INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Clase Auxiliar #6

Profesores: Alejandra Mizala, Matteo Triossi

Auxiliares: Manuel Marfán, Rodrigo Moser

Problema 1.

Algunas familias para calefaccionar sus viviendas consumen parafina. Un individuo representativo presenta la siguiente función de utilidad

$$U(c, f) = cf^3$$

Donde *f* son las unidades (litros) de parafina que el individuo consume y *c* es una canasta con los otros bienes cuyo precio es 1.

a) Si el individuo dispone de un ingreso de 100 u.m. Calcule la demanda por parafina. Luego calcule la cantidad demandada de ambos bienes si el precio de la parafina es 5 u.m.

Resp: Problema del consumidor:

$$\max \quad U(c, f) = cf^3$$
$$s.a.:$$
$$f * P + c \leq I$$

$$\textbf{\textit{CPO}} \quad \frac{Umgf}{P} = \frac{Umgc}{1}$$

$$\frac{3c}{\mathrm{P}} = \frac{f}{1} \quad => \quad P * f = 3*c$$

reemplazan do en la RP :

$$f * P + 1/3\ f * P = I$$

$$4/3 \ * f * P = I \quad => f\ (P\ ) = \frac{3I}{4P}$$

La cantidad demandada de parafina cuando el precio es 5 u.m. y el ingreso 100 u.m. será:

f=3*100 / (4*5)

f=15

La cantidad demandada de otros bienes será: c=5*15 / 3 = 25

b) El gobierno, preocupado por la contaminación, ha decidido poner un impuesto del 100% al consumo de parafina, por lo que el nuevo precio será de 10 u.m. Consciente que las familias consumen parafina, el gobierno decide entregar un subsidio a suma alzada (transferencia monetaria) en compensación:

  a. Calcule el monto del subsidio si es tal que el individuo puede consumir la misma canasta inicial de bienes (a los nuevos precios).

     Resp: La compensación d consiste en que el individuo pueda consumir la canasta inicial (75 unidades de otros bienes y 5 litros de parafina) a los nuevos precios:

$$100 + d = 25*1 + 15*10 = 175$$
$$d = 75$$

  b. Calcule el monto del subsidio si es tal que el individuo alcanza la misma utilidad que antes de la variación del precio.

     Resp: El individuo inicialmente alcanza una utilidad de:

$$f(15) = 15$$
$$c(1) = \frac{I}{4} = 25 \quad \Rightarrow \quad U(25,15) = 15^3 * 25 = 84375$$

Ahora, queremos igualar la utilidad inicial, a la utilidad que el individuo experimenta a los nuevos precios (P=10) y con un ingreso I'=100+C

$$U(c, f) = cf^3 = \frac{I'}{4}\left(\frac{3I'}{4 * 10}\right)^3$$
$$84375 = \frac{I'^4}{4}\left(\frac{3}{4 * 10}\right)^3 =$$
$$I'^4 = \frac{84375}{0.00010546875} = 800000000$$
$$I' = 168,1792830 \quad => \quad C = 68,1792830$$

Luego, la compensación por el alza del precio de la parafina debe ser 68,18 u.m. Así el individuo alcanzará la misma curva de indiferencia inicial.

c) En relación a su respuesta en (b):

¿En cuál de las dos situaciones está mejor el individuo? (a ó b). De una intuición de porqué en el caso (a ó b) el individuo alcanza una curva de utilidad mayor. Grafique.

Resp: Para saber en qué situación el individuo estará mejor, se deben comparar las utilidades.

