

- Finalmente, las ecuaciones de Maxwell quedan:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Agregando la ley de fuerza:
- $$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$
-
- Se completa la formulación de la electrodinámica clásica.

- En medios materiales toman la forma:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad (iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (iv) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Y las condiciones de borde, al pasar de un medio 1 a 2 (o sea, normal positiva de 1 a 2):

- $D_2^\perp - D_1^\perp = \sigma_{libre}, \quad B_2^\perp - B_1^\perp = 0$

-

- $E_2^\parallel - E_1^\parallel = 0, \quad H_2^\parallel - H_1^\parallel = K_{libre} \times \hat{n}$

- Si no hay cargas ni corrientes superficiales:

$$\epsilon_2 E_2^\perp - \epsilon_1 E_1^\perp = 0, \quad B_2^\perp - B_1^\perp = 0$$

$$E_2^\parallel - E_1^\parallel = 0, \quad \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel - \frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel = 0$$

Leyes de conservación

- Conocemos la ecuación de continuidad:

- $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$
-

- Que expresa la conservación de la carga eléctrica, la cual es inherente a las ecuaciones de Maxwell.
- Ahora, al energía almacenada en los campos electromagnéticos es:

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau$$

- Ahora, el trabajo hecho por los campos sobre una carga q en un intervalo de tiempo dt :

- $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$

- Reemplazando $\mathbf{J} = q\mathbf{v}$: $\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dv$
-

- Esta expresión puede ser manipulada para producir el Teorema de Poynting:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}$$

- O sea, el trabajo hecho sobre una carga por unidad de tiempo es la disminucion de la energía almacenada en el campo, menos la energía que escapa por la superficie.
- La energía transportada por unidad de tiempo y de área por el campo electromagnético está dado por el vector de Poynting:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

- El campo electromagnético también transporta un momentum, el cual está dado por:

- $$\mathbf{p}_{\text{em}} = \mu_0 \epsilon_0 \int_V \mathbf{S} d\tau$$
-

- Luego, podemos escribir la densidad de momentum por unidad de volumen:

$$\mathbf{p}_{\text{em}} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S}$$

- También podemos asociar al campo electromagnético un momentum angular:

- $$\mathbf{l}_{\text{em}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{\text{em}} = \epsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]$$

-

-

Ondas electromagnéticas

- Recordemos la ecuación de onda en 3D:

- $$\nabla^2 \mathbf{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = 0$$
-

- Cuya solución es cualquier función:

- $$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) + \mathbf{F}_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$$

- En donde \mathbf{k} es el vector de onda, ω es la frecuencia angular y $\omega/k=c$ es la velocidad de fase de la onda

-

- A partir de las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

- (i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, (iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
-
- (ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, (iv) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
-

- Podemos obtener al aplicar el rotor de iii) y iv):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

- Luego obtenemos dos ecuaciones de onda:

- $$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$
-

- Con
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$
-

- La cual corresponde a la velocidad de la luz.
- Luego, **La luz es una onda electromagnética**

• Ondas monocromáticas planas

- Considere las siguientes soluciones a las ecuaciones de onda recién obtenidas:
-
- $\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)},$
- Estas corresponden a ondas planas desplazándose en la dirección de +z. Ellas constituyen un modelo importante de las ondas, ya que cualquier onda arbitraria puede ser descompuesta en una superposición de ondas planas de distintas frecuencias.
- Monocromática se refiere a que es de una sola frecuencia.
- Ej: una onda muy lejos de la fuente es localmente plana.

