Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

# Cadenas de Markov en tiempo Discreto

Denis Sauré V.
Julio, 2003.

# 1. Problemas de Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

1. En la ciudad de Santiago diariamente se liberan contaminantes a la atmósfera, provenientes principalmente del uso de vehículos y de plantas industriales. La autoridad correspondiente monitorea diariamente la calidad del aire en la ciudad, y según la concentración de contaminantes distingue 3 estados de alerta ambiental: Normal (N), Pre-emergencia (P) y Emergencia (E). Se ha podido determinar que la evolución del estado de alerta obedece a una cadena de Markov.

   Por simplicidad asumiremos que las probabilidades de transición dependen sólo del número de vehículos que circulan por las calles de Santiago cada día (las plantas industriales pueden ser modeladas como un conjunto de vehículos). Si en un día Normal circulan por Santiago $y$ vehículos entonces la probabilidad que el día siguiente sea también Normal vale $1 - F(y)$, y la probabilidad que el día siguiente sea de Pre-Emergencia es $F(y)$. Si en un día de Pre-Emergencia circulan $y$ vehículos entonces el día siguiente será Normal con probabilidad $1-F(y)$ o Emergencia con probabilidad $F(y)$. Si en un día de Emergencia circulan $y$ vehículos entonces el día siguiente puede repetirse el estado de emergencia, lo que ocurre con probabilidad $F(y)$, o bien pasar a estado de Pre-Emergencia, con probabilidad $1 - F(y)$. La función $F$ es continua, estrictamente creciente, $F(0) = 0$, $F(\infty) = 1$.

   La autoridad ha tomado las siguientes medidas para combatir la contaminación: en los días de Pre-emergencia se prohíbe circular a una fracción $1 - \alpha$ de los vehículos de Santiago. En los días de Emergencia la medida se hace más drástica, prohibiéndose la circulación de una fracción $1 - \beta$ de los vehículos de la ciudad ($\beta < \alpha$)).

   En lo que sigue asuma que en Santiago hay un parque vehicular de $x$ vehículos y que cada día salen a circular todos aquellos a los que la autoridad no se los prohíbe.

   *a*) Muestre el grafo asociado a la cadena de Markov que describe la evolución del estado de alerta ambiental en Santiago. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas.

   *b*) Suponga que Ud. posee un automóvil. En promedio, ¿qué fracción de los días del año puede usar su automóvil para desplazarse por Santiago?. Asuma que cuando la autoridad prohíbe el uso de una parte de los vehículos lo hace a de manera que todos los vehículos tienen la misma probabilidad de ser afectados por la medida.

   *c*) Suponga que por cada vehículo que deja de circular el ingreso per cápita para los habitantes de Santiago se reduce en $A$ [$] (asociado a una caída en la producción, y también a mayores incomodidades y costos de transporte por menor disponibilidad de vehículos tanto para transporte público como privado). Además, por cada día que respira el aire de Santiago en estado de Pre-emergencia o Emergencia una persona percibe un empeoramiento de su salud que se puede cuantificar en $B$ [$] y $C$ [$] respectivamente. Formule el problema que debe resolver el gobierno para escoger $\alpha$ y $\beta$.

   *d*) Ud. está evaluando la posibilidad de comprar un segundo auto. En caso de comprarlo, ¿qué fracción de los días del año podrá usar alguno de sus automóviles para desplazarse por Santiago?. Asuma que agregar ese vehículo tiene un efecto despreciable sobre las probabilidades calculadas en los puntos anteriores (el parque vehicular es muy grande).

   *e*) Suponga ahora que muchas personas compran un segundo auto, de manera de usar auto para desplazarse mientras uno de los dos que poseen tenga permiso para circular, y asuma que cuando usan uno de sus autos dejan el otro estacionado en sus respectivas casas. ¿Vale para cada una de estas personas el resultado calculado en el punto anterior?. Indique dónde se deberían hacer cambios al modelo para esta nueva situación.

2. (*) Considere un jugador que apuesta sucesivas veces en el mismo juego. En cada jugada existe una probabilidad $p$ de ganar una unidad y una probabilidad $1 - p$ de perder una unidad. Se asume que las jugadas sucesivas son independientes. El jugador comienza con una cantidad de $i$, $1 < i < N$ y juega hasta que pierde todo o llega a $N$.

*a*) Construya una cadena de Markov que describa la fortuna del jugador en cada instante. Incluya las probabilidades de transición.

*b*) El jugador al llegar a $N$ cambia su estrategia y decide apostar doble o nada, de manera que con probabilidad $p$ su riqueza es $2N$ (y se retira), mientras con probabilidad $1-p$ pierde todo (y su riqueza se reduce a cero). Modele esta nueva situación.

*c*) Si en la situación de la parte (a), la probabilidad de ganar es $p = 1/2$, ¿De qué depende que nuestro jugador finalmente gane o pierda?. Sin hacer cálculos entregue valores específicos cuando se pueda e interprete sus resultados.

*d*) Resuelva el problema para el caso general, es decir, encuentre las probabilidades de terminar ganando o perdiendo el juego si se empieza con una cantidad de $i$, $1 < i < N$. Se juega hasta que pierde todo o llega a $N$, con $p \neq (1-p)$.

3. A un estudiante en práctica de este departamento le fue encargado que estudiase el comportamiento de largo plazo de un determinado sistema (el cual no se describe por tratarse de información confidencial de la empresa). Después de un arduo trabajo neuronal nuestro estudiante logró determinar que el fenómeno se podía modelar como una cadena de Markov con 6 estados y una matriz de transición $M$. Con ayuda de la planilla de cálculo multiplicó muchas veces $M$ por si misma, notando que su resultado se hacía cada vez más parecido a cierta matriz $A$.

Faltaban sólo 15 minutos para la reunión en la que tenía que dar cuenta de sus resultados, cuando apareció en su pantalla un mensaje de error, el cual resultó irreparable y tuvo que reiniciar su computador. Con espanto se dio cuenta que no tenía ningún registro de sus cálculos, pero sin desanimarse tomó un papel y anotó todos los datos que recordaba de la matriz $A$, obteniendo lo siguiente:

MATRIZ $A =$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a$ | $b$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | - | - | - | - | - | - |
| 3 | $c$ | - | 0 | $d$ | - | - |
| 4 | - | - | - | - | $e$ | 0 |
| 5 | - | - | - | - | - | - |
| 6 | - | - | - | - | $e$ | - |

donde el signo - indica que no recuerda lo que iba en esa posición, y las cantidades *a, b, c, d* y *e* son positivas. ¿Cómo podríamos ayudar a nuestro compañero? (conteste las siguientes preguntas y lo sabrá).

*a*) ¿Cuál(es) de los grafos mostrados en la figura 2 es(son) candidato(s) a representar la cadena de Markov en cuestión?.

*b*) Complete la matriz $A$, explicando claramente su respuesta.

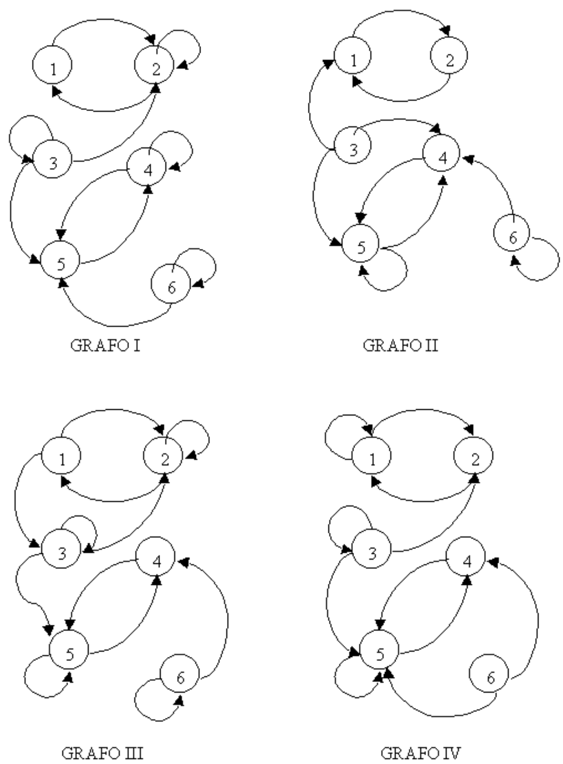


Figura 2

4. Un ex-auxiliar de este curso ha decidido dedicarse a la música, y junto a unos amigos formó el grupo "Jorge y los Markovianos". Actualmente se limitan a tocar los fines de semana en algunos pub capitalinos, siendo una de tantas bandas desconocidas que existen en el país.

   Cada mes existe una probabilidad $q$ que un empresario de algún sello musical nacional los escuche y decida apoyarlos para grabar y realizar giras para cantar en todo el país. Si tal cosa ocurre pasarían a ser una banda conocida a nivel nacional.

   Una banda que es conocida a nivel nacional corre el riesgo de perder el apoyo del sello nacional que la patrocina, con lo cual volvería a ser una banda desconocida. Cada mes, la probabilidad que esto ocurra es $r$. Por otro lado, una banda conocida a nivel nacional puede llegar a llamar la atención del representante de un sello musical internacional, el cual podría decidir patrocinarlos. De ser así la banda pasaría a ser conocida a nivel internacional. Cada mes existe una probabilidad $s$ que esto ocurra ($s + r < 1$).

   Una banda que es conocida internacionalmente nunca dejará de serlo. Sin embargo podemos distinguir dos categorías entre ellas: las que están de moda y las que no. Una banda internacionalmente conocida que está de moda en un mes dado seguirá estando de moda al mes siguiente con probabilidad $t$. Una banda conocida a nivel internacional que no está de moda en un mes dado pasará a estar de moda al mes siguiente con probabilidad $u$. El primer mes que una banda se hace conocida a nivel internacional nunca está de moda. Una banda sólo percibe utilidades (equivalentes a $K[\$]$) en los meses que es conocida internacionalmente y está de moda (parte de esas utilidades corresponden a una satisfacción de su ego).
   <u>Hint:</u> Suponga $0 < x < 1 \quad \forall x \in \{q, r, s, t, u\}$.

