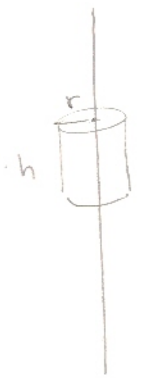
Pauta P1C1 FI2002-4 2010-1

- Campo producido por un cable infinito:



Se calculará el campo mediante la ley de Gauss.

Por simetría, se asume $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ (coord. cilíndricas)

Como volumen Ω se considera un cilindro de altura h y radio r.

$$\oint\!\!\oint_{\sigma(\Omega)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \qquad (*)$$

En cilíndricas se tiene que $\vec{dS} = r\,d\phi\,dz\,\hat{r} + dr\,dz\,\hat{\phi} + r\,dr\,d\phi\,\hat{k}$.

En este caso $Q_T = \lambda \cdot h$.

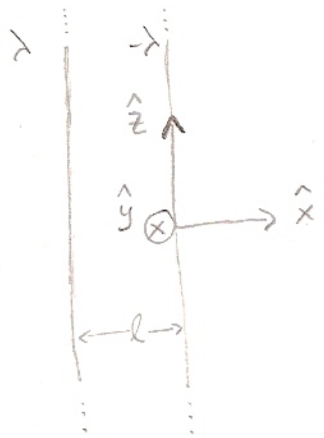
Luego, reemplazando en $(*)$ queda:

$$\oint\!\!\oint_{\sigma(\Omega)} E(r)\underline{\hat{r}} \cdot (r\,d\phi\,dz\,\underline{\hat{r}} + \cancel{dr\,dz\,\hat{\phi}} + \cancel{r\,dr\,d\phi\,\hat{k}}) = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} E(r) \cdot r\,d\phi\,dz = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi \cdot \cancel{h} \cdot E(r)\,r = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}\hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2}$$

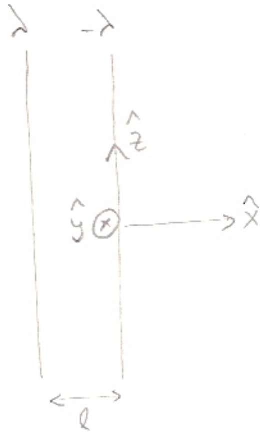
- Considerando ahora el caso de los 2 cables infinitos:



Por superposición, el campo producido por el conjunto, acorde al sist. de referencia indicado queda dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} + \ell\hat{x}}{\|\vec{r} + \ell\hat{x}\|^2} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2}$$

Para simplificar los cálculos, y dada la figura del enunciado, se considera $\vec{r} = x\hat{x}$. Luego:



$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\cancel{(x+l)}\hat{x}}{(x+l)^{\cancel{2}}} - \frac{\cancel{x}\hat{x}}{x^{\cancel{2}}}\right]$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left[\frac{1}{x+l} - \frac{1}{x}\right]}_{\frac{x-(x+l)}{x(x+l)} = \frac{-l}{x(x+l)}}\hat{x}$$

$$\vec{E}(x) = \frac{-\lambda l}{2\pi\varepsilon_0 x(x+l)}\hat{x}$$

$$\lim_{\substack{l\to 0\\ \lambda\to\infty\\ \lambda l\to Q}} \vec{E}(x) = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{x} = \vec{E}_L(x) \qquad 3.0$$

Por otro lado, $\vec{E} = -\nabla V$, luego, en este caso se tiene:

$$\vec{E}_L(x) = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{x} = -\nabla V_L = -\frac{\partial V_L}{\partial x}\hat{x}$$

$$\frac{\partial V_L}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x^2} \quad \Big/ \int_{+\infty}^{x}(\quad)dx$$

$$V_L(x) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_{+\infty}^{x} x^{-2}\,dx}_{-x^{-1}\Big|_{+\infty}^{x} = -\left(\frac{1}{x} - \cancel{\frac{1}{+\infty}}^{\,0}\right)}$$

$$V_L(x) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 x} \qquad 3.0$$