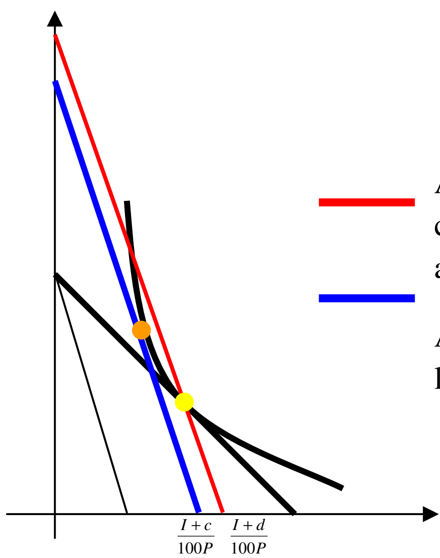
En el caso *a*, primero habrá que determinar las cantidades demandadas cuando el ingreso es 175 y los precios son 1 y 10. En el caso *a*, el individuo demanda 43,75 unidades del bien c y 13,125 litros de parafina, luego su utilidad será 98918

En el caso *b*, la utilidad es 84375

Es decir, en la situación *a*, el individuo está mejor que en la situación inicial y por ende que en la *b*.

Lo primero es notar que el caso *a* hace que el individuo pueda consumir la misma canasta inicial, sin embargo, dado que los precios relativos han cambiado y dado que el individuo tiene un nuevo ingreso (175), su decisión óptima cambiará, reduciendo la cantidad de parafina y aumentando el consumo de otros bienes. Si la decisión cambia, será para maximizar la utilidad, y como tiene la opción de consumir la canasta inicial, si cambia de decisión es porque hay otra alternativa mejor, luego en la situación *a* el individuo estará al menos tan bien como en *b*.

La intuición es la siguiente: A los nuevos precios relativos, el individuo sustituye parafina por otros bienes (efecto sustitución). Al devolver el dinero a suma alzada, el individuo cambiará su decisión inicial a pesar de poder alcanzarla con su nueva RP, porque el precio de la parafina ahora es más caro en términos relativos a los otros bienes.



Alternativa a: ingreso adicional "d" para poder consumir la canasta inicial de bienes (punto amarillo)

Alternativa b: ingreso adicional "C" para alcanzar la curva de utilidad inicial.

Problema 2.

Suponga que en la economía hay n firmas idénticas entre ellas y m consumidores también idénticos entre ellos. Las firmas utilizan un único insumo, horas de trabajo, con la siguiente función de producción:

$$F(L) = AL^{\alpha}$$

Los consumidores, además de elegir cuánto comprar, pueden elegir cuánto trabajar. La función de utilidad de un consumidor que consume q unidades del bien y trabaja durante L horas es:

$$u(q, L) = \ln\left(q - \frac{1}{1+\varphi} L^{1+\varphi}\right)$$

a) Argumente por qué en esta economía existen dos mercados cuyos equilibrios interactúan. ¿Cuáles son estos mercados?

Resp: Existen dos mercados: el del bien y el del trabajo. Las firmas ofrecen el bien y demandan trabajo, mientras que los consumidores demandan el bien y ofrecen trabajo. El nivel de equilibrio de un mercado afecta las curvas del otro, por ejemplo, una expansión de la oferta del bien (quizás por un aumento en la productividad) hará expandirse la demanda por trabajo.

b) Encuentre la cantidad de horas de trabajo demandada por cada firma L_f y la cantidad producida por cada firma q_f cuando el precio es p y el salario por cada hora trabajada es w.

Resp:

El problema de maximización, donde debe elegir el nivel de trabajo demandado, es:

$$\max_{L_f} pA{L_f}^{\alpha} - wL_f$$

La condición de primer orden:

$$\alpha pA{L_f}^{\alpha-1} = w$$

$$L_f = \left(\frac{\alpha pA}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$q_f = A{L_f}^{\alpha} = \left(\frac{\alpha pA^{1/\alpha}}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

c) Encuentre las horas que decide trabajar cada agente (consumidor) L_c y la cantidad que consume q_c.