   *a*) Construya una cadena de Markov que represente la trayectoria de la banda de Jorge y que permita predecir si en un mes dado percibirán utilidades o no (defina estados adecuados, dibuje el grafo indicando las probabilidades de transición o bien escriba la matriz de prob. de transición).

*b*) ¿Llegarán "Jorge y los Markovianos" a tener éxito algún día?.

*c*) ¿Admite la cadena una ley de probabilidades estacionarias?.

*d*) ¿Qué estados tienen necesariamente una probabilidad estacionaria igual a 0?. Calcule las probabilidades estacionarias.

*e*) ¿Cuál es (aprox.) el valor esperado de las utilidades percibidas por "Jorge y los Markovianos" en febrero del año 2048?.

5. En la terminología forestal un rodal se define como un área de cosecha con características homogéneas, por ejemplo el año de plantación o el costo de cosecha. Un bosque o predio cualquiera está compuesto por muchos rodales.

En este problema usaremos algunas de las herramientas aprendidas sobre procesos estocásticos discretos para modelar la evolución (o crecimiento) de un bosque. Supondremos que, una vez en edad de explotación, un rodal puede clasificarse como de altura baja si la mayoría de los árboles tiene una altura menor a 16 metros, altura media si la mayoría está entre los 16 y 21, y altura alta si predominan los árboles con más de 21 metros.

En un período de 5 años un rodal con altura media evoluciona a uno con altura alta con probabilidad 0,7. Así mismo, un rodal con altura baja puede permanecer así o con probabilidad 0,4 pasa a tener altura media.

Por otro lado, debido a las cosechas parciales o raleos, un rodal con altura alta puede volver a tener altura media, y uno con altura media puede volver a tener altura baja. La cosecha final o tala rasa se traduce en el paso de un rodal con altura alta directamente a uno con altura baja. Esta última transición ocurre con probabilidad $p$ dentro de un período de 5 años y se deja en forma paramétrica pues corresponde a una variable de decisión para el planificador forestal.

Las transiciones media a media y baja a alta tienen probabilidad nula.

*a*) Modele la situación descrita para un rodal mediante una cadena de Markov. Observe que para este problema las transiciones corresponden a 5 años.

*b*) Con objeto de cuidar la fauna y evitar la competencia entre los árboles por el sol es recomendable maximizar la diversidad de tamaños dentro de un bosque. En otras palabras, conviene que exista la misma proporción de árboles altos, medios y bajos. Si el único interés es mantener lo más saludable posible al bosque en el largo plazo ¿qué valor de $p$ le recomendaría al planificador forestal?. Sólo indique qué criterio usaría para decir que un valor es mejor que otro, no es necesario que calcule el valor óptimo. Recuerde que un bosque está compuesto por muchos rodales.

La primera vez que se planta un rodal es necesario esperar un lapso de tiempo, denominado "fuera de oferta", debido a que ninguno de los árboles está en condiciones de ser explotado. Al cabo de 5 años, la probabilidad que un rodal "fuera de oferta" se mantenga como tal es 0,6. De nos ser así, pasará a clasificarse como de altura baja y evolucionará de acuerdo a lo descrito en la parte (a). Sin embargo, en este caso, el valor óptimo de $p$ puede tomar dos valores 0,2 o 0,4 (dependiendo de si el rodal fue atacado por alguna plaga en su primera etapa de crecimiento). Con probabilidad 0,3 un rodal "fuera de oferta" pasa a una situación como la de la parte (a) en la que $p$ vale 0,2. Por ende, con probabilidad 0,1 sucede lo mismo pero $p$ vale 0,4.

*c*) Modele esta nueva situación como una cadena de Markov.

*d*) En base a la cadena anterior responda: ¿tiene una ley estable?. ¿es única?. ¿existe una ley de probabilidades estacionarias?. ¿el límite de la matriz de probabilidades de transición converge?, y si lo hace ¿las filas de la matriz límite son iguales?. Calcule la probabilidad que un rodal recién plantado en el largo plazo tenga altura alta.

*e*) Por último, calcule cuántos años en promedio un rodal recién plantado está "fuera de oferta".

6. (*) Una tienda vende un único producto, del cual mantiene inventarios en una bodega. Al comenzar cada semana el gerente observa el inventario disponible en bodega, $I$. Si $I \leq s$ entonces el gerente pide $S - I$ unidades al proveedor ($0 < s < S$), de manera de quedar con $S$ unidades en bodega. El pedido es recibido de inmediato. Si $I > s$ el gerente no hace un pedido esa semana.

   Las demandas en cada semana son variables aleatorias iid. En una semana cualquiera la demanda es de $k$ unidades con probabilidad $\alpha_k$ ($k \geq 0$). La demanda insatisfecha se pierde.

   *a*) Muestre que el nivel de inventarios al comienzo de cada semana (antes de hacer el pedido) se puede modelar como una cadena de Markov. Indique claramente cuáles son los estados que ha definido y calcule las probabilidades de transición. Dibuje el grafo representante para el caso $s = 2, S = 4$.

   En lo que sigue considere $0 < s < S$ arbitrarios.

   *b*) Suponga que la llegada de clientes a la tienda queda bien descrita por un proceso de Poisson de tasa $\lambda$ [clientes/semana], y que cada cliente compra una unidad. Indique cuánto valen los valores $\{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ en este caso. Agrupe los estados en clases de equivalencia, clasifíquelos de acuerdo a si son transientes o recurrentes y calcule su periodicidad.

   *c*) Suponga ahora que la demanda es determinística e igual a 1 unidad en cada semana (i.e. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_k = 0\,\forall k \neq 1$). Dibuje el grafo representante para este caso (note que la bodega puede comenzar con menos de $s$ unidades). Agrupe los estados en clases de equivalencia, clasifíquelos y calcule su periodicidad.

   *d*) Suponga ahora que la demanda en cada semana es mayor que $S$ con seguridad (es decir, $\alpha_k = 0\,\forall k \leq S$). Dibuje el grafo representante para este caso. Agrupe los estados en clases de equivalencia, clasifíquelos y calcule su periodicidad.

7. (*) En un pequeño centro hospitalario se tiene la urgencia de instalar equipos nuevos. Estos equipos son muy costosos y se deben manejar con mucho cuidado por lo que se necesita que el establecimiento esté vacío al momento de la instalación. Actualmente hay $M$ pacientes en el centro, y con el fin de poder proceder a la instalación no se recibirán más pacientes hasta que ésta se realice.

   Cada mañana un doctor evalúa la condición de los pacientes para ver si son dados de alta. Se ha determinado que cada paciente tiene una probabilidad p de estar rehabilitado y salir del centro y una probabilidad $(1-p)$ de seguir internado, independiente de lo que ocurra con los demás pacientes. Nadie puede ingresar al centro hasta después de instalados los equipos.

   *a*) Muestre que el sistema descrito puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo discreto, dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.
   Hint: Calcule la probabilidad $\Pr[X(n) = r | X(n-1) = k]$, con $X(n)$ representando a la cantidad de personas en el centro en la semana $n$.

   *b*) Si el sistema tiene inicialmente $M$ pacientes, Cuál es la probabilidad que algún día tenga $M-1$?, ¿Cuál es la probabilidad que algún día se puedan instalar los equipos?. Encuentre estas probabilidades y fundamente adecuadamente sus respuestas.

   Ahora suponga que la instalación de los equipos ya se realizó, por lo que pueden llegar pacientes al centro hospitalario. Cada cliente, al llegar, paga un monto $C$[\$] que cubre su atención médica durante todos los períodos que estará en el centro. Se sabe que la probabilidad que lleguen $k$ pacientes en un día es $q_k$, con $k = 0, \ldots, 3$. Además el centro sólo cuenta con tres camas por lo que si llega una persona y no hay cama disponible, ésta es derivada a otro centro médico. Considere que una persona que ingresa al centro es internada al menos por una noche (no puede tener el alta sin una evaluación positiva del doctor que pasa revisión en la mañana).

*c*) Modifique su modelo para esta nueva situación y dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique los estados. Existirán probabilidades estacionarias para este sistema?, en caso afirmativo plantee las ecuaciones que permitirían encontrarlas. Entregue una expresión para ganancia diaria esperada en el largo plazo.

8. Un inversionista extranjero desea invertir su capital en el mercado accionario nacional. De acuerdo a un estudio que realizó, el comportamiento mensual de este mercado puede clasificarse en 3 categorías: En alza (A), estable (E) y en baja (B). Además, este comportamiento mensual es una variable aleatoria que depende únicamente del comportamiento en el mes anterior. La siguiente matriz representa las probabilidades de transición en el mercado accionario:

| | A | E | B |
|---|---|---|---|
| A | 0.7 | 0.2 | 0.1 |
| E | 0.3 | 0.5 | 0.2 |
| B | 0.1 | 0.4 | 0.5 |

Como el inversionista tiene la posibilidad de ubicar su capital en otro país, por lo que ha decidido observar el mercado nacional. La política de inversión que seguirá es tal que si durante 3 meses consecutivos observa al mercado nacional en alza, invierte sin retirar su dinero, sin embargo, si durante 2 meses consecutivos observa que el mercado está en baja invierte en el extranjero sin la posibilidad de reconsiderar su decisión. Si invierte en el mercado accionario nacional obtendrá un ingreso esperado mensual de MA [$], ME [$] o MB [$], si el comportamiento es en alza, estable o baja respectivamente.

Si inicialmente el mercado accionario nacional se encuentra estable, responda:

*a*) Explique por qué este problema de inversión puede formularse como una cadena de Markov. Represéntelo con un grafo, identifique y clasifique sus estados.

*b*) ¿Existen probabilidades estacionarias?.

