MA1002, Auxiliar 8
Cálculo Diferencial e Integral
14 de enero, 2010
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando

Preliminares

Recordemos que si $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ lo podemos representar por $\vec{x} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y $\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sea una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ y $r : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización cualquiera de esta. Definimos la longitud de arco o de la curva como :

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\frac{d\vec{r}}{dt}\|dt$$

Definamos ahora la función $s(t) = \int_a^t \|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\|d\tau$, don t es el parámetro de la parametrización anterior. Notemos que la expresión anterior define una ecuación para s y t así despejando t en la definición de $s(t)$ definimos la **parametrización longitud de arco** como $\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$. De esta forma y mediante la parametrización Longitud de arco podemos definir:

1. Vector Tangente
$$\overrightarrow{T}(s) = \frac{d\overrightarrow{\sigma}(s)}{ds}$$
2. Vector Normal
$$\overrightarrow{N}(s) = \frac{\frac{d\overrightarrow{T}(s)}{ds}}{\|\frac{d\overrightarrow{T}(s)}{ds}\|}$$
3. Vector Binormal
$$\overrightarrow{B}(s) = \overrightarrow{T}(s) \times \overrightarrow{N}(s)$$
4. Torsión
$$\tau(s) = -\overrightarrow{N}(s) \cdot \frac{d\overrightarrow{B}(s)}{ds}$$
5. Curvatura
$$\kappa(s) = \|\frac{d\overrightarrow{T}(s)}{ds}\|$$

Notando que $\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\vec{r}}{dt}\|$ podemos rescribir las definiciones para una parametrización r cualquiera. Así

1. Vector Tangente
$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\|}$$
2. Vector Normal
$$\overrightarrow{N}(s) = \frac{\frac{d\overrightarrow{T}(t)}{dt}}{\|\frac{d\overrightarrow{T}(t)}{dt}\|}$$
3. Vector Binormal
$$\overrightarrow{B}(t) = \overrightarrow{T}(t) \times \overrightarrow{N}(t)$$
4. Torsión
$$\tau(t) = -\overrightarrow{N}(t) \cdot \frac{d\overrightarrow{B}(t)}{dt} \frac{1}{\|\frac{d\vec{r}}{dt}\|}$$
5. Curvatura
$$\kappa(t) = \frac{\|\frac{d\overrightarrow{T}(t)}{dt}\|}{\|\frac{d\vec{r}}{dt}\|}$$

Sistemas de Cordenadas Importantes

1. **Cilindricas:** Definidas por un radio r, un angulo $\theta \in [0, 2\pi]$ y una altura z.
$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z$$
2. **Esféricas:** Definidas por un radio r, un angulo $\theta \in [0, 2\pi]$ y un angulo $\phi \in [0, \pi]$.
$$x = r\sin(\phi)\cos(\theta), y = r\sin(\phi)\sin(\theta), z = \cos(\phi)z$$

Problemas

P1. Sea $\vec{\sigma}(t) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Denotamos por $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$ los vectores tangente, normal y binormal, respectivamente. Sea $\kappa(t)$ la curvatura y $\tau(t)$ la torsión. Suponga que la curva es plana y que $\kappa(t) \neq 0, \forall t \in [a,b]$.
La evoluta Γ' de Γ se define por la curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + \frac{N(t)}{\kappa(t)}.$$

(i) Suponga que $\kappa'(t) \neq 0,\ \forall t \in [a,b]$. Pruebe que la evoluta es una curva regular y que el vector tangente a la evoluta en t es paralelo a $N(t)$.
Ind: Si lo prefiere, puede suponer que Γ está parametrizada en longitud de arco.

(ii) Ahora, sea Γ una espiral logarítmica de parametrización:

$$\vec{\sigma}(t) = (ae^t \cos t, ae^t \sin t),\ \ t \in \mathbb{R}$$

donde a es una constante positiva. Calcule la evoluta Γ' de la espiral logarítmica Γ. ¿Qué puede decir sobre Γ'?

P2. Considere la curva Γ que se obtiene como intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, donde $a > 0$.

a) Encuentre una parametrización para Γ.

b) Suponga que Γ es un alambre con densidad de masa $\rho\,(x,y,z) = \frac{2a}{\sqrt{8a^2-x^2-y^2}}$. Calcule la masa del alambre.

P3. Sea Γ la curva definida por la intersección de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 1$ y el cono de ecuación $z^2 = x^2+y^2$. Calcular la integral de linea $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si $\vec{F}$ es el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2+z)\vec{i} + (y^2+x)\vec{j} + (z^2+y)\vec{k}$$

P4. Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$.

P5. Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int\limits_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt$, distinguiendo los casos $\alpha = 1$ y $\alpha \neq 1$. En caso de que la integral converja, calcule su valor.

P6. Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$, sean $A = \int\limits_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ y $B = \int\limits_1^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$, muestre que A y B son finitas e iguales.