Resp:

El agente maximiza su utilidad sujeta a la restricción presupuestaria:

$$\max_{L_c, q_c} ln\left(q_f - \frac{1}{1+\varphi} L^{1+\varphi}\right)$$
$$s.t. \quad pq_c \leq wL_c$$

Sabemos que la restricción presupuestaria se cumplirá con igualdad (si tuviera holgura trabajaría menos o consumiría más). Entonces despejamos q de la restricción presupuestaria y reemplazamos en la función objetivo. La condición de primer orden es:

$$\frac{\frac{w}{p} - {L_c}^{\varphi}}{q_f - \frac{1}{1+\varphi} L^{1+\varphi}} = 0$$

Sabemos que el denominador es distinto de cero (la utilidad sería menos infinito), por lo que el numerador debe ser nulo.

$$L_c = \left(\frac{w}{p}\right)^{\frac{1}{\varphi}}$$

De la restricción presupuestaria:

$$q_c = \left(\frac{w}{p}\right)^{\frac{1}{\varphi}+1}$$

d) Plantee las condiciones de equilibrio de mercado. ¿Puede calcular todos los elementos del equilibrio en función de los parámetros *A*, α y φ? Dé un sentido económico a estos parámetros.

Resp:

La condición de mercados completos (no sobra trabajo, y todos los trabajadores trabajan para alguien. A su vez, no se puede consumir algo que no ha sido producido, y todo lo que se produce es consumido).

$$nL_f = mL_c = L$$
$$nq_f = mq_c = q$$

Esto forma un sistema de seis incógnitas con seis ecuaciones. Pero el salario siempre aparece relativo al precio, por lo que no será posible despejarlo. Se puede despejar, entonces, la cantidad transada del bien, la cantidad total de horas trabajadas y la razón entre salario y precio.

Los parámetros tienen interpretación. El parámetro *A* se interpreta como la productividad de las firmas: una firma con mayor *A* podrá producir más con la misma cantidad de trabajadores. El parámetro α representa la proporción que representa el pago de salarios sobre los ingresos de la firma (no sobre los costos totales, pues hay rendimientos decrecientes a escala). El parámetro φ es el que gobierna la función de tasa marginal de sustitución entre consumo y trabajo en la función de utilidad del consumidor.

e) Elimine p y q de las ecuaciones anteriores y encuentre ecuaciones de oferta y demanda para el mercado del trabajo.

Resp:

La oferta por trabajo:

$$L = m\left(\frac{w}{p}\right)^{\frac{1}{\varphi}}$$

Y la demanda:

$$L = n(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{w}{p}\right)^{\frac{-1}{1-\alpha}}$$

Problema 3.

Suponga que en una economía existen dos bienes, manzanas y azúcar, con una sola firma en cada industria que se comporta de forma competitiva. La producción se lleva a cabo según las funciones (el único insumo es trabajo):

$$F_A(L) = (L - L_A)^{1/2}$$

$$F_M(L) = \theta(L - L_M)^{1/2} \quad , con\ \theta > 1$$

El único consumidor de esta economía tiene la siguiente función de utilidad:

$$u(x_A, x_M) = {x_A}^{2/3}{x_M}^{1/3}$$

a) Si los salarios para los trabajadores son iguales para los de ambas industrias, $w=1/2$, encuentre la producción de cada una de las firmas a precios dados. Encuentre, además, la función de costos de cada firma.

Resp:

Para el azúcar:

$$L = L_A + {q_A}^2$$

$$c(q) = wL = \frac{1}{2}L_A + \frac{1}{2}{q_A}^2$$

La condición de primer orden para el azúcar es:

$$p_A = q_A$$

Para las manzanas el desarrollo es idéntico, la condición de primer orden es:

$$p_M = \frac{1}{\theta^2}q_M$$

b) Encuentre, a precios dados, el consumo del agente de cada uno de los bienes si su ingreso es igual a 300.

Resp:

El agente maximiza:

$$\max_{x_A, x_M} \ {x_A}^{\frac{2}{3}}{x_M}^{\frac{1}{3}}$$

$$s.t. \ \ p_A x_A + p_M x_M \leq I$$

De las condiciones de primer orden, se llega a:

$$2p_M x_M = p_A x_A$$

Reemplazando en la restricción presupuestaria (que se cumple con igualdad):

$$x_M = \frac{100}{p_M}$$

$$x_A = \frac{200}{p_A}$$

c) Encuentre el equilibrio de mercado para ambos bienes.