*c*) Suponga que el inversionista finalmente invierte en el mercado nacional, ¿Cómo cambia su respuesta de la parte anterior?, ¿Cuál es el ingreso promedio mensual que espera obtener el inversionista en esta situación?.

9. Un hotel opera en un paraje montañoso de elevado atractivo turístico. Cada tarde puede llegar un nuevo cliente solicitando una habitación, lo cual ocurre con probabilidad $p$, o bien puede no llegar ninguno (con probabilidad $q = 1 - p$). Una fracción $\alpha$ de los clientes se queda en el hotel sólo una noche (llegan una tarde y se van en la mañana siguiente), mientras que una fracción $\beta = 1 - \alpha$, decide quedarse una noche más disfrutando del hermoso paisaje (i.e. llegan una tarde y se van en la mañana del día subsiguiente). Nadie pasa más de 2 noches en el hotel.

*a*) ¿Cuál es el máximo número de habitaciones que pueden estar ocupadas simultáneamente?.

*b*) Modele el estado de ocupación del hotel para cada noche (cuántas habitaciones están ocupadas) como una cadena de Markov. Defina adecuadamente los estados, e indique las probabilidades de transición entre ellos. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas.

*c*) Suponga que el hotel le cobra a sus clientes $A$ [$] por la primera noche de estadía y $B$ [$] por noche adicional ($B < A$). ¿Cuál es el valor esperado del ingreso por noche en el largo plazo?. ¿Cuál es el número promedio de habitaciones ocupadas?.

*d*) Suponga que el día que un cliente llega al hotel se realiza un sanitizado de la habitación que ocupará, además se le regala un mapa de la zona y un pequeño objeto de artesanía típica del lugar (con el logo del hotel), y se le ofrece una bebida por cuenta de la casa. Todo lo anterior tiene un costo de $C$ [$]. ¿Qué relación deben cumplir $A$, $B$ y $C$ para que el hotel pueda financiarse en el largo plazo?.

*e*) Los días en que hay sólo un huésped en el hotel, los dueños se dan el tiempo de enseñarle a preparar el plato típico de la región. ¿Qué porcentaje de los clientes se va sin aprender a preparar dicho plato?.

10. *a*) En una ciudad el 9 % de los días soleados son seguidos por otro día soleado y el 80 % de los días nublados son seguidos por otro día nublado. Modele este problema como una cadena de Markov.

Suponga ahora que el estado del tiempo en un día cualquiera depende del estado del tiempo en los últimos dos días, de la siguiente forma:

- Si los dos últimos días han sido soleados entonces con una probabilidad de 95 % hoy también estará nublado.
- Si ayer estuvo nublado y hoy soleado, hay una probabilidad de un 70 % de que mañana esté soleado.
- Si ayer estuvo soleado y hoy nublado entonces 60 % de las veces mañana estará nublado.
- Si han pasado dos días con el cielo cubierto de nubes, hay una probabilidad de un 80 % de que las nubes quieran quedarse un día más.

*b*) Con esa información modele el estado del tiempo en la ciudad como una cadena de Markov.

*c*) Si ayer estuvo nublado y hoy soleado, ¿Cuál es el número promedio de días nublados antes del próximo día soleado?.

*d*) Si el tiempo en un día dado dependiera del estado del tiempo en los últimos $n$ días ¿Cuántos estados se necesitarían para modelar el tiempo como una cadena de Markov?.

*e*) Generalice a sistemas con memoria finita ($N$ estados, y la probabilidad de estar en un estado dado en un período depende del estado de los últimos $M$ períodos).

11. Una empresa de transporte cuenta con una flota de 2 camiones destinados para traslados y fletes. La demanda diaria que enfrenta la empresa es aleatoria, con la siguiente ley de probabilidades:

$$\begin{aligned} Pr[D=0] &= 0{,}4 \\ Pr[D=1] &= 0{,}4 \\ Pr[D=2] &= 0{,}2 \end{aligned}$$

Al comienzo del día, se reciben los pedidos por fletes de acuerdo a la distribución anterior y se debe tener en cuenta que un camión sólo puede atender un pedido por día. Un camión que durante un día ha realizado un flete tiene una probabilidad 0.5 de requerir mantención después del traslado, en cuyo caso al día siguiente no estará disponible para realizar fletes. La mantención de un camión demora exactamente un día y tiene un costo de $10.

*a*) Defina $N_k$ como el número de camiones disponibles para realizar fletes al comienzo del día k. Muestre que $N_k$ ($k = 1, 2,...$) puede modelarse como una cadena de Markov. Defina los estados y determine las probabilidades de transición de un período.

*b*) Determine las probabilidades estacionarias.

*c*) A partir de la respuesta de la parte anterior, ¿Cuál es el número esperado de fletes que realizaría esta empresa en estado estacionario?. ¿Cuál es el costo diario promedio por concepto de mantención?. ¿Cuánto es lo mínimo que esta empresa está dispuesta a cobrar por cada flete?.

12. (*) Un conocido mago del Paseo Ahumada ha hecho una respetable fortuna con el siguiente juego de azar: en una mesa tiene tres vasos (no transparentes) boca-abajo y dos bolitas que se colocan (juntas o por separado) debajo de alguno de los vasos. Luego, con una habilidad y rapidez impresionantes, el mago procede a mover las bolitas de un vaso a otro. En cada movimiento cambia de posición sólo una bolita. Esto lo hace incontables veces hasta que un jugador deseoso de apostar le dice “STOP”. En ese

momento el jugador tiene que escoger uno de los vasos. Si debajo de él están las DOS bolitas, gana. De lo contrario pierde. Para simplificar el juego, asuma que en cada movimiento el mago escoge con igual probabilidad cualquiera de las bolitas, y también equiprobablemente escoge a cuál de los OTROS vasos la cambia.

*a*) Muestre que el juego anterior se puede modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto con sólo 6 estados. Constrúyala. Identifique los estados y especifique cuáles son las probabilidades de transición.

*b*) Sea $r_k$ el número de vasos vacíos en el estado $k$, y $\pi_k = \frac{3-r_k}{9}$. Demuestre que el vector definido por los $\pi_k$ corresponde a una ley estable del sistema.

*c*) Argumente si la cadena anterior admite o no probabilidades estacionarias. En caso que su respuesta sea positiva, ¿Cuánto valen?. Explique intuitivamente por qué hay estados con mayor porbabilidad estacionaria que otros.

*d*) Ignorando el hecho que usted pueda tener una vista muy aguda, ¿Cuál es la probabilidad de ganar el juego?. Considere que usted escoge equiprobablemente cualquiera de los tres vasos y que el mago hace “muchos” movimientos antes de que usted le diga “STOP”.

13. (*) Un individuo posee $r$ paraguas, que usa para ir caminando de su casa a la oficina y viceversa. Si él está en su casa al comienzo del día y está lloviendo, entonces, si al menos hay un paragua en la casa, él tomará uno para ir a su oficina. Análogamente, si él está en su oficina, tomará uno para ir a su casa. Si no está lloviendo no toma ningún paragua. Suponga, que independiente del pasado, llueve al comienzo (final) del día con probabilidad $p$.

*a*) Defina una cadena de Markov de $r + 1$ estados que ayude a determinar que proporción del tiempo el individuo se moja.
<u>Hint:</u> Defina los estados de la cadena como el número de paraguas que tiene la persona en el lugar en que se encuentra (ya sea su casa o la oficina). Suponga que existe una transición cada vez que el individuo cambia de lugar (de la casa a la oficina o viceversa)

*b*) Encuentre las probabilidades estacionarias.

*c*) ¿Qué fracción del tiempo (porcentaje de caminatas) el individuo se moja?.

14. (*) Considere una población con sólo dos individuos que en cada generación producen dos nuevos individuos y después mueren (el tamaño de la población es, por tanto, constante igual a dos). Cada individuo porta dos genes que determinan el color de los ojos. Estos genes pueden ser los dos recesivos, los dos dominantes o tener un gen recesivo y uno dominante. Llamaremos

$$\begin{aligned} X =& \text{ Gen Dominante} \\ Y =& \text{ Gen Recesivo} \end{aligned}$$

Cada uno de los padres transmite a sus descendientes un sólo gen. Además, es igualmente probable que se transmita cualquiera de los dos genes que porta el progenitor a sus descendientes.

*a*) Defina una cadena de Markov donde el estado del sistema sea la cadena genética de los dos individuos de la población. Dibuje el grafo asociado y calcule las probabilidades de transición.

*b*) Defina las clases, los tipos de estados en cada clase y su correspondiente período.

*c*) ¿Cuál es la probabilidad que, en el largo plazo, sólo hayan individuos con genes recesivos si originalmente se parte con dos individuos idénticos con carga genética (X,Y)?.

15. (*) Suponga que al inicio de cada período, cada uno de los $N$ individuos de una población pueden encontrarse en 3 condiciones de salud distintas: Sano, Infeccioso e Infectado.

En cada período se forman $N/2$ parejas al azar (suponga $N$ par), cada una de las cuales puede mantener un contacto peligroso con probabilidad $p$ (independiente de lo que hagan las demás). Al final del período todas las parejas se desarman pudiéndose formar otra vez.

Si una pareja que mantuvo un contacto peligroso está formada por un individuo que está Sano y por uno Infeccioso, quien estaba sano contraerá la enfermedad pasando a estar Infeccioso al inicio del siguiente período. Un individuo Infeccioso permanece en ese estado durante sólo 1 período después de lo cual pasa a ser un individuo Infectado.

Los individuos Infectados nunca abandonan esta condición, bajo la cual no pueden contagiar a nadie durante un contacto peligroso, y la que los hace inmunes a un nuevo contagio (porque ya tiene anticuerpos en su organismo).

*a*) Considere a un individuo particular de esta población, que actualmente se encuentra sano. Si hay $i$ individuos infecciosos, ¿Cuál es la probabilidad de que este individuo se contagie durante el siguiente período?. Llame a esta probabilidad $q_i$.

