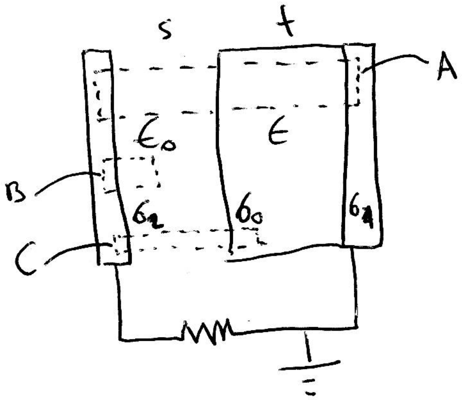
Pauta

(1)



a) Tomando la superficie gaussiana A, se tiene

$$\sigma_1 + \sigma_0 + \sigma_2 = 0$$

Ahora, el campo en la región sin dieléctrico será, usando la superficie B:

$$E_{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

Usando la superficie C:

$$E_{\epsilon} = \frac{\sigma_2 + \sigma_0}{\epsilon}$$

Como están conectados por una resistencia, la diferencia de potencial en estado estacionario es nula

$$\rightarrow \quad 0 = -s E_{\epsilon_0} - t E_{\epsilon} \Rightarrow \quad 0 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} s + \frac{\sigma_2 + \sigma_0}{\epsilon} t$$

Luego
$$\sigma_2 = -\sigma_0 \frac{t\epsilon_0}{s\epsilon + t\epsilon_0}$$

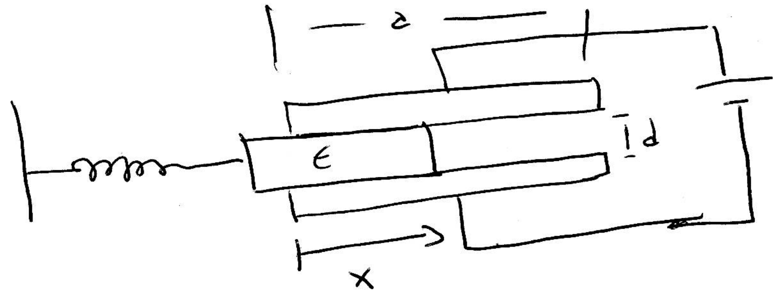
$$\sigma_1 = -\sigma_0 \frac{s\epsilon}{s\epsilon + t\epsilon_0}$$

b) La corriente la podemos calcular como:

$$I = A \left| \frac{\partial \sigma_2}{\partial \tau} \right| \quad ; \quad \tau : \text{tiempo} \; ; \; A : \text{área condensador}$$

$$I = A \frac{t\epsilon_0 \epsilon}{(s\epsilon + t\epsilon_0)^2} \cdot \left| \frac{\partial s}{\partial \tau} \right| = A \frac{t\epsilon_0\epsilon}{(s\epsilon + t\epsilon_0)^2} V_0 \rightarrow V = I \cdot R$$

(2)



$$U = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{1}{2}\int \epsilon\,|E|^2$$

$$U = \frac{1}{2}\underbrace{\int \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV}_{\text{Dieléctrico}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV}_{\text{sin dieléctrico}}$$

$$|\vec{E}| = \frac{V}{d}$$

$$U = \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2\cdot x\cdot d\cdot a + \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2(a-x)\,d\cdot a$$

Ya que V es constante

$$\rightarrow F = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 d\,a - \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 d\,a$$

$$F = \frac{1}{2}V^2\frac{a}{d}(\epsilon-\epsilon_0) \rightarrow$$

a) La posición de equilibrio x_e estará dada por

$$K x_e = F$$

$$\rightarrow x_e = \frac{F}{K} = \frac{1}{2}V^2\frac{a}{Kd}(\epsilon-\epsilon_0)$$

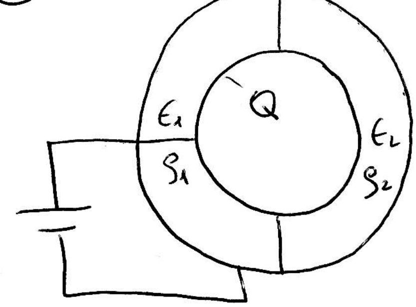
b)

$$m\ddot{x} = -Kx + F$$

$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F}{m} \rightarrow \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

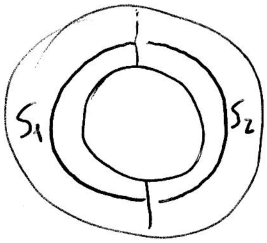
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

(3)



a) El campo es radial, y la componente tangencial es continua luego el campo eléctrico no depende del ángulo, solo de r.

