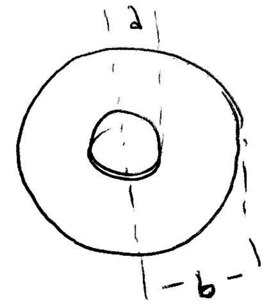
Parte Examen



P1)

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{a} \quad , \; r \leq a$$

$$\sigma = \sigma_0 \quad , \; r = b > a$$

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

a)

$$\int_{r'=r} \vec{E}\cdot d\vec{s}\,' = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho(r')\,dv'$$

$r \leq a$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho_0 \frac{r'}{a}\, 4\pi r'^2\, dr = \frac{4\pi}{\epsilon_0}\frac{\rho_0}{a}\frac{r^4}{4}$$

$$\rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 a}\,\hat{r} \quad , \quad r \leq a$$

b)

$$\int_{r'=r} \vec{E}\cdot d\vec{s}\,' = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho(r')\,dV' = \frac{4\pi \rho_0 a^4}{4\epsilon_0 a}$$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi \rho_0 a^3}{4\epsilon_0}$$

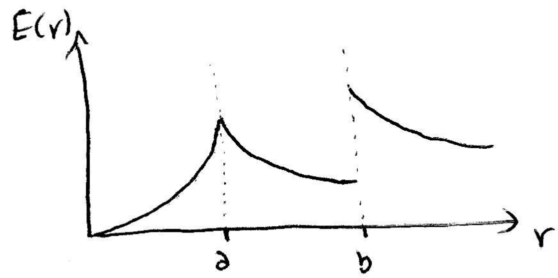
$$\rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} \qquad a < r < b$$

c)

$$\int_{r'=r} \vec{E}\cdot d\vec{s}\,' = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho(r')\,dV' = \frac{4\pi}{\epsilon_0}\left(\frac{\rho_0 a^3}{4} + b^2\sigma_0\right)$$

$$\rightarrow \vec{E}(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2}\left(\frac{\rho_0 a^3}{4} + b^2\sigma_0\right)\hat{r} \qquad r > b$$

d)



Hay una discontinuidad en r=b ya que hay una distribución superficial de carga ahí. Conocemos la condición de borde:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$$

$$E(b)_+ - E(b)_- = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

e) La unicidad de las soluciones de la ecuación de Poisson implica que el potencial debe ser continuo.

Imponiendo $\varphi(\infty) = 0$

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r}' \quad ; \text{ tomando } d\vec{r}' = dr'\,\hat{r}$$

Para $b \leq r$

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \left(\frac{\rho_0 a^3}{4} + b^2\sigma_0\right)\frac{1}{\epsilon_0 r'^2}\,dr'$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r}\left(\frac{\rho_0 a^3}{4} + b^2\sigma_0\right) \qquad r \geq b$$

Evaluamos $\varphi(b) = \frac{1}{\epsilon_0 b}\left(\frac{\rho_0 a^3}{4} + b^2\sigma_0\right)$

Para $a < r < b$

$$\varphi(r) - \varphi(b) = -\int_b^r \vec{E}\cdot d\vec{r}' = -\int_b^r \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r'^2}\,dr'$$

$$\varphi(r) - \varphi(b) = \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} \cancel{-\frac{1}{b}}\right) + \frac{1}{\epsilon_0 b}\left(\cancel{\frac{\rho_0 a^3}{4}} + b^2\sigma_0\right)$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r} + \frac{b\sigma_0}{\epsilon_0} \qquad a \leq r \leq b$$

Evaluamos $\varphi(a) = \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0} + \frac{b\sigma_0}{\epsilon_0}$

Para $r \leq a$

$$\varphi(r) - \varphi(a) = -\int_a^r \frac{\rho_0 r'^2}{4\epsilon_0 a}\,dr' = -\left(\frac{\rho_0}{4\epsilon_0 a}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)\right)$$

$$\varphi(r) - \varphi(a) = \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r^3}{12\epsilon_0 a}$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r^3}{12\epsilon_0 a} + \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0} + \frac{b\sigma_0}{\epsilon_0}$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r^3}{12\epsilon_0 a} + \frac{b\sigma_0}{\epsilon_0}$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0}{12\epsilon_0}\left(4a^2 - \frac{r^3}{a}\right) + \frac{b\sigma_0}{\epsilon_0} \qquad r \leq a$$

