Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
Electromagnetismo FI2002

Solución Auxiliar N°8

Profesor Cátedra: Claudio Romero
Profesores Auxiliares: Felipe Larraín, Víctor Medina
Fecha: Miércoles 26 de Mayo de 2010

Problema 1

(a)

$$V_{dip} = \frac{\overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'})}{4\pi\varepsilon_0 \parallel \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \parallel^3}$$

Si el sistema de referencia está en el orígen del dipolo,

$$V_{dip} = \frac{pcos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Donde θ y r son variables de coordenadas esféricas. Como en este problema se sabe que $p = VP$,

$$p = \frac{4}{3}\pi R^3 \chi_e \varepsilon_0 E_{int}$$

El potencial queda,

$$V_{dip} = \frac{R^3 (\varepsilon - 1) E_{int}}{3} \frac{cos\theta}{r^2}$$

(b) Exigir continuidad se reduce a la siguiente expresión:

$$\left[\frac{R^3 (\varepsilon - 1) E_{int}}{3} \frac{cos\theta}{r^2}\right]_{r=R} + [-Ercos\theta]_{r=R} = [-E_{int} rcos\theta]_{r=R}$$

Se despeja que,

$$E_{int} = \frac{3E}{\varepsilon + 2}$$

Problema 2

(a)

$$\overrightarrow{F} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\hat{k}$$

(b) La fuerza recalculada es

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k}Q = -\frac{Q^2}{A\varepsilon_0}\hat{k}$$

(a) y (b) no son iguales pues la fuerza recalculada no corresponde a lo pedido en (a). Si se desea usar $\overrightarrow{F} = Q\overrightarrow{E}$, el campo eléctrico a utilizar debe ser aquel dado por la placa opuesta únicamente (fuerzas iguales y opuestas, se cumple acción y reacción). Si se considera el campo generado por ambas, se considera más campo eléctrico que el que ve cada placa. El campo eléctrico generado por una sola placa lleva el factor un medio faltante en la expresión anterior.

(c) La capacidad del sistema queda, con la aproximación de placas paralelas, ($2n$ placas implican n condensadores, y de la figura, están en paralelo)

$$C_{2n}(\theta) = n\frac{\varepsilon_0}{z}A(\theta) = n\frac{\varepsilon_0}{z}\frac{\rho^2}{2}(\pi - \theta)$$

El torque queda, (torque proveniente del campo eléctrico)

$$\tau = -\frac{dW}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) = -\frac{Q^2}{2}\left(\frac{-dC/d\theta}{C^2}\right) = -\frac{Q^2}{2}\left(\frac{n\frac{\varepsilon_0}{z}\frac{\rho^2}{2}}{\left(n\frac{\varepsilon_0}{z}\frac{\rho^2}{2}(\pi-\theta)\right)^2}\right) = -Q^2\left(\frac{z}{n\varepsilon_0\rho^2(\pi-\theta)^2}\right)$$

Problema 3

(a)

$$\overrightarrow{J} = \frac{-V_0}{\rho\left(\frac{\theta_1}{g_1} + \frac{\theta_2}{g_2}\right)}\hat{\theta}$$

$$\overrightarrow{E}_i = \frac{\overrightarrow{J}}{g_i},\ i = 1, 2.$$

$$R = \frac{\frac{\theta_1}{g_1} + \frac{\theta_2}{g_2}}{z ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

(b)

$$\sigma_l(\rho) = \frac{-V_0}{\rho\left(\frac{\theta_1}{g_1}+\frac{\theta_2}{g_2}\right)}\left(\frac{\varepsilon_1}{g_1}-\frac{\varepsilon_2}{g_2}\right)$$

Problema 4

De la ley de kirchoff de voltajes para un bucle en la figura del enunciado,

$$-V(x) + RdxI(x) + V(x+dx) = 0$$

Asimismo, de la ley de corrientes de kirchoff para un nodo,

$$I(x) - \frac{1}{rdx}V(x) = I(x+dx)$$

Es decir,

$$I(x) - GdxV(x) = I(x+dx)$$

Las ecuaciones quedan,

$$\frac{dV(x)}{dx} = -RI(x)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = -GV(x)$$

Por lo tanto,

(a)

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = RGV(x)$$

(b) Resolviendo la ecuación de (a) y usando que $V(x=0)=V_0$, $V(x=L)=0$, se obtiene,

$$V(x) = \frac{V_0}{e^{\sqrt{RG}L}-e^{-\sqrt{RG}L}}\left(e^{\sqrt{RG}(L-x)}-e^{-\sqrt{RG}L}\right)$$

(c)

$$I(x) = \sqrt{\frac{G}{R}}\frac{V_0}{e^{\sqrt{RG}L}-e^{-\sqrt{RG}L}}\left(e^{\sqrt{RG}(L-x)}-e^{-\sqrt{RG}L}\right)$$