Usando la ley de Gauss con una superficie esférica:



$$\rightarrow \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$\int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$2\pi r^2 \epsilon_1 E + 2\pi r^2 \epsilon_2 E = Q$$

$$\rightarrow E = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2) r^2} \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2) r^2} \hat{r}$$

b) $$V = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} \longrightarrow \text{pues } V(a) > V(b)$$

$$V = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

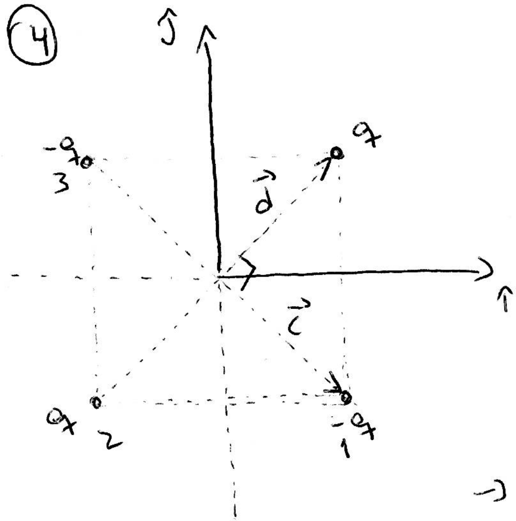
c) $$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$I = \int_{S_1} \sigma_1 \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \sigma_2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{(\sigma_1+\sigma_2)}{(\epsilon_1+\epsilon_2)} Q$$

d) $I = (\sigma_1+\sigma_2) \cdot 2\pi V / \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$; Ahora, $R = V/I$

$$\rightarrow R = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{2\pi(\sigma_1+\sigma_2)}$$

(4)



El sistema de imágenes mostrado resuelve el problema.

a) La fuerza que siente la partícula es la producida por las cargas imágenes.

$$\rightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$|\vec{d}| = |\vec{c}|$

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-\hat{j}}{2d^2} + \frac{(\hat{\imath}+\hat{j})}{\sqrt{2}\,4d^2} + \frac{-\hat{\imath}}{2d^2} \right)$$

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2d^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)(-\hat{\imath}-\hat{j}) \quad \text{atractiva}$$

b) La carga es $\sigma = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n}$

$\vec{E}$ es el campo producido por las 4 cargas.

La situación es simétrica con la diagonal, así es que basta calcular para el eje horizontal.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{d}|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{c}}{|\vec{r}-\vec{c}|^3} + \frac{\vec{r}+\vec{d}}{|\vec{r}+\vec{d}|^3} - \frac{\vec{r}+\vec{c}}{|\vec{r}+\vec{c}|} \right)$$

$$\vec{E}(x\hat{\imath}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x\hat{\imath}-\vec{d}}{\left(x^2+d^2-\frac{2xd}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}} - \frac{x\hat{\imath}-\vec{c}}{\left(x^2+d^2-\frac{2xd}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{x\hat{\imath}+\vec{d}}{\left(x^2+d^2+\frac{2xd}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}} - \frac{x\hat{\imath}+\vec{c}}{\left(x^2+d^2+\frac{2xd}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}} \right)$$

$$\rightarrow \vec{E}(x\hat{\imath}) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{d}-\vec{c})}{\left(x^2+d^2-\frac{2xd}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{d}-\vec{c})}{\left(x^2+d^2+\frac{2xd}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}}$$

Ahora, $\vec{d} - \vec{c} = \sqrt{2}\, d\, \hat{j}$

$$\rightarrow \vec{E}(x\hat{i}) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{2}\, d\, \hat{j} \left(\frac{1}{\left(x^2 + d^2 - \frac{2xd}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(x^2 + d^2 + \frac{2xd}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}} \right)$$

La normal en el eje $\hat{i}$ es $\hat{j}$

$$\rightarrow \sigma(x) = \epsilon_0 \vec{E}(x\hat{i}) \cdot \hat{j}$$

$$\rightarrow \sigma(x) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{2}\, d \left(\frac{1}{\left(x^2 + d^2 - \frac{2xd}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(x^2 + d^2 + \frac{2xd}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}} \right)$$

Para obtener $\sigma(y)$, basta reemplazar $y \leftrightarrow x$ en la expresión anterior.