P2) Las cargas de las esferas son

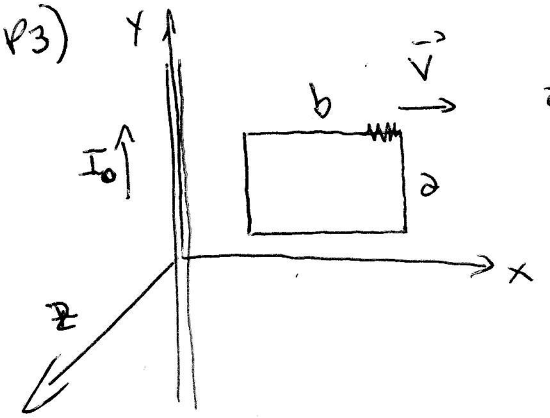
$$q_1 = \int_0^a \rho_1 \, dV = \int_0^a k_1 r \, 4\pi r^2 dr = 4\pi k_1 \frac{a^4}{4} = a^4 \pi k_1$$

$$q_2 = \int_0^a \rho_2 \, dV = \int_0^a k_2 r^2 \, 4\pi r^2 dr = 4\pi k_2 \frac{a^5}{5}$$

La fuerza entre las esferas sera:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 S^2}$$

P3)



a) El campo magnético producido por el alambre infinito será en el plano de la espira:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x}(-\hat{z})$$

Luego, el flujo será, tomando $d\vec{A} = dA\,(-\hat{z})$

$$\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_0^a dy' \int_x^{b+x} dx' \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x'}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+x}{x}\right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dx}\frac{dx}{dt} \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = V_0$$

$$\mathcal{E} = -\frac{V_0 \mu_0 I_0 a}{2\pi}\left(\frac{1}{b+x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{\mu_0 I_0 V_0 ab}{2\pi x(b+x)}$$

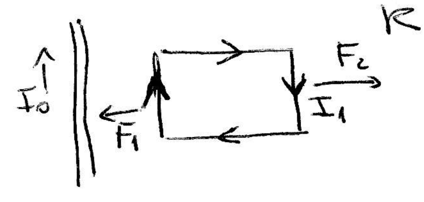
$$\mathcal{E}(t) = \frac{\mu_0 I_0 ab}{2\pi t(b+V_0 t)} \quad ; \quad x = V_0 t$$

b)

$$\phi = M I_0 \rightarrow M = \phi / I_0$$

$$\rightarrow M = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{b+x}{x}\right) = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{b+V_0 t}{V_0 t}\right)$$

c) En la espira se inducirá una corriente $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ en sentido horario. Se producirán luego fuerzas sobre la espira, de las cuales las que actúan sobre los segmentos superior e inferior se anulan.



$$\vec{F}_1 = I_1 \int d\vec{l} \times \vec{B} = I_1 a\, B(x)\, (-\hat{x})$$

$$\vec{F}_2 = I_1 \int d\vec{l} \times \vec{B} = I_1 a\, B(x+b)\, \hat{x}$$

$$\rightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = I_1 a \left(B(x+b) - B(x) \right) \hat{x}$$

$$\vec{F} = I_1 a \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x} \right) \hat{x}$$

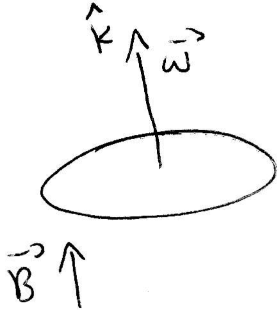
$$\vec{F} = - \frac{I_1 a b\, \mu_0 I_0}{2\pi\, x(x+b)} \hat{x}$$

Ahora, $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 I_0 V_0 a b}{2\pi x (x+b) R}$

$$\rightarrow \vec{F} = -\frac{V_0}{R} \left(\frac{\mu_0 I_0 a b}{2\pi x (x+b)} \right)^2 \hat{x} = -\frac{V_0}{R} \left(\frac{\mu_0 I_0 a b}{2\pi V_0 t (V_0 t + b)} \right)^2 \hat{x}$$

Vemos que la fuerza se opone a la velocidad.

