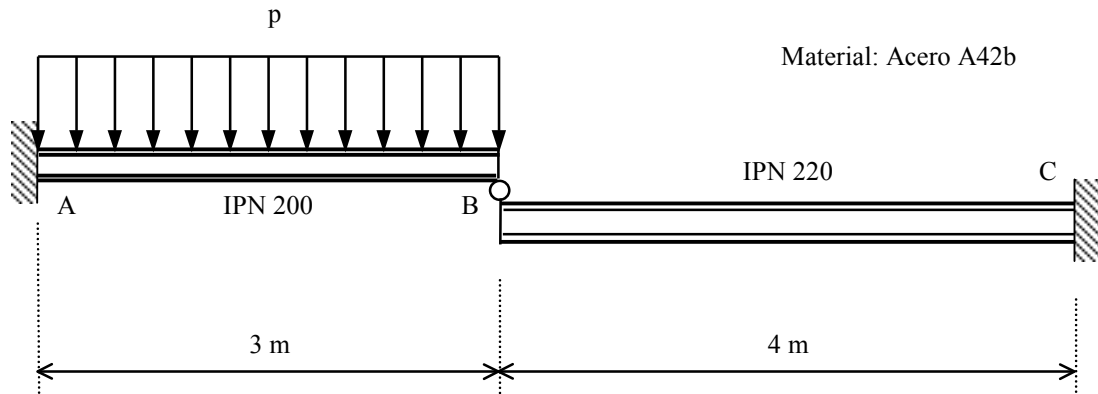
Por tanto: $p_{max} \mid 9100 \text{ N/m}\ell$ (la menor de ambas).

b) Cálculo del descenso de C.

$$v_c \mid 43,81 \text{ (f)0}^{46} \text{ (f)000} \mid 40,267 \text{ cm} \mid 42,7 \text{ mm}$$

Problema 9.4

Las vigas AB y BC de la figura están perfectamente empotradas en los extremos A y C. Cuando están descargadas, sus extremos B están en contacto, pero sin transmitirse ningún esfuerzo.



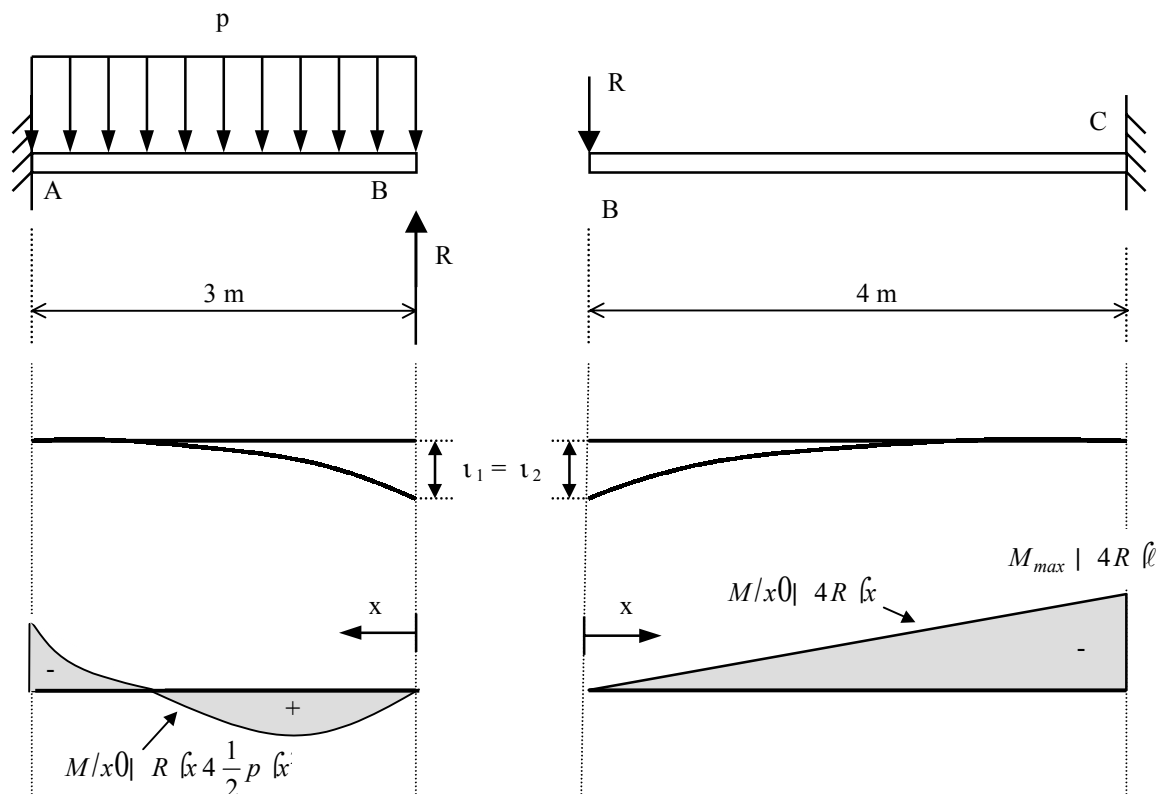
Determinar:

- La carga uniformemente repartida máxima que puede soportar la viga AB, estando sometida la viga BC solamente al efecto producido por la AB.
- El descenso vertical del punto B.

Resolución:

- Determinación de p_{\max} .

En este tipo de problemas de interacciones, la resolución se basa en plantear la igualdad de corrimientos (ecuación de compatibilidad de deformación en la sección B):



Cálculo de ι_1 : Aplicamos el 2º teorema de Mohr entre A y B:

$$\iota_1 = \int_0^{\ell} \frac{Rx - \frac{1}{2}px^2}{EI_z} dx$$

$$= \frac{1}{EI_z} \left(\frac{R}{3} \ell^3 - \frac{p}{8} \ell^4 \right) \quad / \ell = 3 \text{ m}$$

Cálculo de ι_2 : Aplicamos el 2º teorema de Mohr entre C y B:

$$\iota_2 = \int_0^{\ell} \frac{4Rx}{EI_z} dx$$

$$= \frac{1}{EI_z} \left(\frac{R}{3} \ell^3 \right) \quad / \ell = 4 \text{ m}$$

Condición: $\iota_1 = \iota_2$

$$\frac{9R - \frac{81}{8}p}{E \cdot 2140 \text{ cm}^4} = \frac{4R}{E \cdot 3060 \text{ cm}^4}$$

$$216 \cdot 3060 \cdot 2512 \cdot 2140 R = 243 \cdot 3060 p \cdot 4 \ell^3 \quad p = 2,3624 \frac{R}{\ell}$$

Cálculo de R_{\max} ($\heartsuit p_{\max}$):

IPN 200 a flexión:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_{z,IPN200}} = \frac{|M_{\max}|}{214 \text{ cm}^3} \cdot \frac{260 \text{ N}}{1,5} / \text{mm}^2 = 173,3 \text{ N/mm}^2$$

$$|M_{\max}| = 37093,3 \text{ Nm}$$

M_{\max} :

$$\frac{dM}{dx} = 0 = R - px \quad x = \frac{R}{p} = 0,4233 \text{ m}$$

$$M_A = R \left(\ell - \frac{1}{2} p \ell^2 \right) = 47,6308 R \quad \heartsuit \quad |M_{\max}| = |M_A|$$

$$|M_{\max}| = 7,6308 R = 37093,3 \quad \heartsuit \quad R_{\max} = 4861,0 \text{ N}$$

IPN 220 a flexión:

$$\sigma_{\text{máx}} \mid \frac{|M_{\text{máx}}|}{W_{z,IPN220}} \mid \frac{|M_{\text{máx}}|}{278\text{cm}^3} \Omega \frac{260}{1,5} \text{N/mm}^2 \mid 173,3 \text{ N/mm}^2$$

$$|M_{\text{máx}}| \mid 48186,6 \text{ Nm}$$

$$|M_{\text{máx}}| \mid |4 R \ell| \mid 4R \mid 48186,6$$

$$R_{\text{máx}} \mid 12046,6 \text{ N}$$

$$\heartsuit R_{\text{máx}} \mid \text{mín}'' \mid 12046,6; 4861,0 \quad \text{€} \mid 4861,0 \text{ dN}$$

Por lo tanto:

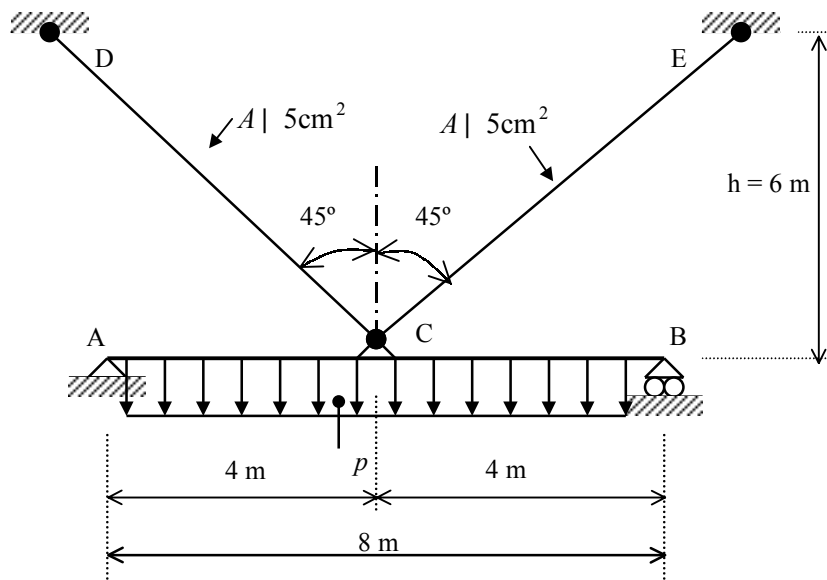
$$P_{\text{máx}} \mid 2,3624R_{\text{máx}} \mid 2,3624 \mid 4861,0 \mid 11483 \text{ N/ml}$$

b) Descenso vertical del punto B.

$$v_2 \mid 4 \frac{R \ell^3}{3EI_z} \mid 4 \frac{4861 \cdot 400^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^7 \cdot 3060} \mid 41,61 \text{ cm}$$

Problema 9.5

- a) Determinar el valor máximo de la carga uniformemente repartida, $p_{m\acute{a}x}$, que se puede aplicar a la viga de la figura.
- b) Calcular asimismo el descenso que tendrá el punto C.

