

# Ecuación de Poisson

- Sabemos que:

- $$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

- 

- $$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

- 

- Luego: 
$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- El Laplaciano puede ser escrito en distintos sistemas de coordenadas. Cartesianas:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

- Esféricas:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

- Cilíndricas:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

# Ecuación de Laplace

- Si la densidad de carga se anula:

- $$\nabla^2 \varphi = 0$$

- 

- Las soluciones de la ecuación de Laplace son lineales, o sea, si  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  son soluciones a la ecuación de Laplace, entonces también será solución:

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_n \varphi_n$$

- Unicidad: dos soluciones a la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones de frontera difieren a lo mas por una constante aditiva.
- 
- Condiciones de frontera usuales:
  - $\Phi = 0$  en una superficie (Dirichlet)
  - $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  en una superficie (Neumann)

# Separación de variables

- En cartesianas

- $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

- Es razonable suponer:

- $$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

- Luego:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

- La unica forma en que sea posible es:

- 

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2$$

- 

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2$$

- 

- 

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2$$

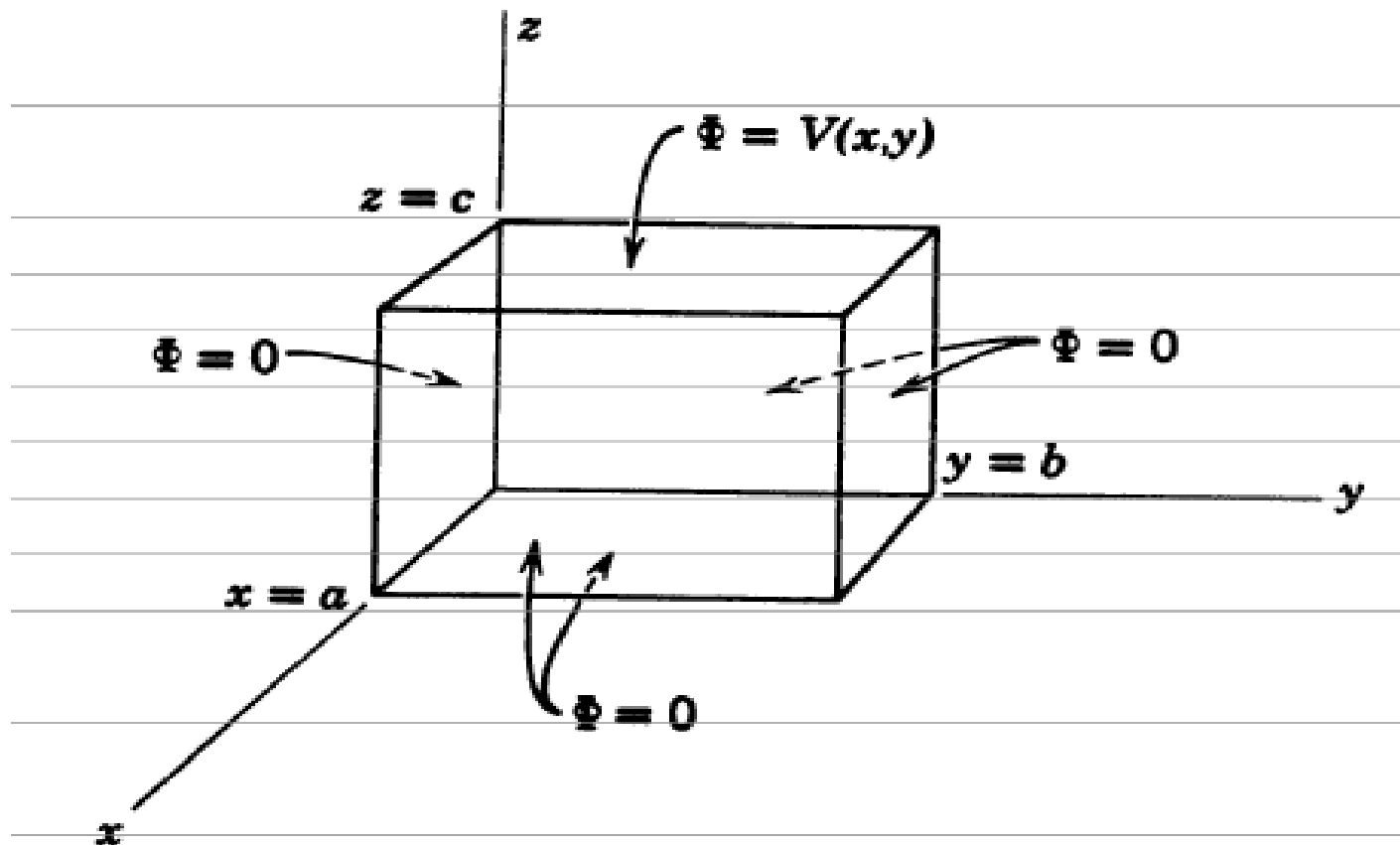
- Donde se debe satisfacer:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

- Las soluciones a las ecuaciones desacopladas son conocidas, a saber :  $e^{\pm i\alpha x}, e^{\pm i\beta y}, e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$
- Luego:

$$\Phi = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

- Ejemplo: una caja con potencial cero en todas las caras menos una.





- Luego, la forma apropiada de las soluciones será:

$$X = \sin \alpha x$$

- 

$$Y = \sin \beta y$$

- 

$$Z = \sinh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z)$$

- Con:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{b}$$

$$\gamma_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

- Luego, las soluciones serán:

- $$\Phi_{nm} = \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z)$$

- Y la solución más general:

- $$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z)$$

- 

- Esta solución debe cumplir además con la condición:

$$V(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c)$$

- Para lo cual es necesario encontrar los coeficientes  $A_{nm}$ . Para ello se usa el hecho de que las funciones trigonométricas son ortogonales:

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm}c)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y)$$

# Funciones ortogonales

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) d\xi = 0, \quad m \neq n$$

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) d\xi = \delta_{nm}$$

$$f(\xi) \leftrightarrow \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi)$$

$$a_n = \int_a^b U_n^*(\xi) f(\xi) d\xi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\xi) = f(\xi)$$