P4)



La fuerza magnética sobre los portadores de carga del disco será

$$\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

Ahora, $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \omega r\,\hat{\theta}$; $\vec{B} = B\,\hat{k}$

$$\rightarrow \vec{F} = q\,\omega r B\,\hat{r}$$

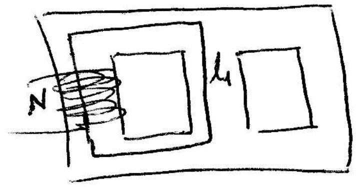
La fuerza magnética por unidad de carga será:

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{f} = \omega r B\,\hat{r}$$

Finalmente

$$\mathcal{E} = \int \vec{f}\cdot d\vec{r} = \frac{\omega a^2 B}{2}$$

P5)



Haciendo una integral de línea en l_1

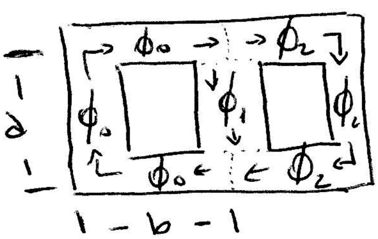
$$\int_{l_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu N I$$

Ahora, tomando un B promedio en la sección

$\rightarrow B = \frac{\phi}{A}$; A : área sección

$$\rightarrow \int \frac{\phi\, dl}{A} = \mu N I$$

Ahora, los flujos serán:



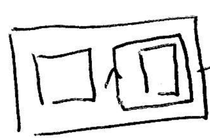
Integrando sobre l_1

$$\int_{l_1} \frac{\phi\, dl}{A} = \mu N I \quad ; \quad A = cte$$

$$\rightarrow \int_{l_1} \phi\, dl = \mu A N I$$

$$\rightarrow \phi_0 (a+2b) + \phi_1 a = \mu A N I \qquad (1)$$

En el camino l_2:
no hay espiras



l_2

$$\rightarrow \quad \phi_2 (a+2b) - \phi_1 a = 0 \qquad (2)$$

Además, $\phi_0 = \phi_1 + \phi_2$ (3)

Luego, reemplazando 3 en 1

$$(\phi_1+\phi_2)(a+2b)+\phi_1 a = \mu A N I$$

$$\phi_1 2(a+b)+\phi_2(a+2b) = \mu A N I \qquad (4)$$

Reemplazando 2 en 4

$$\phi_2 = \frac{\phi_1 a}{a+2b}$$

$$\rightarrow \phi_1 2(a+b) + \frac{\phi_1 a}{\cancel{a+2b}}\cancel{(a+2b)} = \mu A N I$$

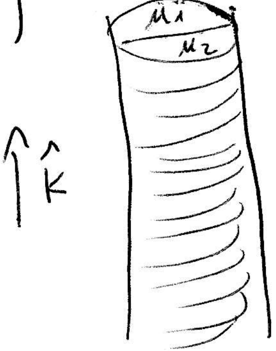
$$\phi_1(3a+2b) = \mu A N I$$

$$\rightarrow \phi_1 = \frac{\mu A N I}{3a+2b}$$

$$\phi_2 = \frac{\mu A N I a}{(a+2b)(3a+2b)}$$

Finalmente se reemplazan los datos

$\mu = 2500\,\mu_0$
$A = 4\ cm^2$
$N = 500$
$I = 0{,}3$ Amp
$a = 10$ cm
$b = 7{,}5$ cm

P6) 

El campo $\vec{B}$ y $\vec{H}$ es cero en el exterior. En el interior

$$\vec{H} = H\hat{k}$$

Aplicando la ley de ampere

$$\rightarrow H = mI$$

Luego, ya que la interfaz es paralela a $\vec{H}$, y no hay corrientes superficiales libres en la interfaz, $\vec{H}$ es continuo al interior.

Finalmente

$$\vec{B}(\varphi) = \begin{cases} \mu_1 m I\hat{k}, & 0 < \varphi \leq \pi \\ \mu_2 m I\hat{k}, & \pi < \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$