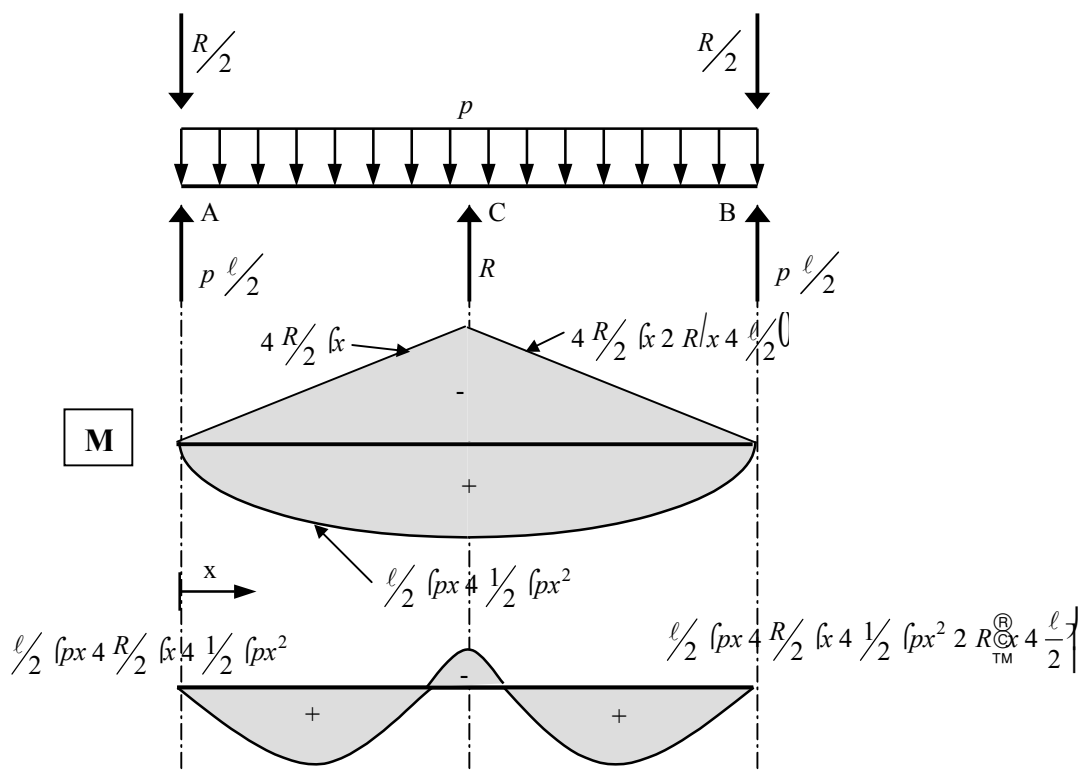


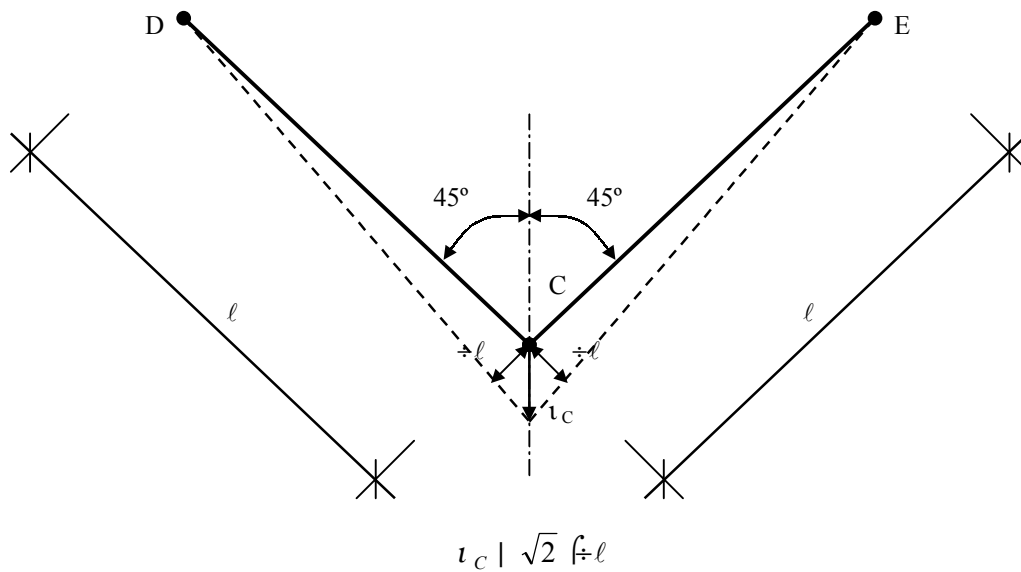
Datos:

Viga AB: IPN 300
 $\sigma_{adm} = 160 \text{ MPa}$
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
 (tanto para la viga AB como para los tirantes CD y CE)

Resolución:

- a) Imponemos la condición de compatibilidad de deformación en C, es decir, planteamos igualdad de corrimientos.





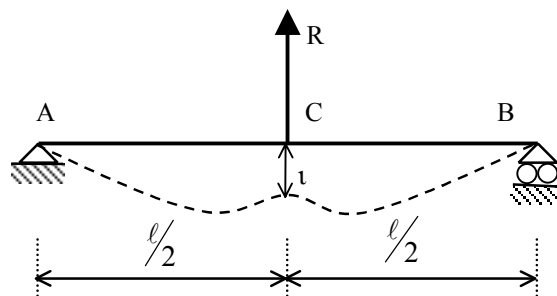
Cálculo de t_c :

Aplicamos el 2º teorema de Mohr entre C y A $\int_0^{\ell/2} y \cdot \Delta y \, dx = 0$:

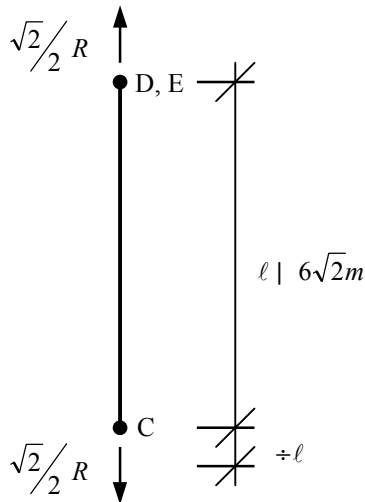
$$\int_0^{\ell/2} \left(\frac{P}{2} x - \frac{R}{2} x + \frac{P}{2} x^2 \right) \frac{1}{EI_z} \left(\frac{P}{2} x - \frac{R}{2} x + \frac{P}{2} x^2 \right) dx = 0$$

$$\int_0^{\ell/2} \left(\frac{P}{2} x^2 - \frac{R}{2} x^2 + \frac{P}{2} x^3 \right) dx = 0 \quad \left| \frac{1}{EI_z} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{P}{2} x^2 - \frac{R}{2} x^2 + \frac{P}{2} x^3 \right) dx \right|$$

$$\left| \frac{1}{EI_z} \left(\frac{P}{6} x^3 - \frac{R}{6} x^3 + \frac{P}{8} x^4 \right) \right|_0^{\ell/2} = 0 \quad \left| \frac{1}{EI_z} \left(\frac{P}{6} \frac{\ell^3}{8} - \frac{R}{6} \frac{\ell^3}{8} + \frac{P}{8} \frac{\ell^4}{16} \right) \right| = 0$$



Cálculo de $\delta \ell$:



$$\delta \ell = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} R \ell}{EA} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} R (600\sqrt{2})}{E \beta} = \frac{120R}{E} \text{ cm}$$

$$\ell = 600\sqrt{2} \text{ cm} \quad , \quad A = 5 \text{ cm}^2$$

$$\delta \ell = \sqrt{2} \delta \ell \quad \heartsuit \quad \delta \ell = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{4}{48} R \ell^3 + 2 \frac{5p\ell^4}{384} \right] = \frac{120\sqrt{2}R}{E} = \sqrt{2} \delta \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{B} \mid 8 \text{ m} \mid 800 \text{ cm} \\ \text{C} \\ \text{TM}_{z, IPN300} \mid 9800 \text{ cm}^4 \end{array} \right\}$$

$$4 \frac{8^3}{48} R + 2 \frac{5 \beta^4}{384} p = 9800 \sqrt{2} R$$

$$464R + 32000p = 9,98R \quad \heartsuit \quad p = 2,312 \cdot 10^4 R \quad (p \text{ en N/ml}, R \text{ en N})$$

Cálculo de $R_{\text{máx}}$ ($\Downarrow p_{\text{máx}}$) :

≠ Cables a tracción:

$$\omega_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}}}{A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} R_{\text{máx}}}{5 \text{ cm}^2} = \Omega \omega_{\text{adm}} = 16 \cdot 000 \text{ N/cm}^2 \quad \heartsuit \quad R_{\text{máx}} = 113137 \text{ N}$$

€ IPN 300 a flexión:

$$\omega_{\text{máx}} = \frac{|M_{\text{máx}}|}{W_{z, \text{IPN300}}} = \frac{|M_{\text{máx}}|}{653 \text{ cm}^3} \leq 16000 \text{ N/cm}^2 \quad \heartsuit \quad |M_{\text{máx}}| = 104480 \text{ Nm}$$

$|M_{\text{máx}}|$:

$$M_C = \frac{1}{8} p \ell^2 + R \frac{\ell}{4} = \frac{1}{8} (2,312 \cdot 10^4 \text{ N}) (8 \text{ m})^2 + R \frac{8 \text{ m}}{4} = 415R$$

$$\left. \begin{array}{l} R = 2,312 \cdot 10^4 \text{ N} \\ \ell = 800 \text{ cm} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\epsilon M}{\epsilon x} = 0 \quad \left| \quad \frac{p \ell}{2} + \frac{R}{2} - p x \right| \quad x = \frac{\ell}{2} + \frac{R}{2p} = \frac{\ell}{2} + \frac{R}{2 \cdot 2,312 \cdot 10^4 \text{ N}} = 183,74 \text{ cm}$$

$$M_{\text{máx}} = M(x) = 183,74 \text{ cm} \left[\frac{p \ell}{2} + \frac{R}{2} - p x \right] + p \frac{\ell}{2} x + \frac{x^2}{2} \left[\frac{R}{2} - p x \right]$$

$$= 2,312 \cdot 10^4 \text{ N} \left[\frac{800}{2} + \frac{183,74}{2} - \frac{183,74^2}{2} \right] + \frac{R}{2} \cdot 183,74 = 39R$$

Así que $M_{\text{máx}} = 104480 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{cm} = 39 R_{\text{máx}} \quad \heartsuit \quad R_{\text{máx}} = 267897 \text{ N}$

$$R_{\text{adm, sistema}} = \min \{ 113137, 267897 \} = 113137 \text{ N}$$

Por lo tanto, el valor máximo de la carga uniformemente repartida que se puede aplicar a la viga AB, admitida por el sistema, es:

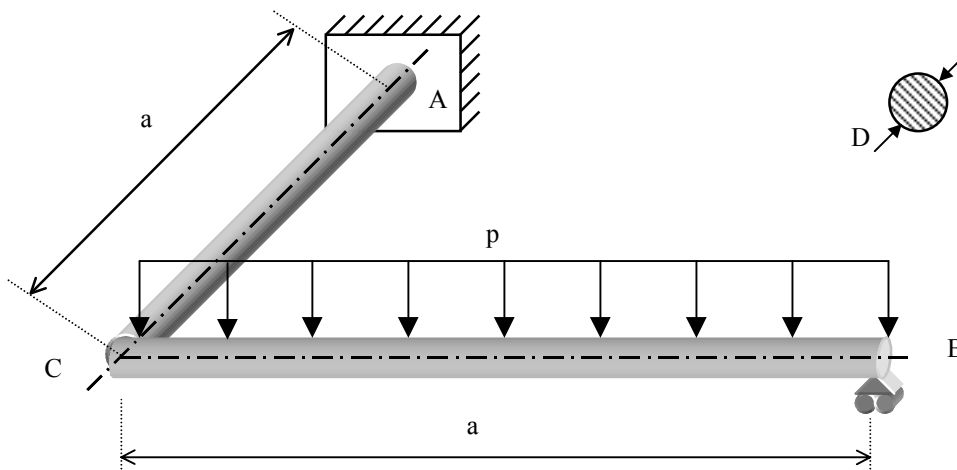
$$p_{\text{máx}} = 2,312 \cdot 10^4 \cdot 113137 = 261,57 \text{ N/cm} = 26157 \text{ N/m}$$

b) El descenso del punto C es.

$$v_C = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \ell \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{120 \cdot 113137}{2,1 \cdot 10^7} / \text{cm} = 0,9 \text{ cm}$$

Problema 9.6

Determinar el desplazamiento vertical de la sección C, v_C , en la pieza de la figura, admitiendo que la sección en todos los tramos del sistema es circular y el material es el mismo.



