Introducción a la Física Newtoniana - FI1001-4
Profesor: Nicolás Mujica F.

Ejercicio 3

En una carrera de autos, un Ford Thunderbird y un Mercedes Benz se desplazan, uno al lado del otro, a lo largo de una recta a una rapidez constante de $200km/h$. El Thunderbird agota su combustible y se ve obligado a detenerse para rellenar el estanque. Para ello, comienza a desacelerar hasta detenerse después de recorrer una distancia de 200 m. Los mecánicos se demoran $8s$ en cargar combustible y el conductor del Thunderbird acelera hasta alcanzar nuevamente una rapidez constante de $200km/h$, después de recorrer una distancia $400m$. Suponga que en $t = 0$ el Thunderbird comienza su desaceleración debido la falta de combustible y que el Mercedes Benz siempre se mueve con rapidez constante.

a) Deduzca la posición, velocidad y aceleración de cada auto como funciones del tiempo. En el caso del Ford Thunderbird escriba explícitamente estas funciones por pedazos (periodo de desaceleración, cuando se detiene a cargar combustible y cuando acelera nuevamente), indicando los valores numéricos de las constantes en las ecuaciones de trayectoria. (4 pts)

b) Haga un gráfico y dibuje con detalle la trayectoria de cada auto. (1 pt)

c) En el preciso instante en que el Thunderbird recupera su rapidez de 200 km/h después de cargar combustible, ¿A qué distancia se encuentra del Mercedes Benz? (1 pt)

Solución.

a) Llamaremos T al conductor del Thunderbird y M al del Mercedes. Además si $v_0 = 200km/h$, $t_0 = 8s$, $d_1 = 200m$, $d_2 = 400m$ y llamamos a_1 a la aceleración con que frena el Thunderbird y a_2 a la aceleración con la que acelera en la parte final del trayecto, las ecuaciones de movimiento para ambos autos es ...

$$x_M(t) = v_0 t \tag{1}$$

$$x_T(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

Pero sabemos que T frena recorriendo una distancia d_1, luego de la ecuación de Torricelli ...

$$a = \frac{v_0^2}{2d_1} \tag{3}$$

Con esto, (2) queda $x_T(t) = v_0 t - \frac{v_0^2}{4d_1}t^2$. Si llamamos $\bar{t}$ al tiempo que se demora en frenar (o sea, en recorrer la distancia d_1), entonces usando la ecuación de la velocidad se tiene ...

$$v(\bar{t}) = 0 = v_0\bar{t} - \frac{v_0^2}{2d_1}\bar{t} \tag{4}$$

De donde,

$$\bar{t} = \frac{2d_1}{v_0} \tag{5}$$

Ahora lo que ocurre es que T esta detenido por $t_0 = 8s$, mientras M sigue moviendose a una rapidez v_0. Luego de esto, T comienza a acelerar con a_2. Luego si fijamos $t = 0$ al instante donde T empieza a acelerar,

$$\begin{aligned} x_M(t) &= v_0(\bar{t} + t_0) + v_0 t && (6) \\ x_T(t) &= d_1 + \frac{1}{2} a_2 t^2 && (7) \end{aligned}$$

Donde usamos que la nueva posición inicial de M es $x_{M0} = v_0(\bar{t} + t_0)$.
Ademas sabemos también que T recorre una distancia d_2 hasta que alcanza un rapidez v_0, luego:

$$a_2 = \frac{v_0^2}{2d_2} \tag{8}$$

Con esto, (7) queda ...

$$x_T(t) = d_1 + \frac{v_0^2}{4d_2} t^2 \tag{9}$$

Y la rapidez,

$$v_T(t) = \frac{v_0^2}{2d_2} t \tag{10}$$

Además sabemos que al final de esta parte alcanza una rapidez v_0, luego ...

$$v_0 = \frac{v_0^2}{2d_2} t^* \tag{11}$$

$$t^* = \frac{2d_2}{v_0} \tag{12}$$

Con esto, podemos resumir todo en ...

$$x_T(t) = \begin{cases} v_0 t - \frac{v_0^2}{4d_1} t^2 & \text{si} \quad 0 < t < \frac{2d_1}{v_0} \\ d_1 & \text{si} \quad \frac{2d_1}{v_0} < t < \frac{2d_1}{v_0} + t_0 \\ d_1 + \frac{v_0^2}{4d_2} \left(t - \left(\frac{2d_1}{v_0} + t_0 \right) \right)^2 & \text{si} \quad \frac{2d_1}{v_0} + t_0 < t < \frac{2d_1}{v_0} + t_0 + \frac{2d_2}{v_0} \\ d_1 + d_2 + v_0 \left(t - \left(\frac{2d_1}{v_0} + t_0 + \frac{2d_2}{v_0} \right) \right) & \text{si} \quad t > \frac{2d_1}{v_0} + t_0 + \frac{2d_2}{v_0} \end{cases}$$

Y la rapidez queda:

$$v_T(t) = \begin{cases} v_0 - \frac{v_0^2}{2d_1} t & \text{si} \quad 0 < t < \frac{2d_1}{v_0} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{2d_1}{v_0} < t < \frac{2d_1}{v_0} + t_0 \\ \frac{v_0^2}{2d_2} \left(t - \left(\frac{2d_1}{v_0} + t_0 \right) \right) & \text{si} \quad \frac{2d_1}{v_0} + t_0 < t < \frac{2d_1}{v_0} + t_0 + \frac{2d_2}{v_0} \\ v_0 & \text{si} \quad t > \frac{2d_1}{v_0} + t_0 + \frac{2d_2}{v_0} \end{cases}$$

Y para el Mercedes,

$$
\begin{aligned}
x_M(t) &= v_0 t && (13)\\
v_M(t) &= v_0 && (14)
\end{aligned}
$$

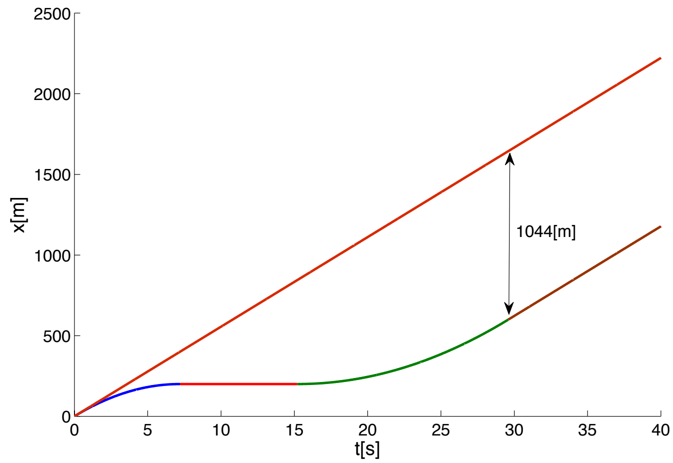
b) 

FIGURA 1. Posición de ambos autos.

c) Por lo tanto, la posición de T, luego de que recuperó la rapidez v_0 es $x_{Tf} = d_1 + d_2 = 600m$. Y la posición final de M:

$$
x_{Mf} = v_0 \left(\frac{2d_1}{v_0} + t_0 + \frac{2d_2}{v_0} \right) \approx 1644m \tag{15}
$$

Y por lo tanto, la diferencia entre las posiciones es $\Delta \approx 1044m$.