*b*) Si consideramos $X_t$ como el número de individuos infecciosos al inicio del período $t$, ¿Es posible modelar la situación descrita utilizando cadenas de Markov con $X_t$ como variable de estado?.

*c*) Considere $X_t$, e $Y_t$ como el número de individuos infecciosos y sanos, respectivamente, al inicio del período $t$. Modele la situación descrita como una cadena de Markov. Clasifique los estados, caracterice las clases y encuentre la matriz de transición de 1 período.
Hint: No es necesario que dibuje todo el grafo, basta con identificar las transiciones de los distintos tipos de estado.

*d*) ¿Existirá una ley de probabilidades estacionarias?, ¿Cambia su respuesta si permitimos que un individuo pueda mejorar, es decir, pasar de infectado a sano con probabilidad $r$ en un período?.

16. Sean $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias independientes tal que $\Pr[X_i = j] = \alpha_j$, con $j \geq 0$. Digamos que ocurre un registro en el instante $n$ si
$X_n > \text{máx}(X_1, ..., X_{n-1})$, donde $X_0 = -\infty$, y si ocurre un registro en el instante $n$, sea $X_n$ el valor de registro. Sea $R_i$ el $i-$ésimo valor de registro.

    *a*) Argumente que $\{R_i, i \geq 1\}$ es una cadena de Markov y calcule sus probabilidades de transición.

    *b*) Sea $T_i$ el tiempo entre el $i-$ésimo y el $(i+1)-$ésimo registro. Es $\{T_i, i \geq 1\}$ una cadena de Markov?. Y $\{(R_i, T_i), i \geq 1\}$? Calcule las probabilidades de transición donde corresponda.

    *c*) Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i, n \geq 1$. Argumente que $\{S_n, n \geq 1\}$ es una cadena de Markov cuando los $X_i$ son continuos y encuentre sus probabilidades de transición.

17. Autos llegan a un taller de pintura de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda$ [autos/día]. Sin embargo este taller tiene capacidad para sólo $n$ autos y los autos que llegan y encuentran el recinto lleno no entran. Suponga que todos los autos son iguales y que pintar cualquiera de ellos demora exactamente un día, sin embargo dado que el taller es atendido exclusivamente por su único dueño, la capacidad de trabajo es un auto por día. Si al comienzo del día el recinto esta vacío no trabajará durante éste a pesar de que sí recibirá autos durante el transcurso del día.

    Modele el número de autos sin pintar al comienzo del día como una cadena de Markov en tiempo discreto. Clasifique los estados y encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición.

18. Una tienda comercial ha determinado que los clientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro $\lambda$ [clientes/semana]. La tienda ofrece un único producto y los clientes llegan sin conocer de antemano cuál es el precio del producto. Los clientes son heterogéneos en el sentido que su disposición a pagar por el producto es distinta (entendemos por disposición a pagar la cantidad de dinero máxima que el cliente estaría dispuesto a pagar por el producto). Desde el punto de vista de la tienda la disposición a pagar, que llamaremos $d$, del cliente es una variable aleatoria con función de densidad

$f(d)$ continua en $[0, \infty)$ y función de distribución $F(d)$ conocidas. Un cliente compra el producto si su disposición a pagar es mayor que el precio al que la tienda vende el producto; en caso contrario se va sin comprar. Suponga que la tienda dispone de inventario infinito.

*a*) Si la tienda vende el producto a un precio $P$, ¿cuál es la probabilidad que un cliente cualquiera que entra a la tienda compre el producto? (a esta probabilidad la llamaremos $q(P)$). ¿Cuál es la ley de probabilidad para el número de personas que compra el producto y para el número de personas que se van sin comprar en una semana dada?. ¿Cuánto vale el ingreso esperado por ventas en una semana cualquiera?.

*b*) ¿Qué condiciones debe satisfacer $P^*$, el precio que maximiza el ingreso esperado por ventas en una semana cualquiera?.

Suponga ahora que el inventario disponible es de $C$ unidades al comienzo de una semana dada, y no tiene la posibilidad de reabastecerse en caso que se agote el producto.

*c*) ¿Cuánto vale $B(P, C)$, el ingreso esperado por ventas para la esa semana si se vende a un precio $P$?.

La tienda operará durante $T$ semanas sin reabastecerse del producto ni modificar el precio, con un inventario inicial de $C$ unidades.

*d*) ¿Puede modelarse el inventario disponible al inicio de cada semana como una cadena de Markov?. ¿Puede modelarse el inventario disponible en cada instante del tiempo como una cadena de Markov en tiempo continuo?. Escriba explícitamente los modelos si corresponde.

Por último, considere que la tienda puede modificar el precio al comienzo de cada semana, manteniéndolo constante durante el resto de la semana.

*e*) Formule un modelo de programación dinámica que permita tomar las decisiones de precio semana a semana, de manera de obtener el máximo ingreso esperado en un horizonte de $T$ semanas, con un inventario inicial de $C$ unidades.

Hint: Todas las partes de esta pregunta son independientes y pueden dejarse expresadas en función de resultados de las partes anteriores, aún cuando no los hayan calculado.

19. (*) Armijo, el colectivero de su barrio, le pide que lo asesore en el desarrollo de un nuevo proyecto de su microempresa de transporte de pasajeros, con el fin de definir la tarifa a cobrar.

Nuestro amigo cuenta con 2 vehículos con los que pretende implementar un servicio de arriendo de autos.

A las 8 de la mañana de cada día él conocerá la demanda por arriendos, la cual sigue la siguiente ley de probabilidades.

$Pr[D = 0]$ =0.4 , $Pr[D = 1]$ =0.2 y $Pr[D \geq 2]$ =0.4.

Un auto es arrendado por todo el día, es decir, con cada vehículo se puede atender a lo más un cliente diario.

Dada la apariencia apacible de Armijo, los clientes abusan de su buena voluntad, por lo que se estima que con probabilidad $p$ =0.7 maltratarán el automóvil durante su uso, por lo que nuestro atribulado colectivero deberá llevarlo a mantención el día siguiente, y no podrá arrendarlo. La mantención demora exactamente un día, independiente del número de autos a reparar y tiene un costo de \$10.000 por vehículo.

Con el fin de ayudar a nuestro querido Armijo se pide que responda:

*a*) Jutifique por qué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el número de vehículos disponibles al comienzo de un día cualquiera

*b*) Modele la situacion descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Dibújela con los respectivos estados, encuentre la matriz de transición y clasifique los estados en clases.

*c*) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas.

A partir de las probabilidades estacionarias calculadas en la parte anterior, responda:

*d*) ¿Cuál es número esperado de arriendos diarios que realizaría esta empresa en estado estacionario?, ¿Cuál es el costo diario promedio por concepto de mantención? y ¿Cuál es el mínimo precio que Armijo debe cobrar por cada arriendo?.

20. (*) Una unidad productiva de una empresa minera tiene un número muy grande (iguala a $T$) de mini retro excavadoras para la extracción del mineral. Estas máquinas se utilizan durante el día y al caer la tarde se guardan para ser utilizadas en la mañana siguiente.

Sin embargo, existe una probabilidad $q$ que una máquina en operación falle durante un día, independiente de cuántos días consecutivos lleve operando. En estos casos la mini retro excavadora será enviada al taller de reparación al final del día en el que falla, donde su mantenimiento siempre se realiza al día siguiente. De esta manera, una máquina que falla un día $t$ estará lista para su utilización en la mañana del día $t + 2$ independiente de lo que pase con las demás.

*a*) Justifique por qué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el número de mini retro excavadoras buenas al inicio de cada día. ¿Cuál es la probabilidad que un día fallen $i$ máquinas si esa mañana había $j$ buenas?. Llame a esta probabilidad $s(i, j)$.

*b*) Modele la situacion descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(i, j)$, clasifique los estados en clases y caracterícelas. Argumente la existencia de una ley de probabilidades estacionarias.

*c*) Suponga que la cadena anterior admite probabilidades estacionarias y que usted conoce el vector $\Pi$. Además se sabe que si la mina al final de un día cualquiera cuenta con menos de $L$ máquinas buenas y es inspeccionada por la gerencia de producción debe pagar una multa de $C$ [\$]. Según información histórica en un día cualquiera existe un probabilidad $r$ de que se produzca un revisión. Sin embargo, si al momento de producirse la inspección cuenta con la totalidad de estas máquinas en buen estado la unidad recibirá un incentivo económico de $F$ [\$]. Entregue una expresión para los beneficios diarios en en largo plazo por concepto de multas y estímulos por revisión del organismo de seguridad.

Considere que esta unidad de la mina modifica su política de envío de máquinas a mantención de manera que las enviará al taller sólo en lotes de $J$ máquinas que necesitan reparación. Todas las máquinas enviadas al taller serán reparadas el día siguiente y estarán disponibles en la mañana del día subsiguiente del que fueron enviadas a mantención. La probabilidad que una máquina que está en funcionamiento una mañana cualquiera falle ese día seguirá siendo $q$.

*d*) Modele esta nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Dibújela con los respectivos estados, encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(i, j)$.

*e*) Suponga que la cadena anterior admite probabilidades estacionarias y que usted conoce el vector $\Pi$, y que la gerencia de operaciones realiza revisiones como las descritas en la parte (3) con las mismas probabilidades, costos y beneficios. Suponga además que cada vez que esta unidad envía máquinas al taller incurre en un costo fijo $K$ [\$], (independiente de cuántas máquinas envíe). Entregue una expresión para los beneficios diarios en en largo plazo por concepto de multas y estímulos por revisión del organismo de seguridad.

21. Sea $\{X_n;\ n = 1, \ldots\}$, una cadena de Markov irreductible que tiene un conjunto numerable de estados. Considere ahora un nuevo proceso estocástico $\{Y_n;\ n = 0, \ldots\}$ que sólo acepta valores de la cadena de Markov que estén entre 0 y $N$. Esto es, se define $Y_n$ con el $n$-ésimo valor de la cadena de Markov que está entre 0 y $N$. Por ejemplo, si $N = 3$ y $X_1 = 1,\ X_2 = 3,\ X_3 = 5,\ X_4 = 6,\ X_5 = 2$, entonces $Y_1 = 1,\ Y_2 = 3,\ Y_3 = 2$.