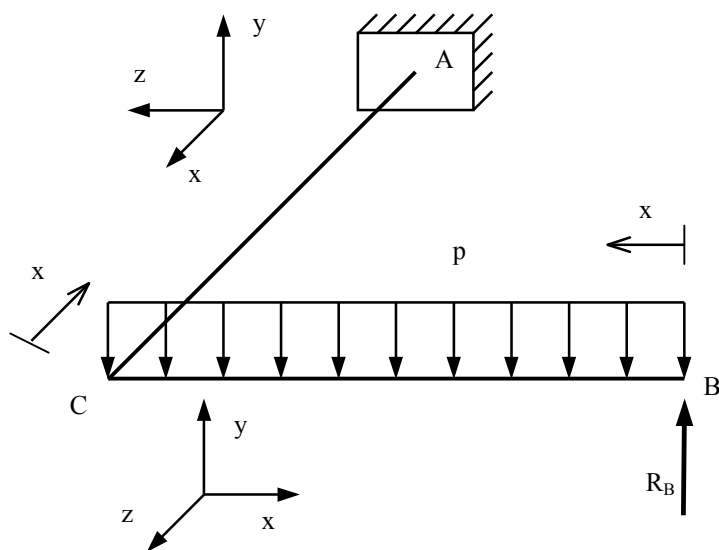
Datos:

- $G = 0.4 \cdot E$
- $p = 1000 \text{ N/ml}$
- $D = 50 \text{ mm}$
- $a = 1 \text{ m}$
- $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$

Resolución:

a) Determinación de esfuerzos .

Es un problema hiperestático. Consideraremos R_B como incógnita hiperestática a determinar.



Esfuerzos:

≠ Tramo BC:

$$T_y \mid R_B \quad 4 \quad px$$

$$M_z \mid R_B \quad \int 4 \quad \frac{1}{2} px^2$$

≠ Tramo CA:

$$T_y \mid R_B \quad 4 \quad p \quad a$$

$$M_z \mid R_B \quad 4 \quad p \quad a \quad 0 \quad \int$$

$$M_x \mid R_B \quad a \quad 4 \quad \frac{1}{2} p \quad a^2$$

Aplicaremos el teorema de Castigliano para hallar la incógnita hiperestática R_B :

$$0 = \frac{\partial W_{total}}{\partial R_B} = \int_0^a \left[\frac{\partial T_y}{\partial R_B} \frac{\epsilon T_y}{GA_1} + 2 \frac{\partial M_z}{\partial R_B} \frac{\epsilon M_z}{EI_z} \right] dx + \int_0^a \left[\frac{\partial T_y}{\partial R_B} \frac{\epsilon T_y}{GA_1} + 2 \frac{\partial M_x}{\partial R_B} \frac{\epsilon M_x}{GK_t} + 2 \frac{\partial M_z}{\partial R_B} \frac{\epsilon M_z}{EI_z} \right] dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{\partial R_B}{\partial R_B} \frac{4px}{GA_1} + 2 \frac{\partial R_B}{\partial R_B} \frac{4 \frac{1}{2} px^2}{EI_z} \right] dx + \int_0^a \left[\frac{\partial R_B}{\partial R_B} \frac{4pa}{GA_1} + 2 \frac{\partial R_B}{\partial R_B} \frac{4 \frac{1}{2} pa^2}{GI_0} + 2 \frac{\partial R_B}{\partial R_B} \frac{4pa \cdot x}{EI_z} \right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{GA_1} R_B a^4 p \frac{a^2}{2} + 2 R_B a^4 p a^2 \right] + \left[\frac{1}{GI_0} R_B a^3 4 p \frac{a^4}{2} \right] + \left[\frac{1}{EI_z} R_B \frac{a^3}{3} 4 p \frac{a^4}{8} + 2 R_B \frac{a^3}{3} 4 p \frac{a^4}{3} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{GA_1} R_B a^4 p \frac{3}{2} a^2 \right] + \left[\frac{1}{GI_0} R_B a^3 4 \frac{a^4}{2} p \right] + \left[\frac{1}{EI_z} R_B a^3 4 \frac{11}{24} a^4 p \right]$$

$$\begin{aligned} G &= 0,4E \\ A_1 &= \frac{9}{10} A = \frac{9}{10} \frac{\phi D^2}{4} \\ J_0 &= \frac{\phi D^4}{32} \\ J_z &= \frac{\phi D^4}{64} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{0,4E \frac{9}{10} \phi \frac{D^2}{4}} 2aR_B 4 \frac{3}{2} a^2 p + \frac{1}{0,4E \phi \frac{D^4}{32}} R_B a^3 4 \frac{a^4}{2} p + \frac{1}{E \phi \frac{D^4}{64}} R_B a^3 4 \frac{11}{24} a^4 p$$

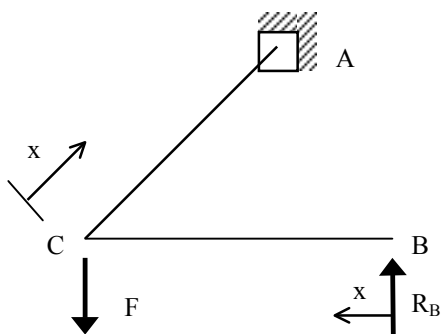
$$= \frac{40D^2/2aR_B 4 \frac{3}{2} a^2 p + 32 \phi R_B a^3 4 \frac{a^4}{2} p + 64 \phi \frac{11}{24} a^3 R_B 4 \frac{11}{24} a^4 p}{3,6 E \phi D^4} = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m} \\ a &= 1 \text{ m} \\ p &= 1000 \text{ N/ml} \\ E &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

♦
 $R_B = 565,3 \text{ N}$

b) Determinación de τ_C .

∅ Para calcular τ_C , aplicaremos el método de la fuerza ficticia:



Esfuerzos (debidos a F):

∅ Tramo BC:

$$\begin{bmatrix} T_y | R_B \\ M_z | R_B x \end{bmatrix}$$

∅ Tramo CA:

$$\begin{bmatrix} T_y | R_B - 4 F \\ M_z | / R_B - 4 F 0 \{x \\ M_x | R_B \{a \end{bmatrix}$$

$$0 | \frac{\epsilon W_{total}}{\epsilon R_B} | \frac{40D^2 / 2a R_B - 4 a F 0 2 3 2 \ 9 \ \{a^3 R_B 0 2 6 4 \ 3.6 \ \left(\frac{R_B}{TM} \right) a^3 R_B - 4 \frac{a^3}{3} F \}}{3.6 \ \{E \ \phi \ D^4} \}$$

$$\heartsuit R_B | 0.174 \{F$$

$$\tau_C | \frac{\epsilon W_{total}}{\epsilon F} | \int_0^a \left(\frac{/R_B - 4 px 0 2 0,174F}{GA_1} / 0.174 0 2 \frac{\left(\frac{R_B}{TM} \right) R_B x - 4 \frac{1}{2} px^2 \}}{EI_z} \right) / 0.174 x 0 \} dx 2$$

$$2 \int_0^a \left(\frac{/R_B - 4 pa 0 2 0,174F - 4 F}{GA_1} / 4 0.826 0 2 \frac{1}{GI_0} \left(\frac{R_B}{TM} \right) R_B a - 4 \frac{1}{2} pa^2 \}}{EI_z} \right) / 0.174 a 0 2$$

$$2 \frac{/R_B - 4 pa 0 2 / 0,174F - 4 F 0 x}{EI_z} / 4 0.826 x 0 \} dx$$

Integrando, entre límites, y tomando F= 0:

$$\tau_C | \frac{1}{GA_1} \left(\frac{R_B}{TM} \right) 0.174 \left(\frac{R_B}{TM} \right) R_B a - 4 p \frac{a^2}{2} \}}{4 0.826 / R_B a - 4 pa^2 0 \}} \left| 2 \frac{1}{GI_0} \left(\frac{R_B}{TM} \right) 0.174 \left(\frac{R_B}{TM} \right) R_B a^3 - 4 \frac{1}{2} pa^4 \}}{2} \right| 2$$

$$2 \frac{1}{EI_z} \left[0.174 R_B \frac{a^3}{3} + \frac{1}{2} p \frac{a^4}{4} \right] + 0.826 \frac{R_B a^3}{3} + p \frac{a^4}{3}$$

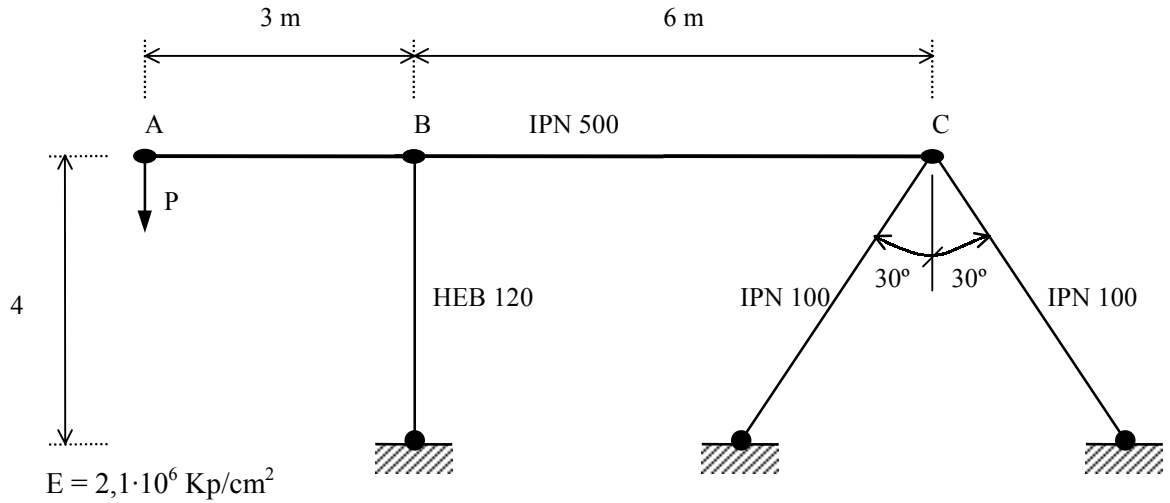
$$\left| \frac{40D^2/4 \cdot 0.652R_B + 2 \cdot 0.739p \cdot 0.32 \cdot 9 \cdot 0.174R_B + 4 \cdot 0.087p \cdot 0.264 \cdot 3.6 \cdot 0.217R_B + 2 \cdot 0.254p \cdot 0}{3.6 \cdot \hat{\phi} \cdot \hat{E} \cdot \hat{D}^4} \right| \cdot 0.00225 \text{ m}$$

$\iota_C \mid 0,225 \text{ cm}$ (en vertical, hacia abajo:
igual dirección y sentido que F)

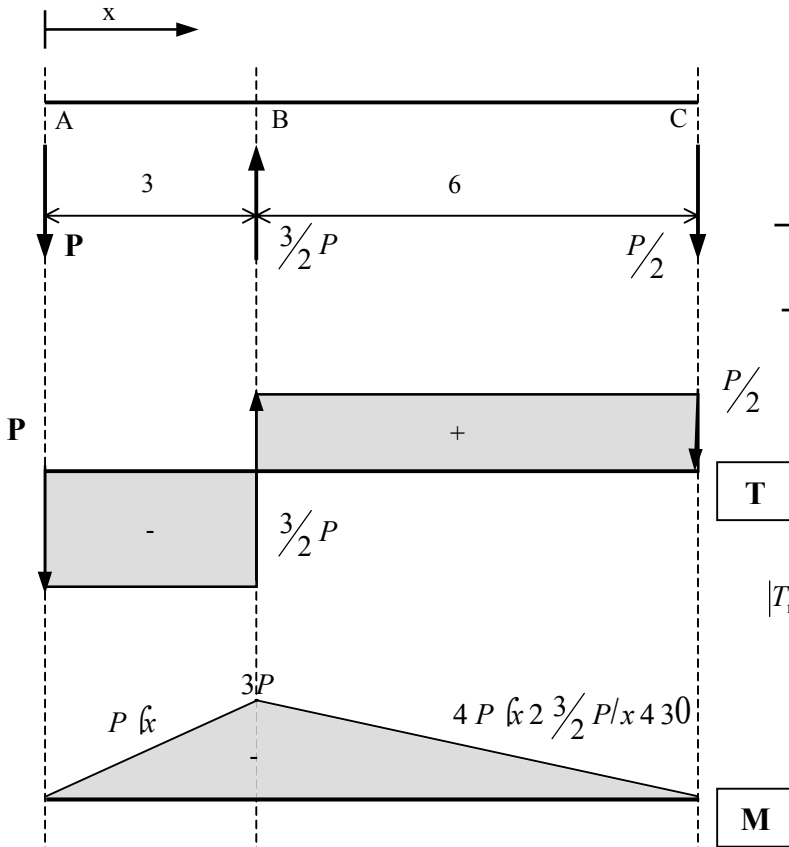
10 Inestabilidad elástica

Problema 10.1

Determinar la carga máxima P que puede soportar el sistema de la figura, si la tensión máxima admisible es de 160 MPa.