Resp:

Igualando oferta con demanda para cada uno de los bienes:

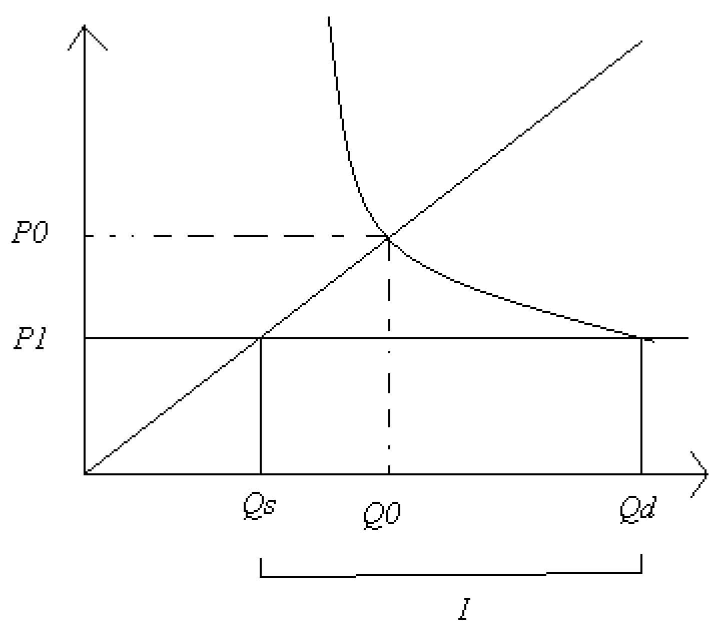
$$p_A = x_A = \sqrt{200}$$

$$p_M = \frac{1}{\theta}\sqrt{100}$$

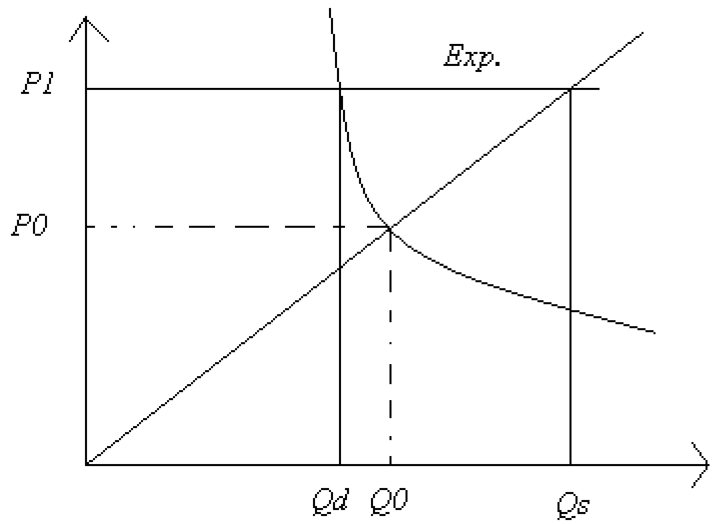
$$q_M = \theta\sqrt{100}$$

Ahora suponga que la economía se abre al comercio, y que esto hace que el precio del azúcar caiga a la mitad y el precio de las manzanas suba al doble Asuma también que los trabajadores tienen conocimientos específicos, por lo que los trabajadores de una industria no pueden trabajar en la otra.

d) Explique con gráficos qué pasa con el consumo, producción y exportaciones (o importaciones) de los bienes.
Resp:
Para el azúcar



Para las manzanas



e) Calcule qué porcentaje de los trabajadores del azúcar perderá su empleo si es que los sueldos no cambian (asuma L_A=*300*).
Resp:
El nivel de empleo original es

$$L = 300 + \sqrt{200}^2 = 500$$

En el nuevo equilibrio, la cantidad será $\sqrt{50}$ y el empleo será $L = 350$. El porcentaje de trabajadores que perderá su empleo es de 30%

f) Argumente por qué el sueldo de los trabajadores de las manzanas subirá, mientras que el de los del azúcar caerá.
Resp: Como vimos en la pregunta anterior, el mercado del trabajo tiene una oferta y una demanda, por lo tanto lo que pasa acá es que, en el mercado del trabajo del azúcar, la demanda por trabajo se contrae, por lo que el salario y el nivel de empleo caen (ojo: el empleo cae menos que el 30% calculado en la parte anterior, ya que los salarios también se ajustan). En el mercado de las manzanas la demanda por trabajo se expande, por lo que los salarios y el nivel de empleo suben.