   *a*) ¿Es $\{Y_n;\ n = 0, \ldots\}$ una cadena de Markov?.

   *b*) Sea $\pi_i$ la proporción del tiempo que $\{X_n;\ n = 1, \ldots\}$ está en el estado $i$. Si $\pi_i > 0\ \forall i$, ¿qué proporción del tiempo está $\{Y_n;\ n = 0, \ldots\}$ en un estado $j$?.

   *c*) Suponga que $X_n$ es recurrente nulo y sea $\Pi_i(N)$, $i = 1, \ldots N$ la proporción del tiempo en $\{Y_n; n = 0, \ldots\}$.
   Si $i \neq j$, muestre que $\Pi_j(N)$ es igual a:
   $\Pi_i(N) \cdot E[\text{tiempo que el proceso } X \text{ pasa en } j \text{ entre retornos a } i]$

   *d*) Use la parte (c) para argumentar que en el paseo aleatorio simétrico el número esperado de visitas a un estado $i$ antes de retornar al origen es 1.

22. Suponga que un sistema queda bien modelado por 2 cadenas de Markov ergódicas $A$ y $B$, con probabilidades de transición $P_{A_i,A_j}$ y $P_{B_i,B_j}$ respectivamente. El sistema se conecta a través de los estados $A_1$ y $B_1$ tal como se ilustra en la figura, de manera que las probabilidades de transición en una etapa de la nueva cadena quedan bien definidas por:

$$P'_{A_1,B_1} = \epsilon, \quad P'_{A_1,A_j} = (1-\epsilon) \cdot P_{A_1,A_j} \quad \forall A_j$$

$$P'_{B_1,A_1} = \delta, \quad P'_{B_1,B_j} = (1-\delta) \cdot P_{B_1,B_j} \quad \forall B_j$$

El resto de las probabilidades de transición no sufren modificaciones.

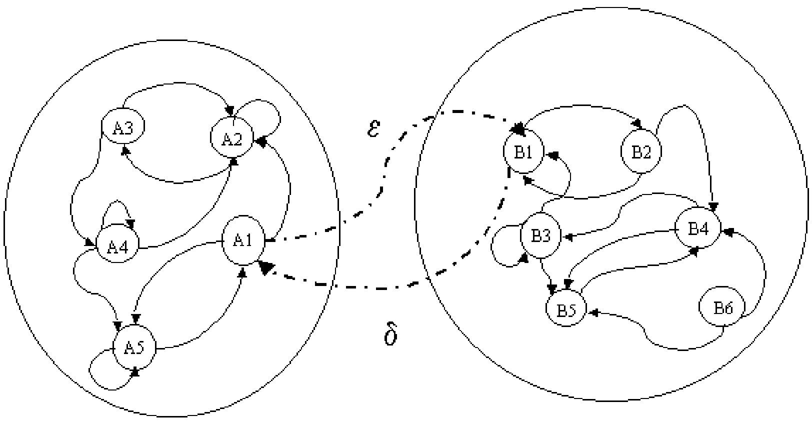


Figura 3

   *a*) Suponiendo que $\epsilon > 0$ y $\delta = 0$, conteste las siguientes preguntas:
   - Clasifique los estados de la cadena. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.
   - Partiendo del estado $A_1$ calcule el tiempo esperado de retorno a $A_1$ condicional a que la primera transición es a algún estado de $A$.
   - Encuentre el tiempo esperado de llegar por primera vez al estado $B_1$ partiendo de $A_1$ (y llámelo $\mu_{AB}$).

*b*) Suponiendo que $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, conteste las siguientes preguntas:

- Clasifique los estados de la cadena. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.
- Encuentre el tiempo esperado $\mu_{BA}$ de llegar por primera vez al estado $A_1$ partiendo de $B_1$.
- Encuentre las probabilidades estacionarias de la cadena combinada. Puede expresar su respuesta en término de los parámetros del problema y de las probabilidades estacionarias de las cadenas originales, $\pi_{A_i}$ y $\pi_{B_i}$.

23. Una tienda mayorista de repuestos para automóviles vende un único repuesto el cual puede ser de 2 tipos: *Original* o *Taiwanes*. Los repuestos se mantienen en inventario según una política $(s, S)$ de revisión semanal para cada tipo de repuestos. Es decir, al comienzo de cada semana revisa el nivel de inventario $I_i$ y si está bajo $s_i$ se encarga una cantidad $S_i - I_i$ con $i \in \{O, T\}$. Los pedidos demoran exactamente 1 período en estar disponibles, es decir, llegan al inicio de la siguiente semana.

Cada semana la tienda recibe el pedido de un único cliente, el que demandará una cantidad aleatoria de cada tipo de productos, de manera que con probabilidad $q_i(k)$ demandará $k$ unidades de repuesto tipo $i$. Si no hay unidades suficientes de producto tipo $i$ en el inventario, el cliente siempre estará dispuesto a sustituirlas por productos del otro tipo. Si con esta sustitución todavía faltan unidades, el cliente llevará todas las unidades disponibles y se irá molesto de la tienda.

El costo de mantener inventariada una unidad de producto por una semana es $C$ independiente del tipo de repuesto. El beneficio de vender una unidad de producto tipo $i$ es $B_i$, con $B_i > C$. Además, si un cliente no puede satisfacer completamente su pedido, la tienda incurre en un costo de imagen valorado en $V$, independiente de cuántas unidades faltaron. Por último, existe un costo por poner una orden al proveedor de $K$ y el precio al que la tienda compra cada repuesto es $P_i$.

*a*) Modele el inventario de cada tipo de productos al inicio de una semana como una cadena de Markov. Escriba explícitamente las probabilidades de transición y argumente la existencia de probabilidades estacionarias.
<u>Hint:</u> No necesita dibujar toda la cadena, sino remitirse a los casos interesantes.

Responda las siguientes preguntas suponiendo conocida la ley de probabilidades estacionarias de la cadena anterior:

*b*) ¿Cuál es la probabilidad que un cliente se retire indignado de la tienda?. ¿Qué fracción de los clientes se retira de la tienda con el pedido que deseaba originalmente?

*c*) ¿Cuál será el ingreso por unidad de tiempo esperado del dueño de la tienda?.

# 2. Resolución problemas de Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

■ **2.** *a*) La cadena se muestra en la figura 1.

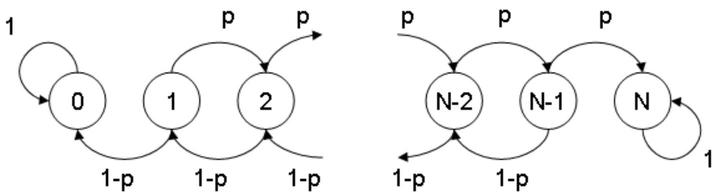


Figura 1: Cadena problema 2-1

*b*) La cadena se muestra en la figura 2.

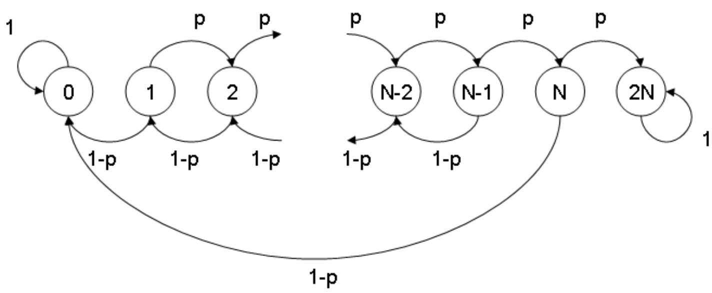


Figura 2: Cadena problema 2-2

*c*) Sea:

$$f_i = P[\text{Ganar dado que parto con i unidades}]$$

Inmediatamente vemos que $f_0 = 0$ y que $f_N = 1$. De la misma forma vemos (condicionando en el resultado de la primera apuesta) que:

$$f_i = \frac{1}{2} f_{i+1} + \frac{1}{2} f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (N-1) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = i \cdot f_1 = \frac{i}{N}$$

*d*) Para el caso general procederemos exactamente como lo hicimos para el caso particular:

$$f_i = p \cdot f_{i+1} + (1-p) \cdot f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = \rho(f_i - f_{i-1}) \qquad \forall 0 < i < N$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$ La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = \rho f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = \rho^{i-1} f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (\sum_{i=1}^{N-1} \rho^i) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho^i} = \frac{1-\rho}{1-\rho^N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = (\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k) \cdot f_1 = \frac{1-\rho^i}{1-\rho^N}$$

■ **6.** *a*) Primero veamos cuál es el grafo para el caso reducido (s=2 y S=4), el cual se muestra en la figura 3.

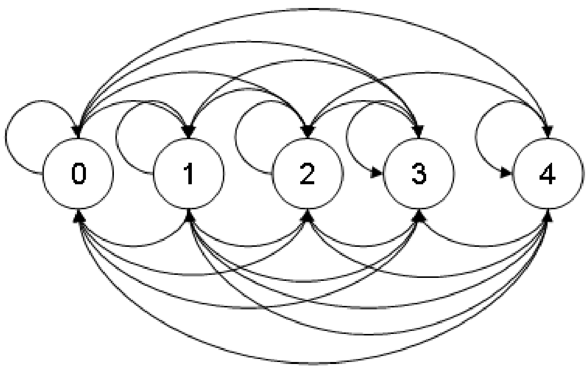


Figura 3: Cadena problema 6-1

La idea del ejemplo es ver que el número de transiciones es tal que no tiene sentido hacer el grafo. La idea entonces es identificar cada transición mediante la probabilidad de ocurrencia. La cadena para el caso general se muestra en la figura 4.