Resolución:



Reacciones:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow P \cdot 4 - R_C \cdot 6 \Rightarrow R_C = \frac{P}{2}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_b = \frac{3}{2}P$$

$$|T_{\max}| = \frac{3}{2}P \text{ /Kp0}$$

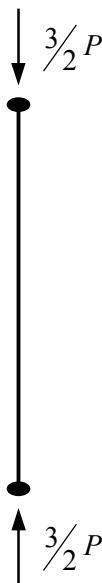
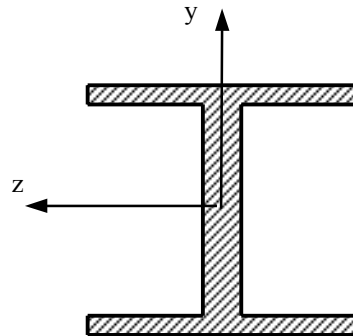
$$|M_{\max}| = 3P \text{ /mKp0}$$

∉ IPN 500. Cálculo a flexión.

$$\omega_{\max} \left| \frac{|M_{\max}|}{W_{z,IPN500}} \right| \frac{3P Nm}{2750 cm^3} \Omega \omega_{adm} \left| 160 \frac{N}{mm^2} \right| \heartsuit P_{\max,IPN500} \left| 146667 N \right.$$

∉ Puntal HEB 120. Cálculo a esfuerzo normal y a pandeo.

$$HEB120 \left\{ \begin{array}{l} [A \mid 34 cm^2 \\ [I_z \mid 864 cm^4 ; I_y \mid 318 cm^4 \\ [W_z \mid 144 cm^3 ; W_y \mid 52.9 cm^3 \\ [i_z \mid 5.04 cm ; i_y \mid 3.06 cm \end{array} \right.$$



Esfuerzo normal:

$$- \omega_{\max} \left| \frac{N_{\max}}{A} \right| \frac{N_{\max}}{34} \Omega 16000 \frac{N}{cm^2} \heartsuit N_{\max} \left| 544000 N \right.$$

$$544000 \left| \frac{3}{2} P \right| \heartsuit P_{\max} \left| 362667 N \right.$$

Pandeo:

$$- \zeta \left| \frac{L}{i_{\min}} \right| \frac{400}{3.06} \left| 131 \right\} 105 \left| \zeta_{\min} \right. \text{ (acero estructural)}$$

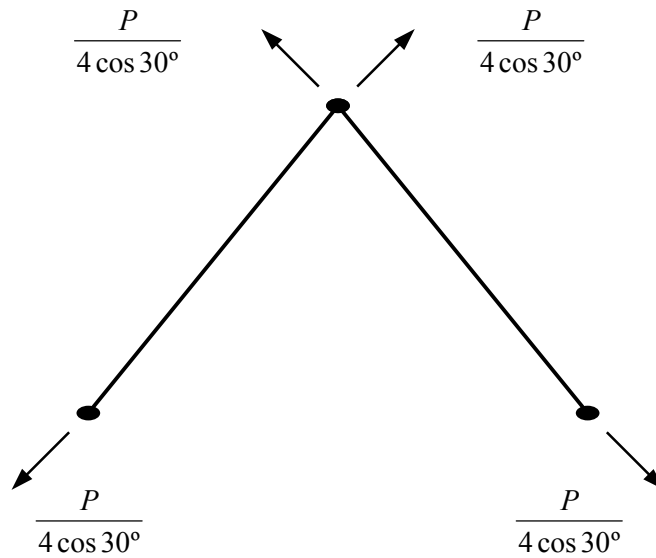
el pandeo se produce en la zona de validez de la ecuación de Euler

$$N_{adm,H120} \left| \frac{N_{crit}}{v_{sp}} \right| \frac{\phi^2 EI}{L^2} \left| \frac{\phi^2 (2.1 \cdot 10^7 \cdot 318)}{16 \cdot 10^4 \cdot 3.5} \right| 117700 N$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ⓜ} \mid I_{\min} \mid 318 cm^4 \\ \text{Ⓛ} \mid \ell \mid 4 m \mid 400 cm \\ \text{Ⓢ} \mid v_{sp} \mid 3.5 / \zeta \mid 1000 \\ \text{Ⓜ} \mid E \mid 2.1 \cdot 10^7 \frac{N}{cm^2} \end{array} \right\}$$

$$117700 \mid \frac{3}{2}P \quad \heartsuit \quad P_{\text{máx}} \mid 78466 \text{ N}$$

€ Puntales IPN 100. Comprobación a esfuerzo normal.(Tracción)



$$\omega_{\text{máx}} \mid \frac{N_{\text{máx}}}{A} \mid \frac{N_{\text{máx}}}{10,6} \Omega 16000 \text{ N/cm}^2 \quad \heartsuit \quad N_{\text{máx}} \mid 169600 \text{ N}$$

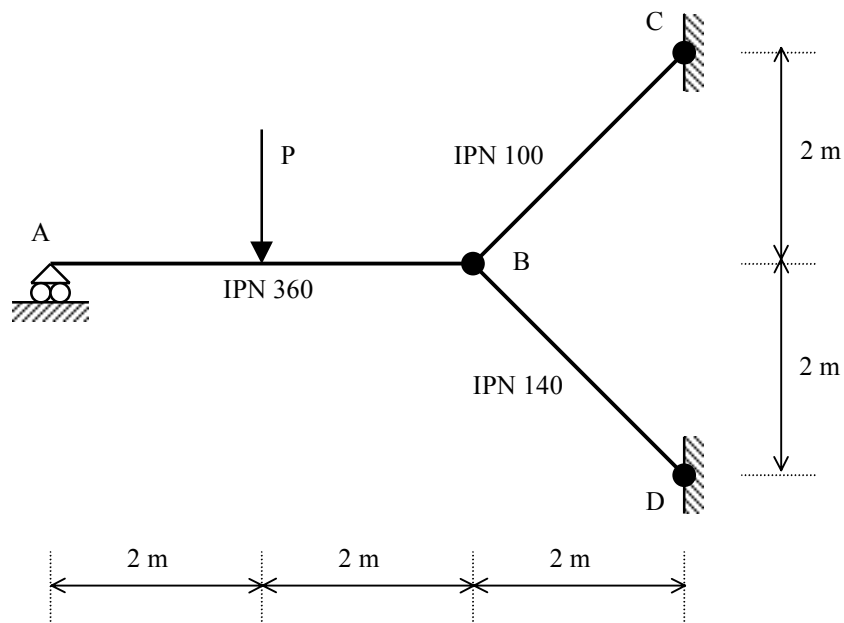
$$169600 \mid \frac{P}{4 \cos 30^\circ} \quad \heartsuit \quad P_{\text{máx}} \mid 587511 \text{ N}$$

Por lo tanto, la carga máxima que puede soportar el sistema es:

$$P \mid \min " 14667, 78466, 587511 \text{ €} \mid 78466 \text{ N}$$

Problema 10.2

Dado el esquema de la figura, donde B, C y D son articulaciones perfectas; si la tensión máxima admisible y el módulo de Young son los mismos para las tres barras, e iguales respectivamente a $\sigma_{adm} = 160 \text{ MPa}$ y $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

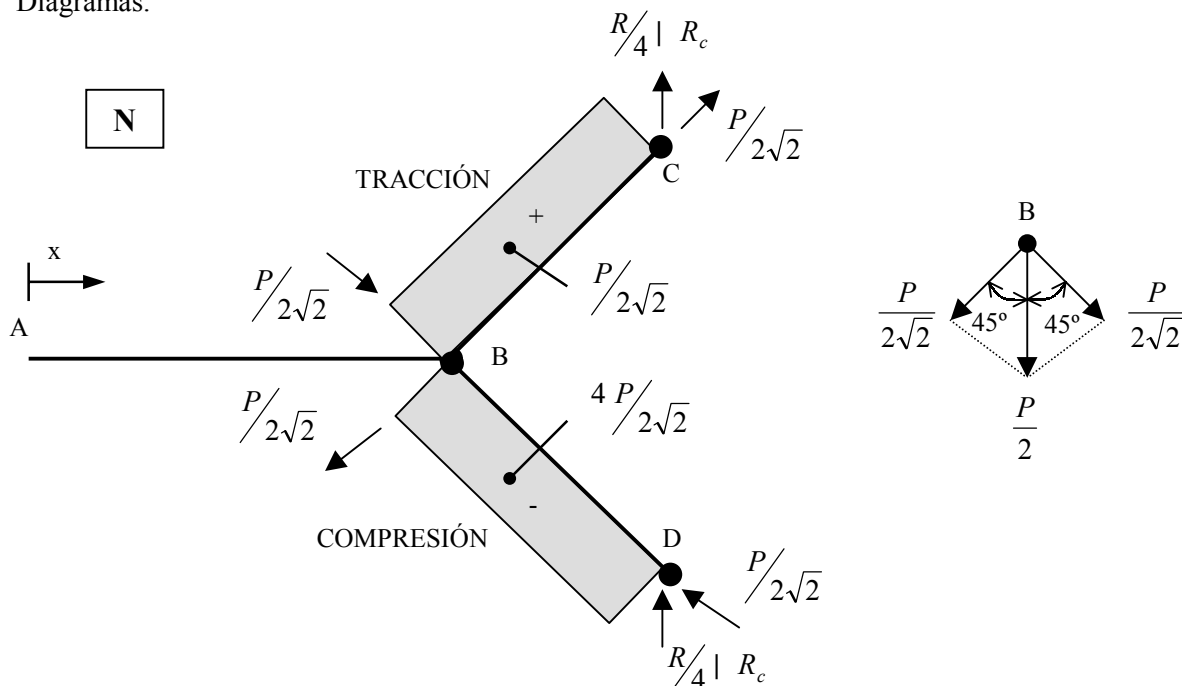


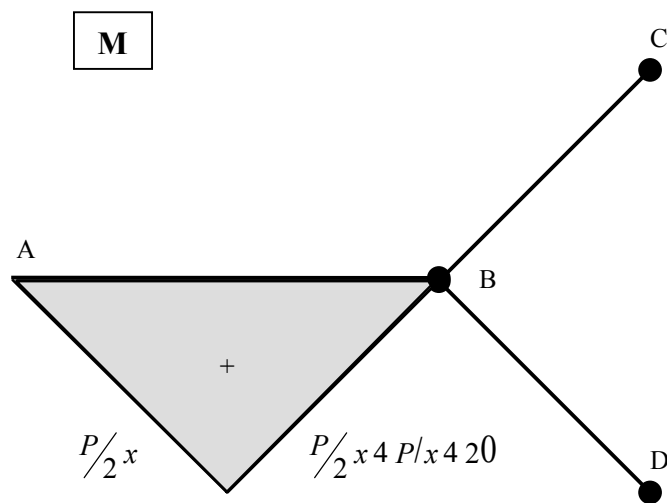
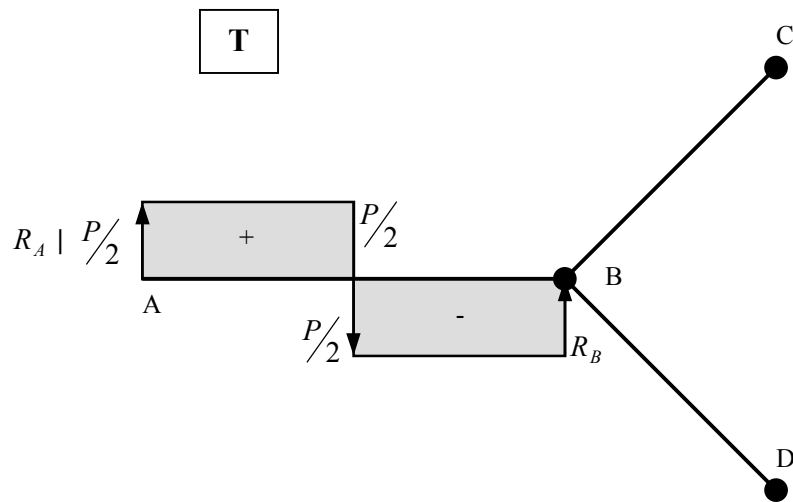
Determinar:

- Diagramas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales para cada barra.
- El máximo valor admisible de P.

