

## Control 1

Martes 4 de Mayo de 2010

### Problema 1

Un estudiante sale de su casa camino a la escuela para rendir un control. Una de sus opciones es tomar un colectivo de costo \$1400, el cual llega a la universidad de manera directa y con toda seguridad a tiempo para rendir su control. La otra opción es tomar una micro, cuyo pasaje es de \$140, pero con un tiempo de viaje incierto (considere que con probabilidad 0,3 esta micro se atrasa). En la mitad del trayecto en micro, el estudiante debe bajarse en un paradero y decidir entre tomar un taxi de costo \$2000 (el cual le asegura llegar a la hora) o hacer un transbordo sin costo a otra micro. Esta segunda micro le permitirá llegar a tiempo a su control con probabilidad 0,4 si la primera micro se atrasó, mientras que si la primera micro no tuvo atraso, la segunda micro alcanzará a llegar a la universidad antes del comienzo del control con probabilidad 0,8. Si el alumno llega tarde, debe pagar una penalización de \$3500 a la Universidad.

- a) (3 puntos) Plantee y resuelva un **árbol de decisiones** que determine la mejor estrategia que permita minimizar el costo esperado para ir a la escuela.

Considere ahora que el estudiante tiene la opción de conectarse a una aplicación, a través de su celular, que le permitirá predecir el comportamiento del tráfico en el tramo recorrido por la primera micro. La aplicación consulta directamente a la U.O.C.T. (Unidad Operativa de Control de Tránsito) y entrega uno de dos resultados: **Buen Tráfico** o **Mal Tráfico**. Se sabe que el 90 % de las veces que la primera micro no se atrasó, la aplicación había indicado **Buen Tráfico**, mientras que en el 60 % de los casos que la primera micro se atrasó, la aplicación había indicado **Mal Tráfico**.

- b) (3 puntos) ¿Hasta cuanto debería estar dispuesto a pagar por usar esta aplicación?

### Problema 2

Un negocio se dedica a la venta de botellas de vidrio. Se necesita planificar los próximos  $T$  meses, y en particular la estrategia para manejar el inventario de botellas.

Al inicio de cada mes, el negocio hace el pedido de botellas, que podemos considerar que llega en forma instantánea y está disponible para satisfacer la demanda desde el inicio de ese mismo mes. Antes de hacer el pedido para el mes 1, el inventario de botellas es nulo. El costo de compra de cada botella es igual a  $\$b/\text{botella}$ . Cada botella tiene un costo de almacenamiento por mes igual a  $\$/(\text{botella} \times \text{mes})$ . Además, la bodega del negocio puede almacenar como máximo  $B$  botellas.

El inventario de botellas es delicado porque son frágiles y se quiebran con facilidad. Se estima que cada botella disponible al inicio de un mes cualquiera, se puede fracturar con probabilidad  $q$  durante ese mismo mes, y por lo tanto no se puede vender. El proceso de quiebre de las botellas es independiente entre las botellas y de un mes a otro. Las botellas que se fracturan se desechan sin costo y desaparecen del inventario.

La demanda que enfrenta el negocio es probabilística. Sea  $p(k, t)$  la probabilidad que la demanda en el mes  $t$  sea igual a  $k$  unidades. Si el negocio no tiene inventario suficiente para satisfacer la demanda, el cliente compra en otra parte y se pierde ese negocio puntual. El precio de venta es igual a  $\$/\text{botellas}$ . Al final de los  $T$  meses, el inventario de botellas tiene nulo valor económico.

- a) (4 puntos) Plantee un modelo de PDE que permita encontrar la política de compra (o inventario) que maximiza la esperanza de la utilidad del negocio en el horizonte.
- b) (2 puntos) Muestre como cambia el modelo si el negocio puede comprar botellas en un mercado **spot** cuando, al conocer la demanda de un mes cualquiera, no tiene inventario suficiente para satisfacerla en su totalidad. En este caso la compra se realiza a un precio **spot** de  $\$/\text{botella}$ , donde  $g$  es mayor que  $b$ , pero menor que  $c$ .

### Problema 3

(Responda 10 de las 11 partes) Un temido bandolero se encuentra escondido ya sea en el sector A (con probabilidad a priori 0.4) o en el sector B (con probabilidad a priori 0.6). El sheriff del pueblo tiene la misión de encontrarlo vivo o muerto. Si el bandolero está vivo y no es encontrado al final del día  $N$ , muere con probabilidad  $N/(N + 2)$ . Si el bandolero está en A (vivo o muerto) y el sheriff pasa un día buscándolo en A, la probabilidad condicional de que lo encuentre ese día es 0.25. Así mismo, si el bandolero está en B (vivo o muerto) y el sheriff lo busca en ese lugar, lo encuentra con probabilidad 0.15. El bandolero no puede ir de un sector a otro y el sheriff debe pasar un día entero buscando en un sector.

- a) (0.6 puntos) ¿En qué sector debe buscar el sheriff el primer día para maximizar la probabilidad de encontrarlo en ese día?
- b) (0.6 puntos) Dado que el sheriff buscó en A el primer día pero no encontró al bandolero, ¿Cuál es la probabilidad de que el bandolero esté en A?
- c) (0.6 puntos) Si el sheriff lanza una moneda para decidir donde buscar el primer día y encuentra al bandolero en ese día, ¿Cuál es la probabilidad de que haya buscado en A?
- d) (0.6 puntos) Si el sheriff decide buscar en A los primeros dos días, ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre al bandolero vivo en el segundo día?
- e) (0.6 puntos) Si el sheriff decide buscar en A los primeros dos días y no encuentra al bandolero en el primer día, ¿Cuál es la probabilidad de que no encuentre al bandolero muerto en el segundo día?
- f) (0.6 puntos) El sheriff finalmente encuentra al bandolero en el cuarto día. Buscó en A los primeros tres días y en B en el cuarto día, ¿Cuál es la probabilidad de que el bandolero esté vivo?
- g) (0.6 puntos) El sheriff finalmente encuentra al bandolero en el cuarto día. Sabemos que el sheriff buscó dos días en A y dos días en B (pero no sabemos cuales) ¿Cuál es la probabilidad de que el bandolero esté vivo?

Suponga ahora que cada día el sheriff decide buscar en el sector que maximiza la probabilidad de encontrar al bandolero en ese día.

- h) (0.6 puntos) ¿Cuál es la probabilidad que encuentre al bandolero en el sector A?
- i) (0.6 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que nunca busque en el sector B?
- j) (0.6 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre al bandolero la primera vez que busca en B?
- k) (0.6 puntos) Dado que el sheriff busca en B alguna vez, ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre al bandolero en A?