Donde:

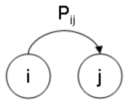


Figura 4: Cadena problema 6-2

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i > s \quad y \quad j > i \\ \alpha_{i-j} & si \quad i > s \quad y \quad 0 < j \leq i \\ \sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k & si \quad i > s \quad y \quad j = 0 \\ \alpha_{T-j} & si \quad i \leq s \quad y \quad 0 < j \leq T \\ \sum_{k=T}^{\infty} \alpha_k & si \quad i \leq s \quad y \quad j = 0 \end{cases}$$

*b*) La cadena es exactamente la misma, sólo que los $\alpha_k$ toman valores específicos. Éstos son los siguientes:

$$\alpha_k = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

No es difícil ver que todos los estados están comunicados entre sí y que forman una única clase y dado que la cadena es finita, esta clase es recurrente (claramente cada estado es aperiódico dado que $p_{ii} \neq 0 \forall i$.

*c*) En este caso sí podemos visualizar la cadena como un todo, puesto que el número de transiciones es muy bajo. La cadena se muestra en la figura 5.

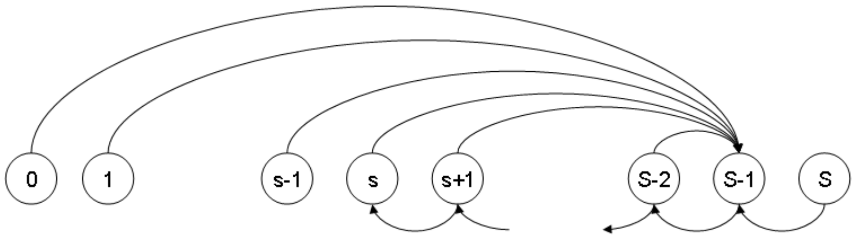


Figura 5: Cadena problema 6-3

De la figura vemos que los estados 0 al s-1 más el estado T son transientes y dado que no están comunicados entre sí cada uno por sí solo constituye una clase transiente. Por otro lado los estados del s al T-1 están comunicados entre sí y forman una clase recurrente (con seguridad después de T-s-1 pasos volveremos a cualquiera de los estados de esta clase). Por otro lado el periodo de los estados de la clase recurrente es T-S-1, dado que existe sólo una forma de volver a un estado partiendo del mismo, y eso ocurre con seguridad después de T-s-1 etapas.

*d*) La cadena se muestra el la figura 6.

Vemos que existe un único estado recurrente, que forma por sí solo una clase recurrente. Todos los otros estados no están comunicados entre sí y conforman por sí solos clases transientes.

■ **7.** *a*) La situación claramente puede ser modelada como una cadena de Markov en tiempo discreto debido a que si defino los estados como el número de pacientes que quedan en el centro en un día, entonces todas las probabilidades de transición pueden ser determinadas a partir de esta información. De esta forma se tiene que:

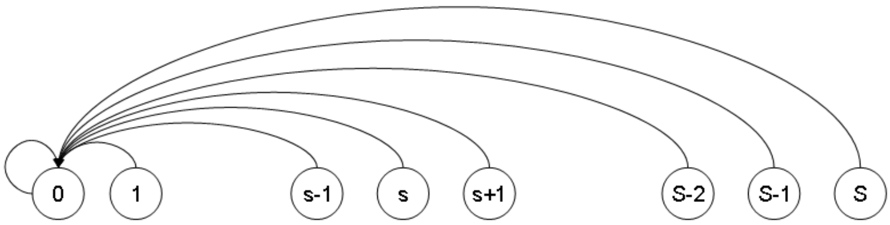


Figura 6: Cadena problema 6-4

- El estado $i$ será la situación en que quedan $i$ pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \ldots, M\}$.
- Las probabilidades de transición quedan determinadas por la siguiente formula[1]:

$$P(i,j) = P(\text{ir del estado i al estado j}) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!j!} p^{i-j} \cdot (1-p)^j & si M \geq i \geq j \geq 0 \\ 0 & si j \geq i \end{cases}$$

La cadena se muestra a continuación en la figura 7.

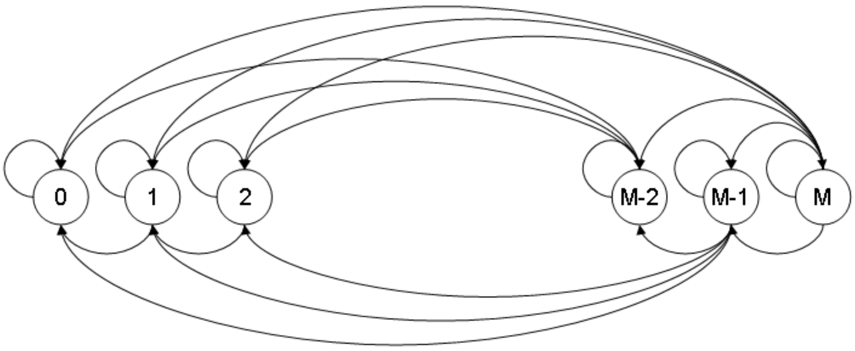


Figura 7: Cadena problema 7-1

- Existen $M+1$ clases distintas: 1 recurrente compuesta por el estado 0, y $M$ clases transientes compuestas cada una por uno de los $M$ estados restantes. Recuerdar que una clase está compuesta por todos los estados comunicados entre sí, y en este caso ningún estado se comunica con otro.

*b*) Primero necesitamos encontrar la probabilidad de eventualmente pasar por el estado $M-1$. Para calcular esta probabilidad vemos que de pasar por este estado, la transición debe lograrse en algún

[1] Esto es equivalente a definir la matriz de transición P.

número de períodos. Por esto se tiene que:

$$\begin{aligned}
P(\text{Pasar por el estado M-1}) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Pasar por M-1 en i transiciones})\\
P(\text{Pasar por el estado M-1}) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Quedarme en M por i-1 transiciones}) \cdot P(M.M-1)\\
P(\text{Pasar por el estado M-1}) &= \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{M(i-1)} \cdot M \cdot p \cdot (1-p)^{M-1}\\
P(\text{Pasar por el estado M-1}) &= \frac{M(1-p)^{M-1}p}{1-(1-p)^M}
\end{aligned}$$

Por otro lado, la probabilidad de instalar los equipos algún día es equivalente a la probabilidad de llegar alguna vez al estado 0. Sin embargo dado que esta es una cadena ergódica, se que en el largo plazo con seguridad estaré en la clase recurrente. Como en este caso la clase recurrente está compuesta por el estado 0, se puede decir con seguridad (Probabilidad =1) que en el largo plazo el sistema llegará al estado 0 y por lo tanto se podrán instalar los equipos.

*c)* En este caso se tiene un número $C$ de camas disponibles y existe la posibilidad que llegue gente al centro asistencial. La cadena asociada se muestra en la figura 8.

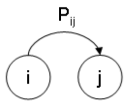


Figura 8: Cadena problema 7-2

- El estado $i$ será la situación en que quedan $i$ pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \ldots, M\}$.
- Para calcular la probabilidad de transición entre dos estados cualesquiera condicionaremos sobre el número de personas que se recuperan.
  Entonces, para $j \neq C$:

$$P(i,j) = \sum_{k=0}^{i} P(i,j|\text{Se mejoran k personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

- Sin embargo:

  P( $i, j$ |Se mejoran $k$ personas) =P(lleguen $j - i + k$ personas)

  siempre y cuando $j - i + k \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
P(i,j) &= \sum_{k=\max(i-j,0)}^{i} P(\text{lleguen } j-i+k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k}\\
P(i,j) &= \sum_{k=\max(i-j,0)}^{i} q_{j-i+k} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k}
\end{aligned}$$

- De la misma forma, si $j = C$, entonces:

$$\begin{aligned}
P(i,j) &= \sum_{k=\max(i-j,0)}^{i} P(\text{lleguen más de } j-i+k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k} \\
P(i,j) &= \sum_{k=\max(i-j,0)}^{i} \Big( \sum_{z=j-i+k}^{\infty} q_z \Big) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k}
\end{aligned}$$

■ **12.** *a)* Tras un minuto de meditación modelamos los estados como el número de bolitas bajo cada vaso. La cadena se muestra en la figura 9.

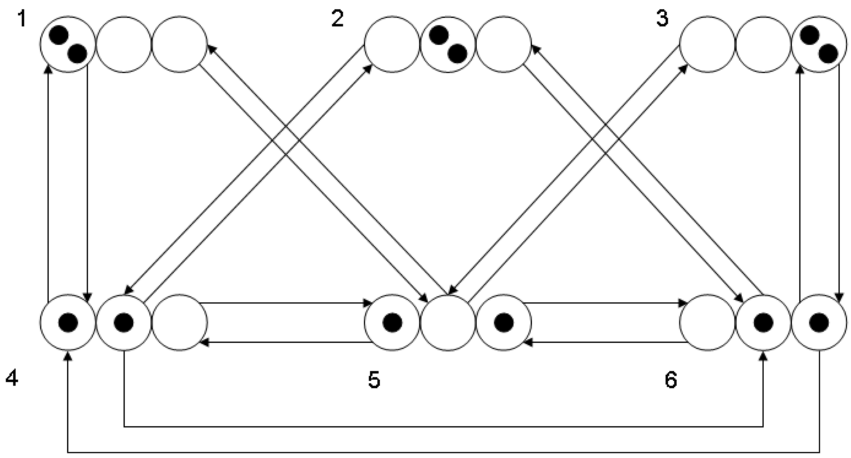


Figura 9: Cadena problema 12

La matriz de transiciones es la siguiente:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0
\end{vmatrix}$$

*b)* De acuerdo a la definición $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ y $r_4 = r_5 = r_6 = 1$ Entonces: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{9}$ y $\pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = \frac{2}{9}$.
Por otro lado para que $\overrightarrow{\pi}$ sea ley estable debe cumplir con:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi} \cdot P \\
&\sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1 \\
&\pi_i \geq 0 \quad \forall i
\end{aligned}$$

Las dos últimas condiciones se cumplen. Sólo basta comprobar que (propuesto)[2] :

$$\left|\begin{array}{c}\frac{1}{9}\\ \frac{1}{9}\\ \frac{1}{9}\\ \frac{2}{9}\\ \frac{2}{9}\\ \frac{2}{9}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccccc}\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right|$$

*c*) La cadena es ergódica (una sola clase recurrente, aperiódica) por lo que posee sólo una ley estable, la cual es la ley de probabilidades estacionarias. Como ya encontramos una ley estable, esta misma es la ley estacionaria. La intuición del resultado va por el lado de la conectividad entre estados (los con bolitas separadas son accesibles desde muchos más estados y a estados del mismo tipo, en cambio para los estados con bolitas juntas no existen transiciones entre el mismo tipo.)