Resolución:

- Diagramas.





b) Cálculo de P_{adm} :

∉ IPN 360 a flexión:

$$\omega_{\max} \mid \frac{M_{\max}}{W_{z,IPN360}} \mid \frac{P \int Nm}{1090 \text{ cm}^3} \Omega 160 \text{ N/mm}^2 \quad \heartsuit$$

$$\heartsuit \quad P_{adm} \mid 174400 \text{ N}$$

∉ IPN 100 a tracción:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N_{\text{máx}}}{A} = \frac{P}{10,6} \quad \Omega 160 \quad \text{N/mm}^2$$

$$P_{adm} = 160 \cdot 10,6 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{2} \quad \heartsuit \quad P_{adm} = 479\,701 \text{ N}$$

∉ IPN 140 a compresión:



$$N_{adm} = \frac{N_{crit}}{C_{sp}} = \frac{\phi^2 EI}{3,5 L^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{R} \\ \text{C} \\ \text{C} \\ \text{TM} \end{array} \right\} \frac{l}{i_{min}} = \frac{200\sqrt{2}}{1,4} = 202 \} 100 \heartsuit C_s = 3,5 \left. \right\}$$

$$N_{adm} = \frac{\phi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^7 \cdot 35,2}{3,5 \cdot 10^4} = 2605,6 \text{ N}$$

$$N_{adm} = 2605,6 \text{ N} \cdot \frac{P_{adm}}{2\sqrt{2}} \quad \heartsuit \quad P_{adm} = 73\,700 \text{ N}$$

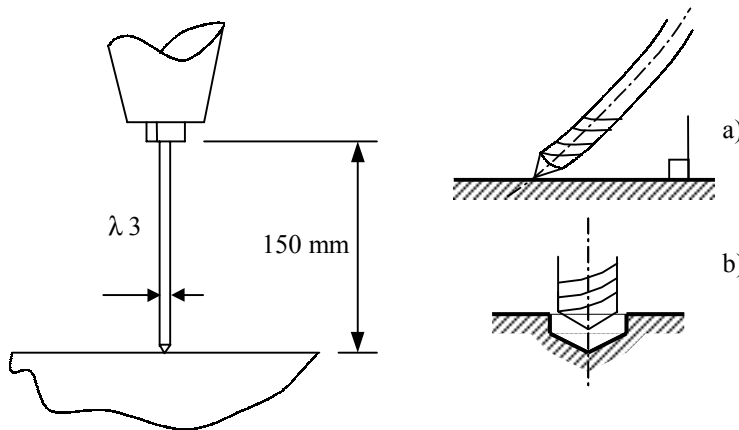
Por tanto :

$$P_{\text{máx}} = \min \{ 174\,400, 479\,701, 73\,700 \} = 73\,700 \text{ N}$$

Calcular la carga axial máxima que puede soportar una broca de λ 3 mm,

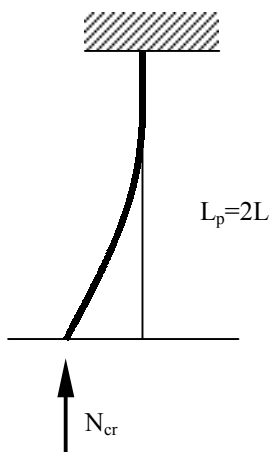
- sin pretaladro
- con pretaladro o marcado.

$$\begin{cases} [E] & | & 210000 \text{ N/mm}^2 \\ [\sigma_e] & | & 320 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

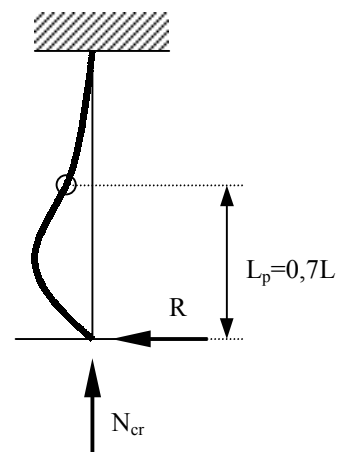


Resolución:

a)



b)



$$N_{cr} \mid \frac{\phi^2 EI_z}{L_p^2}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\phi^2 \cdot 210000 \cdot \frac{\phi \beta^2}{64}}{/2 \cdot 150 \text{ Ø}} \quad | \quad 91 \text{ N} \\ \text{b)} \quad & \frac{\phi^2 \cdot 210000 \cdot \frac{\phi \beta^2}{64}}{/0,7 \cdot 150 \text{ Ø}} \quad | \quad 747 \text{ N} \end{aligned}$$

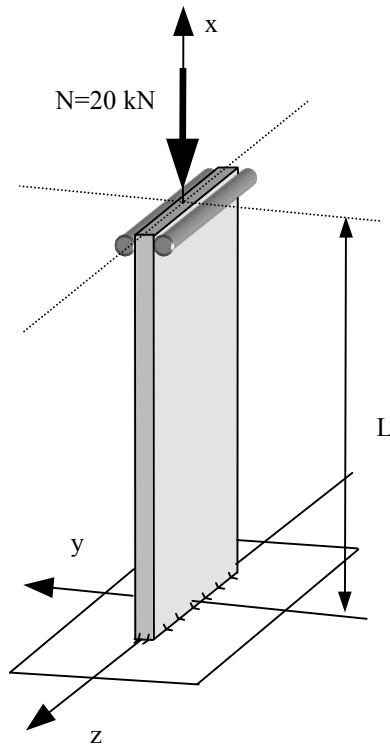
Comprobación de la validez de la fórmula de Euler (para b):

$$\omega_{cr} \quad | \quad \frac{N_{cr}}{A} \quad | \quad \frac{747 \text{ N}}{\frac{\phi^2}{4}} \quad | \quad 105 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \{ \quad \omega_e \quad | \quad 320 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{cumple}$$

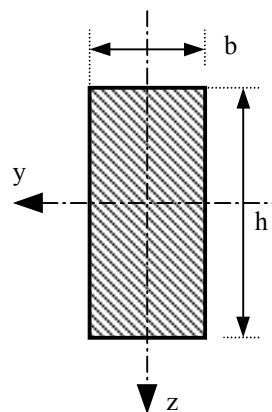
NOTAS: - Se ha simplificado la obtención de I,A sin utilizar reducciones de la sección.
 - A los valores de 91 N y 747 N hay que aplicarles un adecuado coeficiente de seguridad.

Problema 10.4

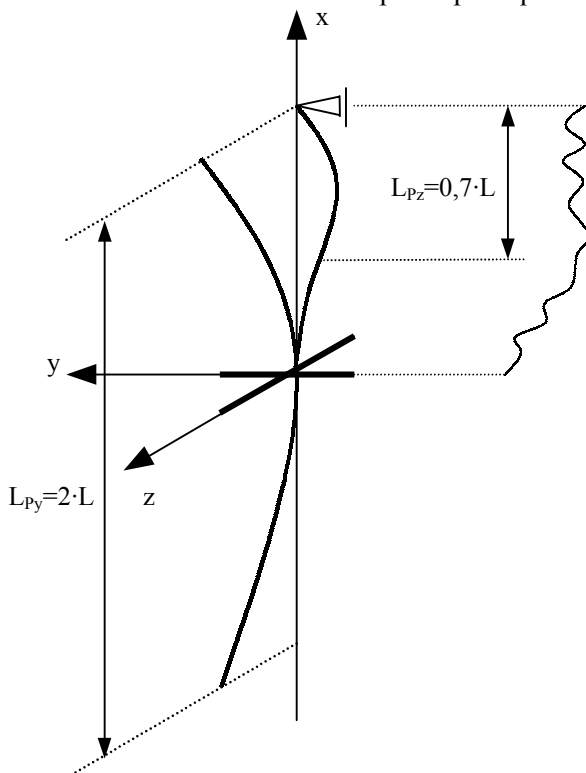
Calcular la sección rectangular más eficiente para la pieza de aluminio sometida a compresión centrada.



$L = 500 \text{ mm}$, $v_{\text{seg. pandeo}} = 3$
 Datos del Al:
 $E = 70000 \text{ N/mm}^2$
 $\omega_c = 20000 \text{ N}$

**Resolución:**

La relación b-h debe ser la óptima para que la N_{cr} sea la misma en ambas direcciones.



Flexión eje y:

$$N_{cr,1} \mid \frac{\phi^2 EI_y}{L_{py}^2} \mid \frac{\phi^2 E \left(\frac{1}{12} bh^3 \right)}{2L^2} \mid /10$$

Flexión eje z:

$$N_{cr,2} \mid \frac{\phi^2 EI_z}{L_{pz}^2} \mid \frac{\phi^2 E \left(\frac{1}{12} bh^3 \right)}{0,7^2 L^2} \mid /20$$

Iguando $N_{cr,1} = N_{cr,2}$

$$\frac{\phi^2 E \left(\frac{1}{12} bh^3 \right)}{2^2 L^2} \mid \frac{\phi^2 E \left(\frac{1}{12} bh^3 \right)}{0,7^2 L^2} \mid \Downarrow \mid \frac{h}{b} \mid \frac{2}{0,7}$$

Con esta relación, puede elegirse la fórmula (1) o (2):

$$v_{seg. pando} \left| \frac{N_{cr}}{N} \right| \leq 3 \quad \frac{\phi^2 E \left(\frac{1}{12} b h^3 \right)}{\frac{L^3}{2I^3}} \left| \leq 3 \right.$$