g) Ante la situación de los trabajadores del azúcar, el Estado evalúa tomar medidas. La primera es imponer aranceles a la importación de azúcar. La segunda es imponer por ley que los sueldos de los trabajadores del azúcar debe ser el mismo que los de la industria de las manzanas. La tercera es capacitar a los trabajadores cesantes para que puedan trabajar en la industria de las manzanas. Comente la conveniencia de cada una de estas medidas.
Resp: Analizaremos las opciones una por una.

Aranceles: es lo que se hace hoy en día, donde los beneficiados son los productores de azúcar, y los perjudicados son los consumidores.

Fijar sueldos: introduce distorsiones en el mercado, hace que la producción de manzanas baje haciendo perder oportunidades, y hace que la producción de azúcar suba, siendo que es más eficiente consumir azúcar importada.

Capacitación: permite que los trabajadores del azúcar aprovechen las oportunidades que surgen en la industria de las manzanas, y logrando una asignación de recursos más eficiente y con un mejor efecto sobre el bienestar de la sociedad (bienestar se estudiará en los próximos capítulos).

La pregunta de "cuál es mejor" es de respuesta ambigua. Es necesario hacer modelos económicos de mayor complejidad para cuantificar todos estos efectos y sus consecuencias sobre otras variables.

Problema 4.

Considere una economía con dos bienes y un agente que maximiza una utilidad $u(x,y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$ dado un ingreso I y precios p_x y p_y.

a) Calcule la cantidad consumida de cada bien y la utilidad alcanzada, $v(I,p_x,p_y)$ en función de los parámetros del problema.
Resp:

Se debe maximizar la función de utilidad:

$$\max_{x,y} x^{\alpha}y^{1-\alpha}$$

$$s.t. \quad p_x x + p_y y \leq I$$

Las condiciones de primer orden:

$$\alpha\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\alpha} = \mu p_x$$

$$(1-\alpha)\left(\frac{y}{x}\right)^{-\alpha} = \mu p_y$$

Dividiendo ambas ecuaciones y reordenando:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} p_y y = p_x x$$

Reemplazando en la restricción presupuestaria:

$$p_y y\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) = I$$

$$y = \frac{(1-\alpha)I}{p_y} \quad , \quad x = \frac{\alpha I}{p_x}$$

$$v(p_x, p_y, I) = \left(\frac{\alpha}{p_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p_y}\right)^{1-\alpha} I$$

b) Calcule la derivada $\frac{\partial v}{\partial I}$ y encuentre en qué rango es creciente en α y en qué rango es decreciente. Interprete económicamente.
Resp:

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \left(\frac{\alpha}{p_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p_y}\right)^{1-\alpha}$$

Tomando exponencial y logaritmo:

$$\frac{\partial v}{\partial I} = exp\left(\alpha ln(\alpha) + (1-\alpha)ln(1-\alpha) - \alpha ln(p_x) - (1-\alpha)ln(p_y)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial I}\right) = \left(ln(\alpha) - ln(1-\alpha) + ln(p_y) - ln(p_x)\right) exp\left(\alpha ln(\alpha) + (1-\alpha)ln(1-\alpha) - \alpha ln(p_x) - (1-\alpha)ln(p_y)\right)$$

Por lo tanto, la utilidad marginal del ingreso es creciente en alfa si y sólo si:

$$ln\left(\frac{\alpha p_y}{(1-\alpha)p_x}\right) > 0$$

Es decir, si:

$$\frac{\alpha p_y}{(1-\alpha)p_x} > 1$$

$$\frac{\alpha I}{p_x} > \frac{(1-\alpha)I}{p_y}$$

Y como estamos en el óptimo, la utilidad marginal del ingreso es creciente si:

$$x > y$$

O sea, la utilidad marginal del ingreso es máxima cuando los dos bienes se consumes en igual cantidad.