*d*) Para ganar debemos parar el juego en un estado tal que sea factible el ganar, y adicionalmente escoger correctamente el vaso ganador. Entonces la probabilidad de ganar será:

$$P[\text{Ganar}] = P[\text{Parar en estado factible}] \cdot P[\text{Escoger ganador}]$$

$$P[\text{Ganar}] = (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

■ **13.** *a*) Para definir la cadena debemos especificar los estados de la misma y las probabilidades de transición entre cada par de estado (elementos de la matriz de transición). Utilizando la indicación del enunciado la cadena es la que se muestra en la figura 10.

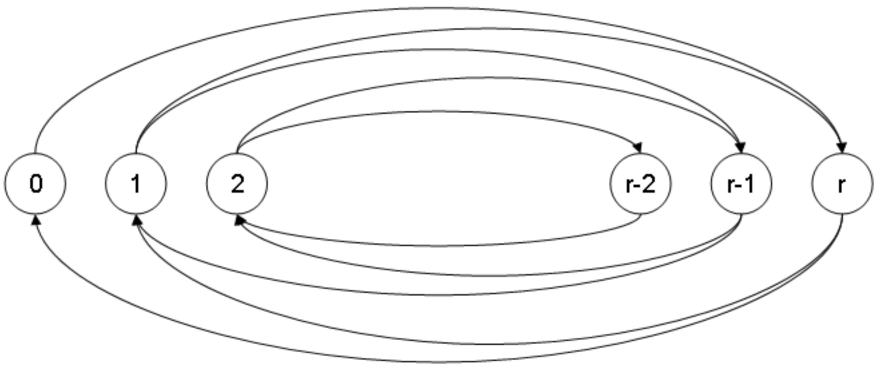


Figura 10: Cadena problema 13

Entonces, del dibujo se ve que:

$$P[\text{i paraguas,j paraguas}] = \begin{cases} p & si \quad j = r - i + 1 \\ 1 - p & si \quad j = r - i \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad \forall i > 0$$

La definición de la matriz de transición se completa con:

$$P[[\text{0 paraguas,j paraguas}] = \begin{cases} 1 & si \quad j = r \\ 0 & \sim \end{cases}$$

[2]Dimensionalmente es incorrecto, pero sólo por que no se como hacer el símbolo de un vector transpuesto

*b*) Las ecuaciones que nos permiten encontrar las probabilidades estacionarias (existirán dado que se trata de una cadena ergódica) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_r \cdot (1-p) \\
\pi_1 &= \pi_r \cdot p + (1-p) \cdot \pi_{r-1} \\
\pi_2 &= \pi_{r-1} \cdot p + (1-p) \cdot \pi_{r-2} \\
\pi_3 &= \pi_{r-2} \cdot p + (1-p) \cdot \pi_{r-3} \\
&\vdots \\
\pi_{r-1} &= \pi_2 \cdot p + (1-p) \cdot \pi_1 \\
\pi_r &= \pi_1 \cdot p + \pi_0 \\
\sum_{i=0}^{r} \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

Utilizando las r primeras ecuaciones descubrimos que:

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 \ldots = \pi_r = \frac{\pi_0}{(1-p)} = \pi$$

Si utilizamos esto en la última ecuación llegamos a que:

$$\begin{aligned}
\pi \cdot (r+1-p) &= 1 \\
\pi &= \frac{1}{r+1-p} \\
\pi_0 &= \frac{1-p}{r+1-p}
\end{aligned}$$

*c*) Se mojará sólo en las ocasiones que esté en un lugar donde no hayan paraguas (fracción $\pi_0$ de los casos) y le toque la mala suerte que llueva (con probabilidad $p$). Entonces el resultado es:

$$\text{fracción que se moja} = \frac{p(1-p)}{r+1-p}$$

■ **14.** *a*) Definiremos los estados como la carga genética de cada individuo de la población: De esta forma la cadena se muestra en la figua 11.

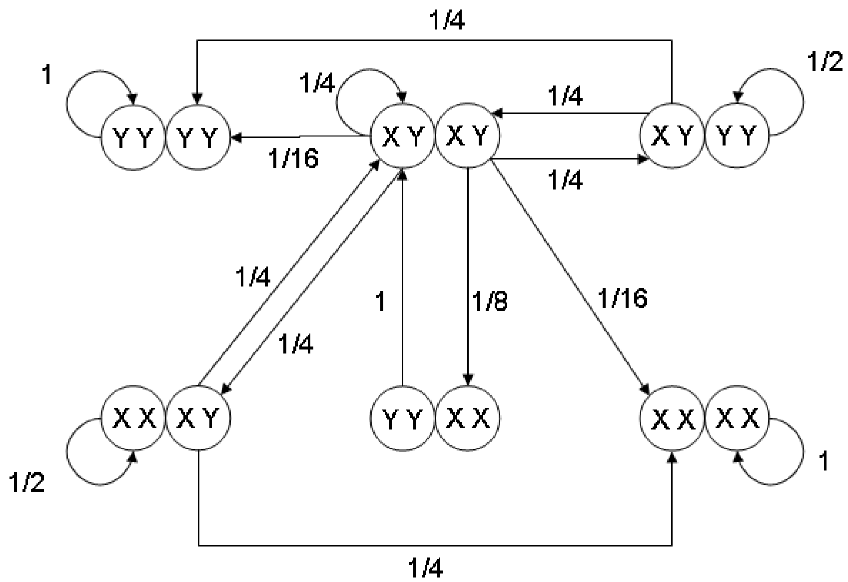


Figura 11: Cadena problema 14

*b*) Claramente existen 3 clases. Dos recurrentes (aperiódicas): la asociada al estado xx-xx y la asociada al estado yy-yy. Por otro lado existe una clase de estados transientes, compuesta por todos los otros estados.

*c*) Por simetría la probabilidad es $\frac{1}{2}$. Un desarrollo más riguroso puede ser logrado mediante un análisis de primer paso (es decir condicionar sobre el resultado de la primera transición y aplicando condiciones de borde, como por ejemplo que la probabilidad dado que estoy en el estado de sólo genes recesivos es 1 y si estoy en el estado de genes no recesivos es 0, dado que ambos son recurrentes de clases distintas). Propuesto.

■ **15.** *a*) Lo único importante es distinguir $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$.
Si las parejas se forman al azar tengo $N-1$ individuos candidatos a emparejarse con alguien en particular (casos totales), de los cuales hay $i$ infecciosos. Si me emparejo con un infeccioso la probabilidad de contagio es $p$ y por lo tanto: $q_i = \frac{i}{N-1} \cdot p$

*b*) No, con sólo tener el número de infecciosos no es posible determinar, en probabilidad, la evolución del sistema (condición de Markov). Por ejemplo, si $X_t = 10$, pero tenemos a todo el resto infectado $X_{t+1} = 0$ con seguridad, sin embargo si hay alguien sano la probabilidad que $X_{t+1} = 0$ es estrictamente menor que 1.

*c*) Para simplificar el dibujo del grafo consideraremos las posibles transiciones desde un nodo (i, j) donde i= $X_t$ y j= $Y_t$.
Caso 1

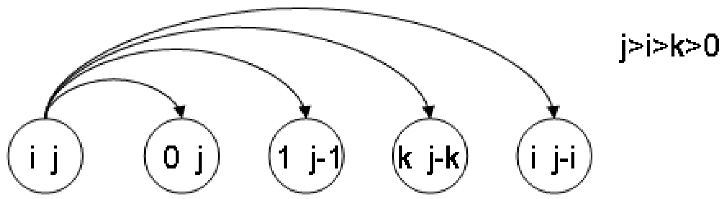


Figura 12: Caso 1

En este caso la probabilidad de transición entre el estado (i, j) y uno (k, j-k), con 0 < i ≤ j, implica que k personas de las que inicialmente estaban sanas se contagian, pasando a estar infectadas al inicio del período siguiente. Ocupando $q_i$ tenemos que:

$$P[(\text{i, j}), (\text{k, j-k})] = \binom{j}{k} \cdot {q_i}^k \cdot (1 - q_i)^{j-k} \quad \forall k,\, 0 \leq k \leq i$$

Caso 2

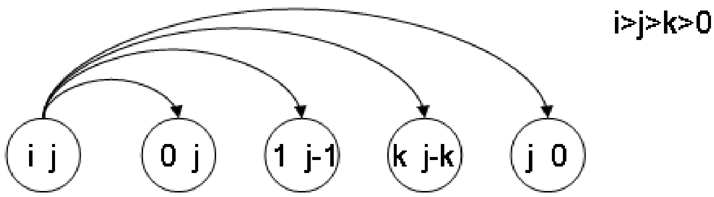


Figura 13: caso 2

Esta situación es análoga al caso anterior, pero el número máximo de personas infectadas al inicio del período siguiente ahora es j. Así, la probabilidad de transición en una etapa que empezamos en el estado (i, j), con i ≥ j > 0 será:

$$P[(\text{i, j}), (\text{k, j-k})] = \binom{j}{k} \cdot {q_i}^k \cdot (1 - q_i)^{j-k} \quad \forall k,\, 0 \leq k \leq j$$

Caso 3

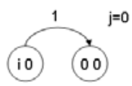


Figura 14: caso 3

En estos casos los individuos infecciosos ya no tienen a quien contagiar, por lo que con probabilidad 1 estarán en el estado (0, 0) en el período siguiente.