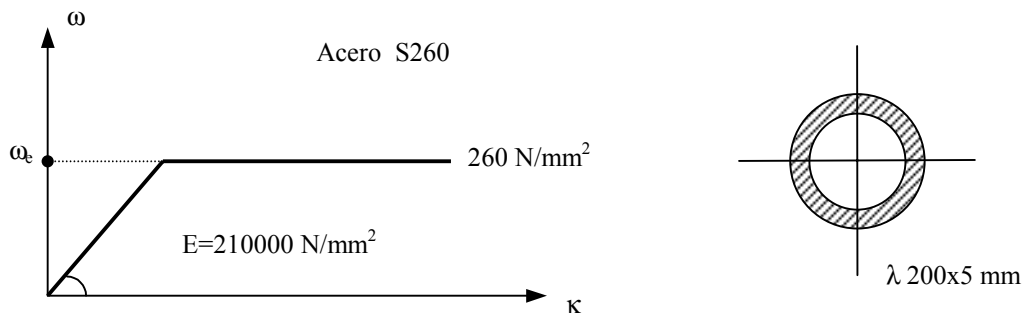
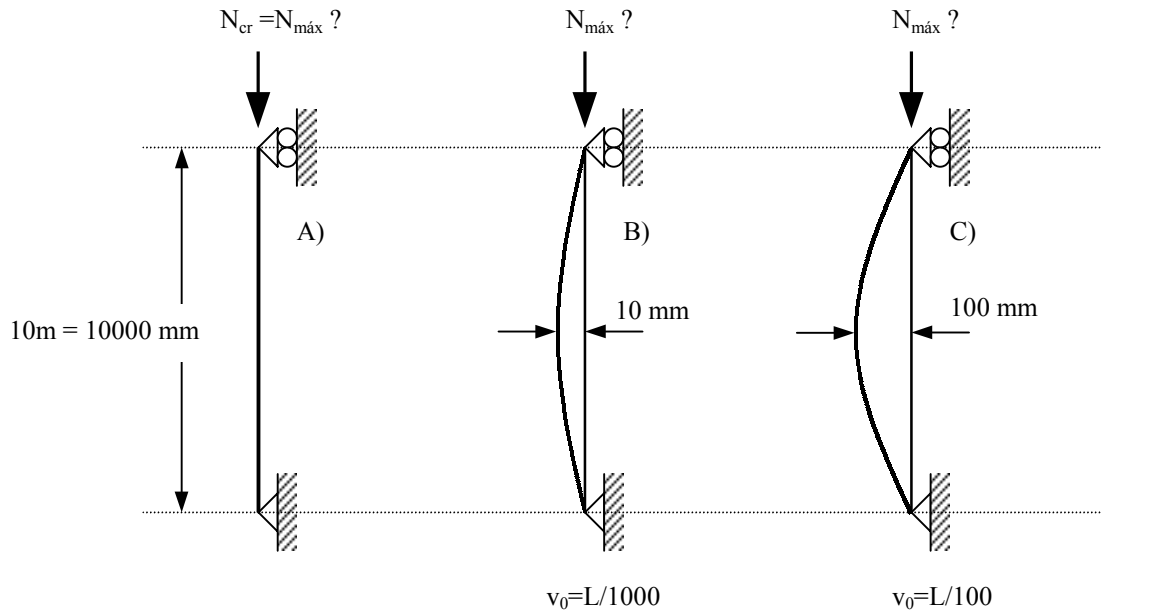
$$\frac{\phi^2 \left(\frac{70000}{20000} \left(\frac{1}{12} b \left(\frac{2}{10,7} b \right)^3 \right) \right)}{\frac{L^3}{2I^3}} \left| \leq 3 \right. \Downarrow \begin{cases} b \leq 14,5 \text{ mm} \\ h \leq 41,5 \text{ mm} \end{cases} \text{ se tomará: } 50 \times 15 \text{ mm}$$

Comprobación:

$$\omega_{cr} \left| \frac{N_{cr}}{A} \right| \leq \frac{60000}{14,5 \cdot 41,5} \circ 100 \text{ N/mm}^2 \{ \omega_e \text{ cumple} \}$$

Problema 10.5 *

Calcular la carga máxima, $N_{m\acute{a}x}$, en los tres casos:



Resolución:

a) En el primer caso, $N_{m\acute{a}x} = N_{cr}$, suponiendo que la $\omega_{cr} \leq \omega_e$

$$N_{cr} \mid \frac{\phi^2 EI}{L_p^2} \mid \frac{\phi^2 (210000 \mid \frac{\phi (200^2 + 4 \cdot 190^2)}{64})}{/10000 \text{ } \mathcal{O}} \mid 301952\text{ N}$$

$$\omega_{cr} \mid \frac{N_{cr}}{A} \mid \frac{301952\text{ N}}{\phi \mid \frac{(200^2 + 4 \cdot 190^2)}{4} \text{ mm}^2} \mid 99\text{ N/mm}^2 \{ \omega_e \text{ cumple}$$

b) El momento flector en el centro del vano: $M_{\text{Cx}} \left| \frac{L}{2} \right| = N \left(v_{\text{TOTAL}} \left| \frac{L}{2} \right| \right)$.

$$v_{\text{TOTAL}} \left| \frac{L}{2} \right| = \frac{1}{14} \frac{N}{N_{cr}} \hat{v}_0$$

$$\text{Factor de amplificación: } \frac{1}{14} \frac{N}{N_{cr}}$$

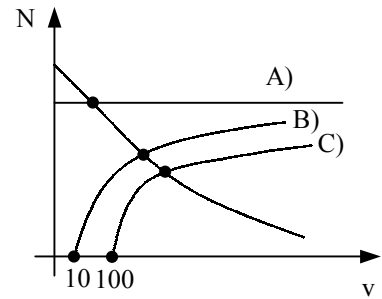
El corrimiento total depende de la relación $\frac{N}{N_{cr}}$.

Por la ecuación de la flexión $\omega_{\text{máx}} \left| \frac{N}{A} \right| 2 \frac{M}{W} \Omega \omega_e$

$$\frac{N_{\text{máx}} \left(\frac{1}{14} \frac{N_{\text{máx}}}{301952} \hat{v}_0 \right)}{\phi \left(\frac{200^2 \cdot 4 \cdot 190^2}{4} \right)^2} = \frac{N_{\text{máx}} \left(\frac{1}{14} \frac{N_{\text{máx}}}{301952} \hat{v}_0 \right)}{\phi^2 \left(\frac{200^2 \cdot 4 \cdot 190^2}{64} \right)} \hat{v}_0 = 260 \text{ N/mm}^2$$

Para $v_0 = 10 \text{ mm}$ tenemos $N_{\text{máx}} = 269500 \text{ N}$

c) Para $v_0 = 100 \text{ mm}$ tenemos $N_{\text{máx}} = 152000 \text{ N}$

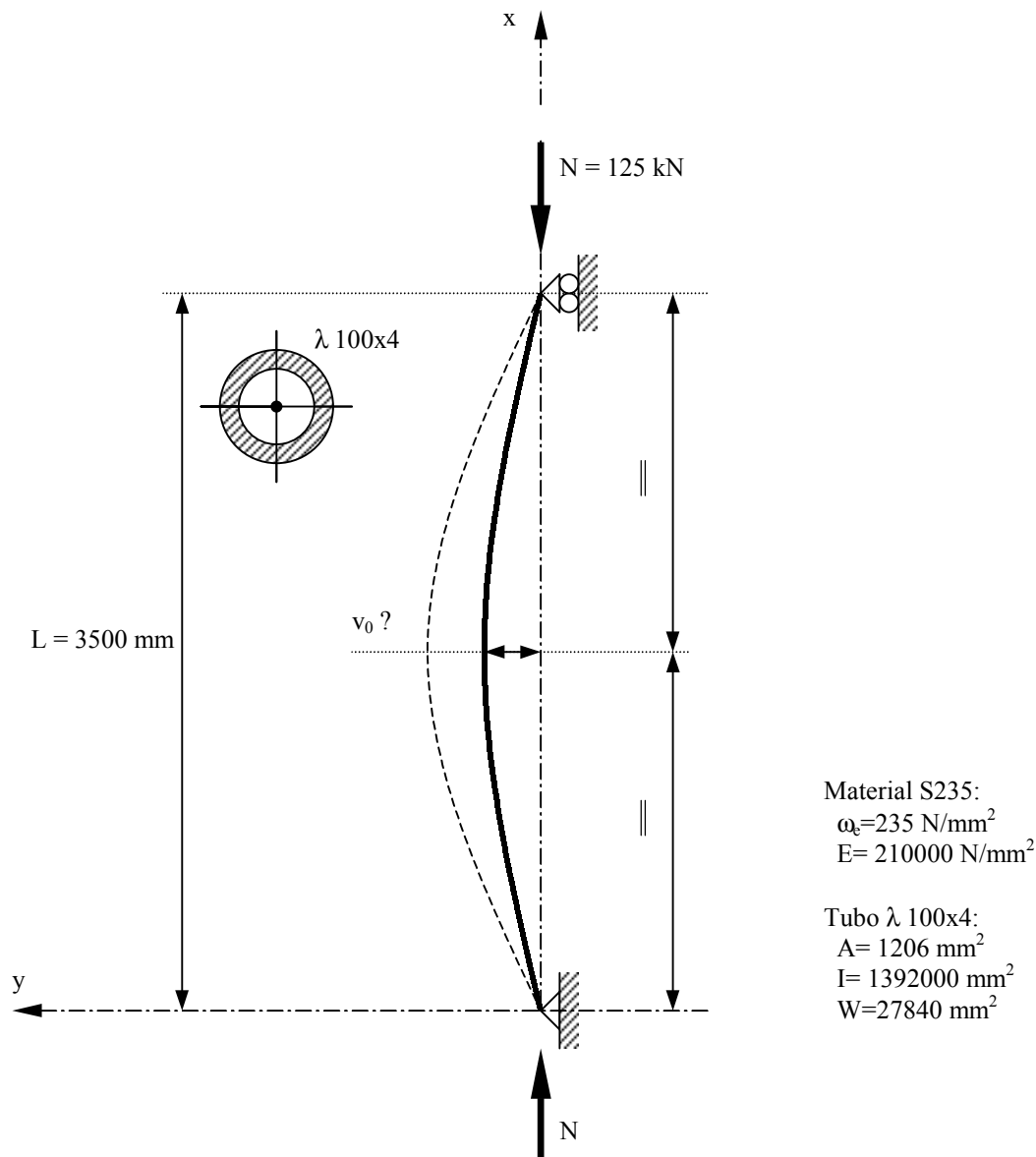


Problema 10.6 *

Calcular el valor de la imperfección geométrica inicial, v_0 , que provoca el fallo elástico del perfil tubular λ 100x4 mm sometido a $N = 125$ kN.

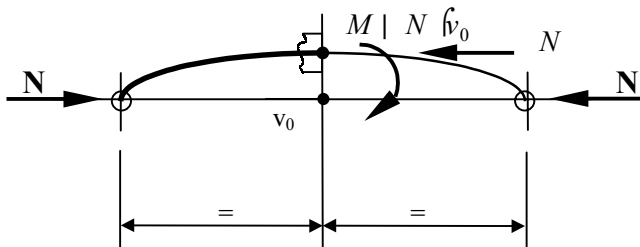
Resolver el problema utilizando dos modelos de cálculo:

- Análisis de 1^{er} orden, con la geometría caracterizada por el valor inicial v_0 .
- Análisis de 2^o orden, considerando la amplificación del valor inicial de v_0 .



Resolución:

a) Análisis de 1^{er} orden:



La sección más desfavorable $x = \frac{L}{2}$:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ N \frac{q_0}{2} \end{bmatrix}$$

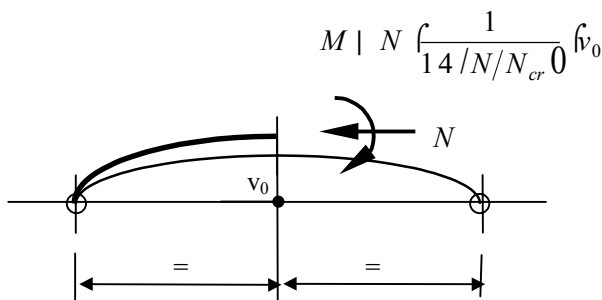
$$\omega_x = \frac{N}{A} + 2 \frac{M}{W} \quad \Omega \omega_e = 235 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{125000}{1206} + 2 \frac{125000 \frac{q_0}{2}}{27840} = 235 \text{ N/mm}^2$$

Despejando el valor de v_0 :

$$v_0 = \frac{235 \cdot 27840}{125000} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1206}{125000} = 29 \text{ mm}$$

b) Análisis de 2^o orden:



$$\omega_x = \frac{N}{A} + 2 \frac{1}{14 \frac{N}{N_{cr}}} \frac{N \frac{q_0}{2}}{W} \quad \Omega \omega_e$$

La carga crítica de Euler, N_{cr} :

$$N_{cr} = \frac{\phi^2 EI}{L_p^2} = \frac{\phi^2 \cdot 210000 \cdot 1392000}{3500^2} = 235517 \text{ N}$$

Así, el factor de amplificación vale

$$\frac{1}{14 \frac{N}{N_{cr}}} = \frac{1}{14 \frac{125000}{235}} = 2,13$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\frac{125000}{1206} \cdot 2,13 \left(\frac{125000 \cdot v_0}{27840} \right) = 235 \text{ N/mm}^2$$

Despejando el valor de v_0 :

$$v_0 = \frac{235 \cdot 1206}{2,13 \cdot 125000} \left(\frac{27840}{125000} \right) \cdot \frac{1}{2,13} = 13,7 \text{ mm}$$

Problema 10.7 *

Un tubo de acero 140x140x5 mm tiene una imperfección inicial de 50 mm respecto a la directriz teórica y está sometido a una leve carga de viento $q = 300 \text{ N/m}$ y a una carga axial de compresión $N = 100 \text{ kN}$.

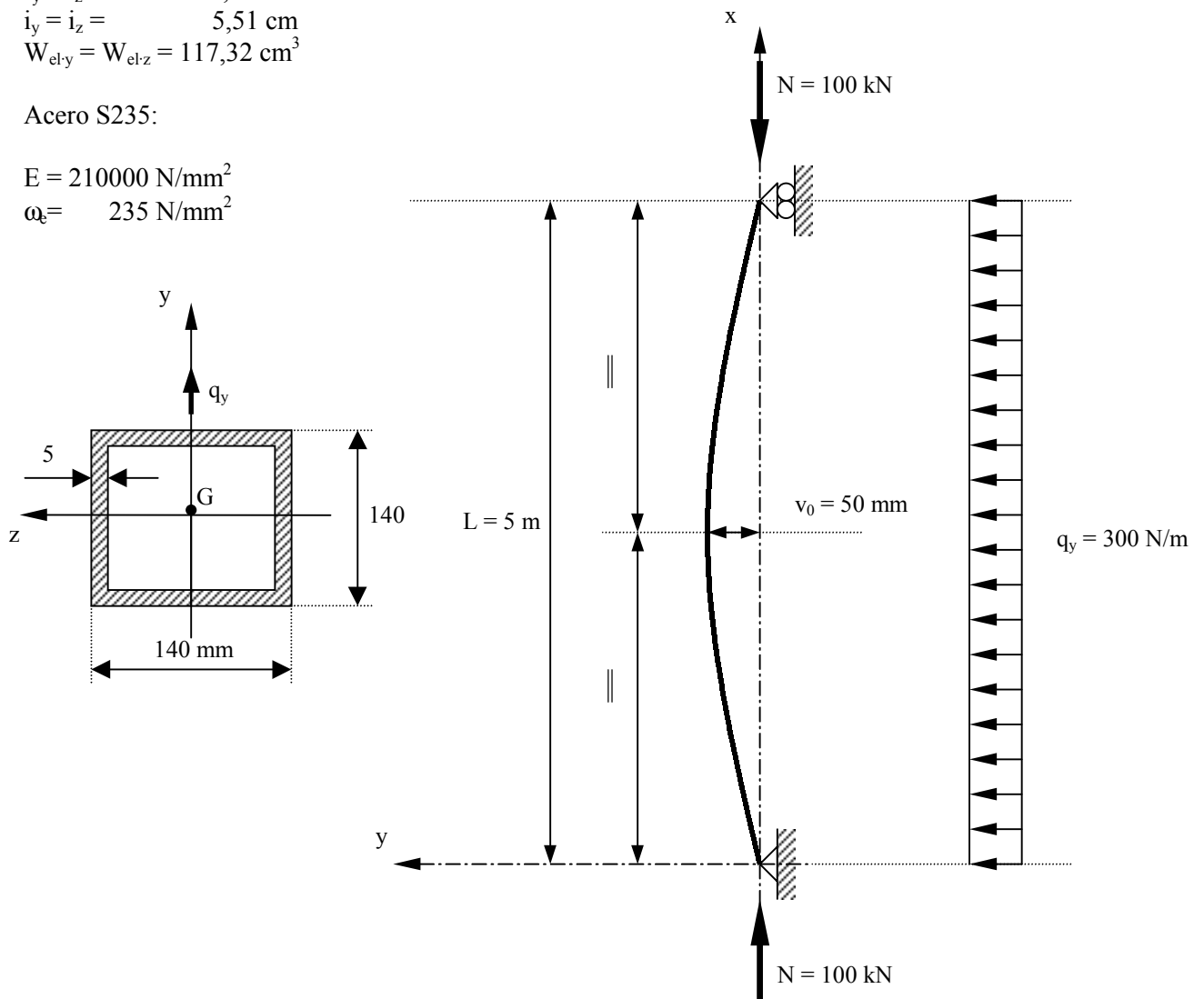
- Calcular la tensión normal máxima en la sección central en un análisis de 1^{er} orden.
- Calcular la tensión normal máxima en la sección central en una análisis de 2^{on} orden, es decir, considerando la interacción $N - M$ (esfuerzo normal – momento flector).

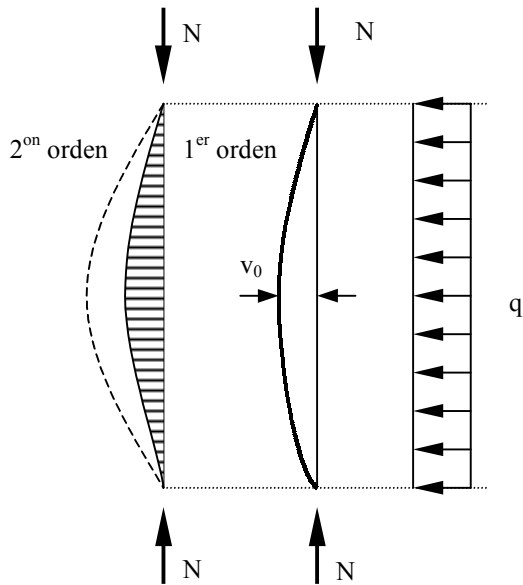
Tubo 140x140x5 mm:

$$\begin{aligned} A &= 26,70 \text{ cm}^2 \\ I_y = I_z &= 821,25 \text{ cm}^2 \\ i_y = i_z &= 5,51 \text{ cm} \\ W_{el-y} = W_{el-z} &= 117,32 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Acero S235:

$$\begin{aligned} E &= 210000 \text{ N/mm}^2 \\ \omega_k &= 235 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$



Resolución:

En un análisis de 2^{on} orden el diagrama de momentos flectores se ve amplificado por el efecto de la preflecha inicial (v_0) y de la interacción N-M.

a) Análisis de 1^{er} orden (sin considerar pandeo, con la geometría inicial del enunciado).

$$\omega_{x,\text{máx}} \mid \frac{N}{A} \mid 2 \frac{M_z}{W_z} \mid \frac{N}{A} \mid 2 \frac{\frac{1}{8} p L^2 \mid 2 \mid N \mid \hat{v}_0}{W_z} \mid /10$$

$$\mid \frac{100000}{2670} \mid 2 \frac{\frac{1}{8} \{0,3 \mid \sqrt{5000} \} \mid 2 \mid 100000 \mid \{50}}{117320}$$

$$\mid 37,45 \mid 2 \mid 7,99 \mid 2 \mid 42,62 \mid 88 \frac{N}{\text{mm}^2} \mid \{ \omega_e \quad \text{cumple}$$

b) Análisis de 2^{on} orden (amplificación de la preflecha inicial e interacción N-M).

$$\omega_{x,\text{máx}} \mid \frac{N}{A} \mid 2 \mid K_2 \mid \left(\frac{1}{8} \frac{p L^2}{W_z} \right) \mid 2 \mid \frac{1}{14} \frac{N}{N_{cr}} \mid \left(\frac{N}{W_z} \hat{v}_0 \right) \mid /20$$

Cálculo de la carga crítica elástica de Euler, N_{cr} :

$$L_{p_z} \mid 5000 \text{ mm} \mid \Downarrow \mid N_{cr} \mid \frac{\phi^2 EI}{L_{p_z}^2} \mid \frac{\phi^2 \{210000 \mid \{212500}}{/5000} \mid 680855 \text{ N}$$

Para el factor de amplificación K_2 , se elige la expresión aproximada (*):

$$K_2 = \frac{1}{14 \frac{N}{N_{cr}}} \approx \frac{1}{14 \frac{100000}{680855}} \approx 1,172$$

Así, finalmente (2):

$$\omega_{x,\max} \approx 37,45 \cdot 2 \cdot 1,17 \cdot 7,99 \cdot 2 \cdot 1,17 \cdot 42,62 \cdot 96,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \{ \omega_e \quad \text{cumple}$$

(*) Cálculo exacto de K_2 :

$$u \approx \frac{\phi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}} \approx \frac{\phi}{2} \sqrt{\frac{100000}{680855}} \approx 0,602 \text{ rad}$$

$$K_2 \approx \frac{2 \sqrt{14 \cos(u)}}{u^2 \cos(u)} \approx \frac{2 \sqrt{14 \cos(0,602)}}{0,602^2 \cos(0,602)} \approx 1,177$$

Problema 10.8 *

Un tubo circular λ 100x4 mm de acero está sometido permanentemente a una carga puntual transversal, $F = 5\text{ kN}$, en el centro del vano.

Mediante un cilindro hidráulico se puede aplicar una carga axial variable en el extremo.

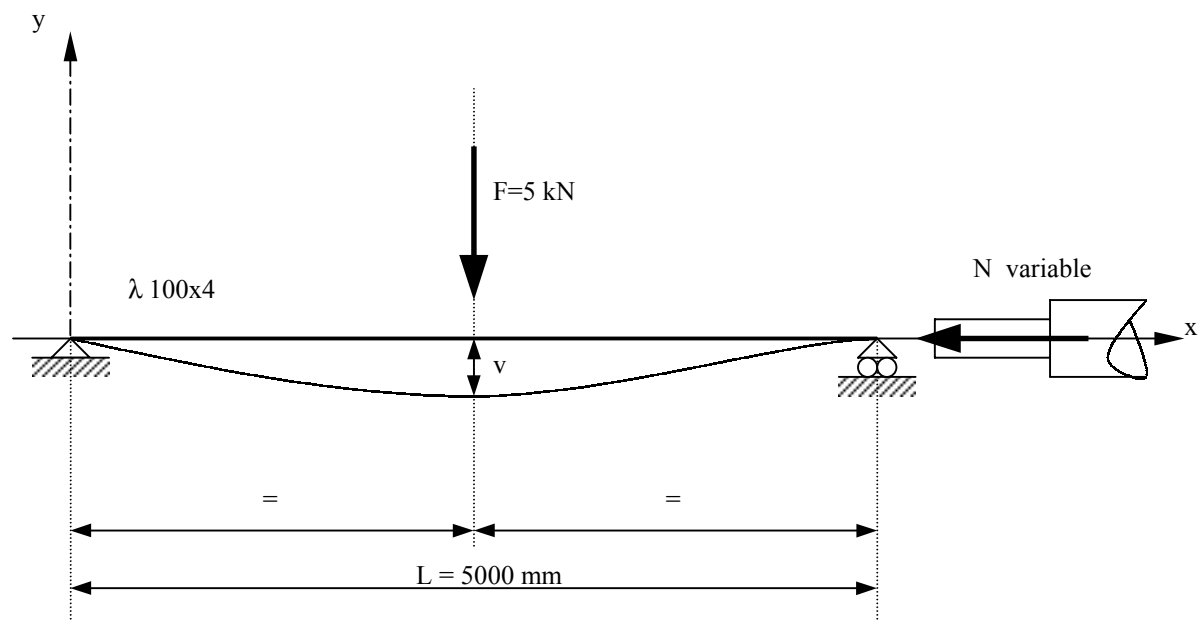
Suponiendo un comportamiento ideal de elasticidad indefinida para el material:

- Calcular la carga axial máxima soportada por el sistema, al poder producirse su colapso por inestabilidad elástica.
- Representar gráficamente la relación $N-v$, mediante un modelo teórico de 2º orden, es decir, considerando la interacción entre el esfuerzo normal y el momento flector.

A continuación, suponiendo un comportamiento real de material, con una tensión de límite elástico $\sigma_e = 380\text{ N/mm}^2$.