Caso 4

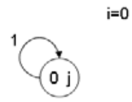


Figura 15: caso 4

En esta situación ya no quedan individuos que puedan contagiar, por lo que no se modificará el número de individuos sanos ni nadie se enfermará.

Clasisficación de estados y caracterización de clases:

En este problema no hay ningún par de nodos que esté comunicado, por lo que c/u es su propia clase de equivalencia y tendremos $(N+1)^2$ clases distintas. Las clases de los casos 1, 2 y 3 son transcientes, mientras que las clases del caso 4 son todas recurrentes y aperiódicas.

*d*) Dado que hay múltiples clases recurrentes NO es posible tener una ley de probabilidades estacionarias en el problema original, lo que significa que la evolución del sistema en el largo plazo no será independiente de las condiciones iniciales. Por ejemplo si empezamos de cualquier estado $(0, Y_0)$ nunca lo abandonaremos porque no se puede enfermar ni mejorar nadie.

Si permitimos que la gente con alguna probabilidad se mejore, se logran comunicar muchos estados que pertenecían a clases distintas, creándose una clase transiente formada por los estados $(0, X)$, con $0 \leq X < N$ la que confluye a la clase recurrente formada por el estado $(0, N)$, es decir toda la población sana. En el caso de empezar con $i$ individuos infectados estaremos en una clase transiente, y necesariamente luego de algún número finito de días estaremos en un estado de la clase $(0, X)$ (porque no existen transiciones a estados tipo $(j, X)$ con $j > i$). Como en el largo plazo la probabilidad de encontrarnos en un estado transiente es 0, con probabilidad 1 estaremos en la única clase recurrente de esta cadena. Por esto, si permitimos que la gente eventualmente mejore en el largo plazo esta enfermedad se habrá erradicado completamente, y existirá una ley de probabilidades estacionarias.

■ **19.** *a*) Es posible dado que el número de autos disponibles al comienzo de un día cualquiera sólo depende de la cantidad de autos disponibles al comienzo del día anterior y esto es suficiente para determinar la evolución del sistema (en probabilidades).

*b*) La cadena toma se muestra en la figura 16.

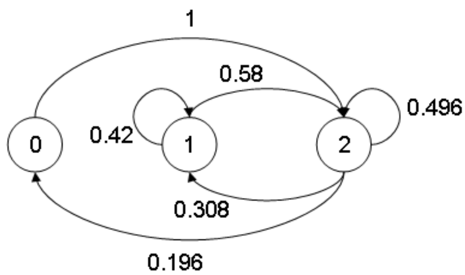


Figura 16: Cadena problema 19

Cálculo de las probabilidades de transición:

$$
\begin{aligned}
P_{0,2} &= 1 \quad \text{(Si no tengo taxis disponibles con seguridad ambos estarán disponibles mañana).}\\
P_{1,2} &= [P(D=1)+P(D\geq 2)]\cdot P[\text{No falle}] + P(D=0) = 0{,}58\\
P_{1,0} &= 0 \quad \text{(Por lo menos tengo bueno, la mañana siguiente, el auto en reparación)}\\
P_{1,1} &= 1-0{,}58 = 0{,}42\\
P_{2,0} &= P(D\geq 2)\cdot P[\text{Ambos autos fallen}] = 0{,}196\\
P_{2,1} &= P(D=1)\cdot P[\text{Auto falle}] + 2\cdot P(D\geq 2)\cdot P[\text{Uno falla y el otro no}] = 0{,}308\\
P_{2,2} &= P(D=0)+P(D=1)\cdot P[\text{Auto no falle}] + P[D\geq 2]\cdot P[\text{No falle ninguno}]
\end{aligned}
$$

Entonces la matriz de transición es la siguiente:

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 1\\
0 & 0{,}42 & 0{,}58\\
0{,}196 & 0{,}308 & 0{,}496
\end{vmatrix}
$$

Existe sólo una clase recurrente aperiódica compuesta por todos los estados de la cadena.

*c*) Dado que la cadena es ergódica existirá una ley de probabilidades estacionarias.
Esta ley debe cumplir con los siguientes requisitos:

$$
\begin{vmatrix}\pi_0\\ \pi_1\\ \pi_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
0 & 0 & 1\\
0 & 0{,}42 & 0{,}58\\
0{,}196 & 0{,}308 & 0{,}496
\end{vmatrix}
$$

$$\pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1$$

$$\pi_i \geq 0 \qquad \forall i$$

Resolviendo se obtiene que $\pi_0 = 0{,}11$, $\pi_1 = 0{,}31$ y $\pi_2 = 0{,}58$.

*d*) 1)

$$
\begin{aligned}
E[\text{Número de arriendos}] &= 1\cdot\pi_1(P(D=1)+P(D\geq 2))\\
&\quad +2\cdot\pi_2(P(D\geq 2))\\
&\quad +1\cdot\pi_2\cdot P(D=1)\\
&= 0{,}766
\end{aligned}
$$

2)

$$E[\text{Costo}] = [2\cdot\pi_0 + 1\cdot\pi_1]\cdot 10000 = 5300$$

3) El precio mínimo satisface la siguiente relación:

$$P^* \cdot E[\text{Número de arriendos}] = E[\text{Costo}] \Rightarrow P^* = 6919$$

■ **20.** *a*) Definitivamente es posible modelar el número de maquinas buenas al comienzo de un da. Esto dado que el estado posee información que resume todo lo que necesitamos saber: Si existen $i$ máquinas buenas al comienzo del día, entonces (dado que las maquinas solo pueden estar buenas o malas) obligatoriamente tengo $T-i$ maquinas malas las cuales estarán disponibles al comienzo del proximo día, si no fuese así no estarían malas (dado que solo pueden fallar durante el transcurso de un día).
Por otro lado tenemos que:

$$S(i,j) = \begin{cases} \binom{j}{i} q^i (1-q)^{j-i} & i \leq j \\ 0 & \sim \end{cases}$$

*b*) Claramente tendremos $T+1$ estados (desde el 0 al $T$), sin embargo dibujar las transiciones y un esquema de la cadena general es muy complicado (debido al elevado número de transiciones). Entonces la mejor forma de determinar la cadena es especificar cada transición entre estados con la probabilidad de transición asociada. Entonces la cadena queda como se muestra en la figura a continuación.

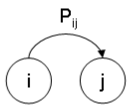


Figura 17: Cadena problema 20-1

Para determinar $P_{ij}$ debemos notar el hecho que si T-i maquinas estarán con seguridad buenas en el siguiente etapa, entonces sólo tiene sentido que $j \geq T-i$. Por otro lado, para los $j$ que cumplen la condición tenemos que la transición implica que solo una cantidad $j-T+i$ de las $i$ maquinas buenas sobrevive (o que $T-j$ no lo hacen). De esta forma, en términos de $S(i,j)$, tendremos que:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & j < T-i \\ S(T-j,i) & \sim \end{cases}$$

Finalmente es bastante claro que (dado que todos los estados están comunicados entre si, la cadena es finita y hay estados aperíodicos) la cadena es ergódica, por lo si existirán probabilidades estacionarias. Todos los estados forman una única clase recurrente.

*c*) Aquí tenemos que tener cuidado puesto que las revisiones se realizan al final del día. Entonces el beneficio lo obtengo cuando estoy en el estado $T$ y no se hecha a perder ninguna máquina (y si revisan ese día). La multa la obtengo seguro si empiezo con menos de L máquinas, pero si tengo más, esto depende de si se hechan a perder las suficientes como para llegar al final con menos de L máquinas. Esto que así:

$$E(\text{Beneficios}) = r \cdot [-(C \cdot \sum_{k=0}^{L-1} \pi_k) - C \cdot \sum_{k=L}^{T} \pi_k \cdot \sum_{j=k-L+1}^{k} \binom{k}{j} (1-q)^{k-j} \cdot q^j + \pi_T \cdot (1-q)^T \cdot F]$$

*d*) La cadena sigue siendo la misma, solo cambiarán las probabilidades de transición. Ahora debemos considerar que al próximo día no contaremos con $T-i$ máquinas buenas con seguridad si no con una cantidad menor o igual. ¿Cuantas?: Si tengo $T-i$ máquinas con desperfectos puedo formar $\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor$ lotes de $J$, por lo tanto tendré $\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J$ máquinas buenas con seguridad. Tomando esto en cuenta tendremos que:
Donde:

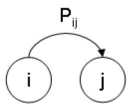


Figura 18: Cadena problema 20-2

$$P_{ik} = \begin{cases} 0 & k < \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J \\ \binom{i}{i+\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J - k} q^{i+\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J - k} \cdot (1-q)^{k - \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J} & k \geq \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J \end{cases}$$

En función de $S(i,j))$ queda de la siguiente forma ($n = \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor$):

$$P_{ik} = \begin{cases} 0 & k < n \cdot J \\ S(i + n \cdot J - k, i) & k \geq n \cdot J \end{cases}$$

*e*) Utilizando el mismo razonamiento de la parte c) tendremos que::

$$\begin{aligned} E(\text{Beneficios}) &= r \cdot \Big[ (-C \cdot \sum_{k=0}^{L-1} \pi_k) - C \cdot \sum_{k=L}^{T} \pi_k \cdot \sum_{j=k-L+1}^{k} \binom{k}{j} (1-q)^{k-j} \cdot q^j \\ &\quad + \pi_T \cdot (1-q)^T \cdot F + \sum_{i=0}^{T} \pi_i \cdot n \cdot K \Big] \end{aligned}$$

Noten que el termino extra (respecto a la parte c)) se refiere al costo fijo, el cual depende del estado en el que nos encontramos, específicamente al valor de i respecto a valor de T (para ver cuantos lotes se mandan a reparar).