- Calcular la carga N que provoca el fallo elástico del perfil.

$$\text{Material S380: } E = 210000\text{ N/mm}^2 \quad \sigma_e = 380\text{ N/mm}^2$$

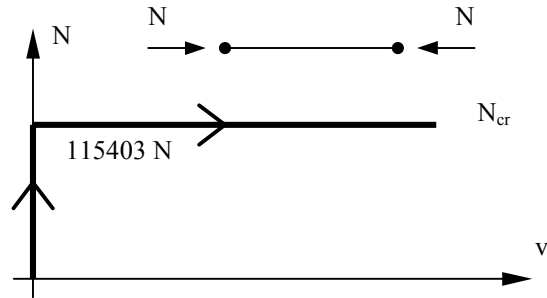
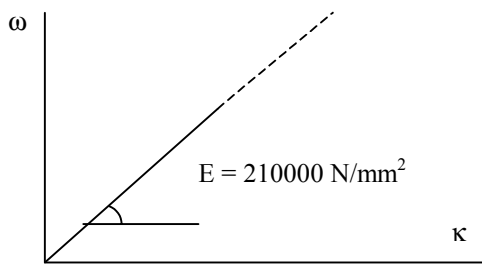


Resolución:

a)

$$N_{cr} = \frac{\phi^2 EI}{L_p^2} = \frac{\phi^2 (210000 \text{ N/mm}^2) (392000 \text{ mm}^4)}{5000^2} = 115403 \text{ N}$$

Hipótesis: Elasticidad indefinida.



b) Considerando la interacción N – M.

$$v = \frac{F L^3}{48EI} K_3 = \frac{5000 (5000)^3}{48 (210000) (392000)} K_3 = 44,54 K_3 \text{ mm}$$

donde K_3 es el factor de amplificación.Cálculo exacto de K_3 :

$$K_3 = \frac{3 \left(\frac{u}{L} \right)^3}{\frac{3}{2} \left(\frac{u}{L} \right) \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}} + \frac{4}{2} \left(\frac{u}{L} \right) \sqrt{\frac{N}{115403}} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{N}{115403}}}$$

$$u = \frac{\phi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}} = \frac{\phi}{2} \sqrt{\frac{N}{115403}}$$

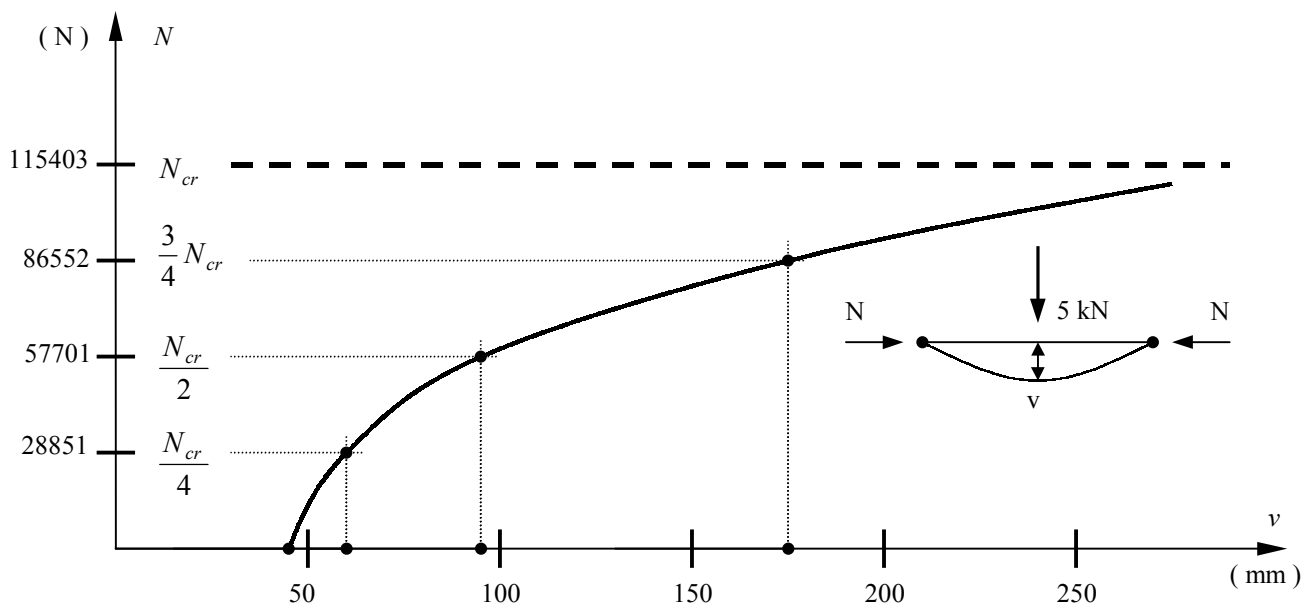
Cálculo aproximado de K_3 :

$$K_3 = \frac{1}{14 \frac{N}{N_{cr}}} = \frac{1}{14 \frac{N}{115403}}$$

Tabla de valores de la función $N - v$

N	$v_{\text{exact.}}$	$v_{\text{aprox.}}$
0	44,54	44,54 mm
$N_{cr}/4=28851$ N		59,39 mm
$N_{cr}/2=57701$ N		89,08 mm
$3N_{cr}/4=86552$ N		178,16 mm

La representación gráfica de la función $N - v$:



La curva de respuesta $N - v$, considerando la interacción entre el esfuerzo normal y el momento flector, es asintótica al valor de la carga crítica de Euler $N_{cr} = 115403$ N.

Suponiendo una elasticidad indefinida del material el fallo de la pieza se produce con el mismo valor de N_{cr} .

c) Sin embargo, antes de llegar a esta situación el material habrá superado la tensión del límite elástico. Para el material real:

$$\omega \mid \frac{N}{A} + 2K \left(\frac{M}{W} \right) \Omega \omega_e$$

$$\omega \mid \frac{N}{A} + 2 \frac{M}{W} \Omega \omega_e, \text{ donde } M \approx K \left(\frac{1}{4} \right) (F) (\bar{L})$$

$$\frac{N}{1206} - 2 \frac{1}{14 \frac{N}{115403}} \left(\frac{1}{27840} \right) = 380 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Resolución de la ecuación de 2º grado:

$$\frac{N}{1206} - 2 \frac{115403}{115403 \cdot 4 \cdot N} \left(\frac{1}{27840} \right) = 380$$

$$115403 \left(\frac{1}{27840} \right) - \frac{380 \cdot 4 \cdot N}{1206} = 0$$

$$25965675 - 43853140 \cdot 4 \cdot 95,69 \left(\frac{1}{N} \right) - 380 \left(\frac{N^2}{1206} \right)$$

$$0 = \frac{1}{1206} \left(N^2 - 4 \cdot 475,69 \right) - \frac{1}{N} \left(17887465 \right)$$

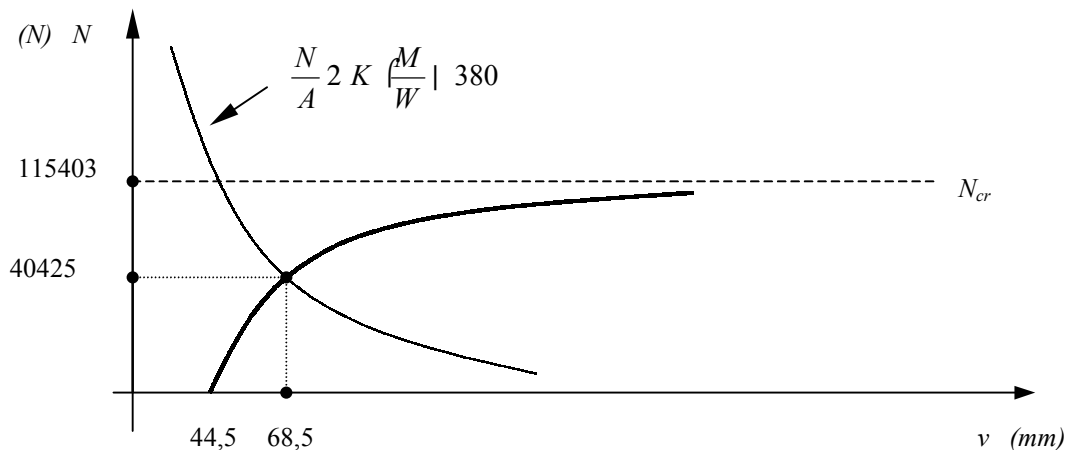
$$N = \frac{4b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \cdot 475,69 \pm \sqrt{475,69^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{1206} \right) \cdot 17887465}}{2 \cdot \left(\frac{1}{1206} \right)} = \begin{cases} 40425 \text{ N} \\ 533630 \text{ N} \end{cases} \quad \text{/sin sentido } N_{cr} = 0$$

Se cumplen la hipótesis de aproximación para el cálculo del factor de amplificación K:

$$N < \Omega,6 \cdot N_{cr} \quad 40425 < 0,6 \cdot 115403 = 69242$$

$$K = \frac{1}{14 \frac{N}{N_{cr}}} = 1,54$$

Representación gráfica del apartado c):



c') Un planteamiento parecido del problema es considerar que $v_0=44,5$ mm constituye una flecha inicial.

El momento flector $\frac{1}{4} FL$ resta constante y la amplificación es debida al termino

$$N \left(v \right) = N \left(\frac{1}{4} \frac{N}{N_{cr}} v_0 \right)$$

Los resultados obtenidos no difieren excesivamente de la solución exacta:

$$\omega = \frac{N}{A} \cdot 2 \frac{M}{W} \Omega \omega_e, \text{ donde } M = K \left(\frac{1}{4} FL \right) = N \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{1}{4} \left(5000 \right) \left(5000 \right) = 2 N \left(44,54 \right) \left(\frac{1}{4} \frac{N}{115403} \right) = 380 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Resolución de la ecuación de 2º grado:

$$\frac{N}{1206} \cdot 2 \cdot 225 \cdot 2 \cdot \frac{44,54}{27840} \left(\frac{115403 N}{115403 \cdot 4 N} \right) = 380$$

$$\frac{44,54 \left(\frac{115403 N}{27840} \right) \left(\frac{115403 N}{115403 \cdot 4 N} \right) + \frac{N}{1206} \cdot 4 \cdot 225 \left(\frac{115403 N}{115403 \cdot 4 N} \right) = 0$$

$$184,6 N + 4115 N \cdot 2 \cdot \frac{N^2}{1206} = 17887465 + 95,69 N$$

$$0 = \frac{1}{1206} \left(N^2 + 4 \cdot \frac{435}{b} \right) \left(N + 2 \cdot \frac{17887465}{c} \right)$$

$$N = \frac{4b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \left[\begin{array}{l} 44977 \text{ N} \\ 479633 \text{ N} \end{array} \right] \text{ /sin sentido } \} N_{cr} = 0$$

Bibliografía

- COURBON, J. *Resistencia de materiales* (I y II). Madrid, Aguilar, 1968.
- LAROZE, S. *Resistance des materiaux et Structures* (I,II,III y IV). París, Eyrolles-Masson & Cia, 1974.
- LOVE, A.E.H. *A treatise on the mathematical Theory of Elasticity*. New York, Dover, 1944.
- NEUBER, H. *Mecánica técnica* (II). Madrid, Dossat, 1977.
- ORTIZ, L. *Elasticidad*. Madrid, Mc Graw-Hill, 1998.
- ORTIZ, L. *Resistencia de materiales*. Madrid, Mc Graw-Hill, 1991.
- ROURE, F.; MARIMÓN, F.; AYNETO, X., *Resistencia de materiales* (Fascículos). Barcelona, CPDA-ETSEIB, 1998
- TIMOSHENKO, S.P., *Resistencia de materiales*. Madrid, Espasa-Calpe, 1967.
- UGURAL, A.C.; FENSTER, S.K. *Advanced Strength and applied Elasticity*. New York, Elsevier, 1987.