

## Auxiliar 8: Cadenas de Markov Discretas

Martes 1 de Junio de 2010

### Problema 1

Armijo, el colectivero de su barrio, le pide que lo asesore en el desarrollo de un nuevo proyecto de su microempresa de transporte de pasajeros, con el fin de definir la tarifa a cobrar.

Nuestro amigo cuenta con 2 vehículos con los que pretende implementar un servicio de arriendo de autos.

A las 8 de la mañana de cada día él conocerá la demanda por arriendos, la cual sigue la siguiente ley de probabilidades.

$$Pr[D = 0] = 0.4, Pr[D = 1] = 0.2 \text{ y } Pr[D \geq 2] = 0.4.$$

Un auto es arrendado por todo el día, es decir, con cada vehículo se puede atender a lo más un cliente diario.

Dada la apariencia apacible de Armijo, los clientes abusan de su buena voluntad, por lo que se estima que con probabilidad  $p = 0.7$  maltratarán el automóvil durante su uso, por lo que nuestro atribulado colectivero deberá llevarlo a mantención el día siguiente, y no podrá arrendarlo. La mantención demora exactamente un día, independiente del número de autos a reparar y tiene un costo de \$10.000 por vehículo.

Con el fin de ayudar a nuestro querido Armijo se pide que responda:

1. Jutifique por qué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el número de vehículos disponibles al comienzo de un día cualquiera
2. Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Dibújela con los respectivos estados, encuentre la matriz de transición y clasifique los estados en clases.

### Problema 2

En un pequeño centro hospitalario se tiene la urgencia de instalar equipos nuevos. Estos equipos son muy costosos y se deben manejar con mucho cuidado por lo que se necesita que el establecimiento esté vacío al momento de la instalación. Actualmente hay  $M$  pacientes en el centro, y con el fin de poder proceder a la instalación no se recibirán más pacientes hasta que ésta se realice.

Cada mañana un doctor evalúa la condición de los pacientes para ver si son dados de alta. Se ha determinado que cada paciente tiene una probabilidad  $p$  de estar rehabilitado y salir del centro y una probabilidad  $(1 - p)$  de seguir internado, independiente de lo que ocurra con los demás pacientes. Nadie puede ingresar al centro hasta después de instalados los equipos.

1. Muestre que el sistema descrito puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo discreto, dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.  
Hint: Calcule la probabilidad  $Pr[X(n) = r | X(n-1) = k]$ , con  $X(n)$  representando a la cantidad de personas en el centro en la semana  $n$ .
2. Si el sistema tiene inicialmente  $M$  pacientes, Cuál es la probabilidad que algún día tenga  $M-1$ ? ¿Cuál es la probabilidad que algún día se puedan instalar los equipos?. Encuentre estas probabilidades y fundamente adecuadamente sus respuestas.

Ahora suponga que la instalación de los equipos ya se realizó, por lo que pueden llegar pacientes al centro hospitalario. Cada cliente, al llegar, paga un monto  $C[\$]$  que cubre su atención médica durante todos los periodos que estará en el centro. Se sabe que la probabilidad que lleguen  $k$  pacientes en un día es  $q_k$ , con  $k = 0, \dots, 3$ .

Además el centro sólo cuenta con tres camas por lo que si llega una persona y no hay cama disponible, ésta es derivada a otro centro médico. Considere que una persona que ingresa al centro es internada al menos por una noche (no puede tener el alta sin una evaluación positiva del doctor que pasa revisión en la mañana).

3. Modifique su modelo para esta nueva situación y dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique los estados.

### Problema 3

Considere un jugador que apuesta sucesivas veces en el mismo juego. En cada jugada existe una probabilidad  $p$  de ganar una unidad y una probabilidad  $1 - p$  de perder una unidad. Se asume que las jugadas sucesivas son independientes. El jugador comienza con una cantidad de  $i$ ,  $1 < i < N$  y juega hasta que pierde todo o llega a  $N$ .

1. Construya una cadena de Markov que describa la fortuna del jugador en cada instante. Incluya las probabilidades de transición.
2. El jugador al llegar a  $N$  cambia su estrategia y decide apostar doble o nada, de manera que con probabilidad  $p$  su riqueza es  $2N$  (y se retira), mientras con probabilidad  $1 - p$  pierde todo (y su riqueza se reduce a cero). Modele esta nueva situación.
3. Si en la situación de la parte (a), la probabilidad de ganar es  $p = 1/2$ , ¿De qué depende que nuestro jugador finalmente gane o pierda?. Sin hacer cálculos entregue valores específicos cuando se pueda e interprete sus resultados.
4. Resuelva el problema para el caso general, es decir, encuentre las probabilidades de terminar ganando o perdiendo el juego si se empieza con una cantidad de  $i$ ,  $1 < i < N$ . Se juega hasta que pierde todo o llega a  $N$ , con  $p \neq (1 - p)$ .
5. Suponga que usted ha sido contratado como el nuevo Ayudante de Investigación Operativa y le toca corregir la P2 del control 2. Su estilo de corregir las pruebas de sus  $M$  alumnos es muy particular. Comienza tomando la prueba del alumno 1. Se sabe que cada vez que toma la prueba del alumno  $i$ , con  $1 \leq i \leq M - 1$ , existe una probabilidad  $p \in [0, 1]$  de avanzar a la prueba del alumno  $i + 1$  y una probabilidad  $(1 - p)$  de devolverse a la prueba del alumno  $i - 1$ . La primera vez que toma la prueba de un alumno usted le asigna, independiente de todo lo demás, y con probabilidad  $q_j$ , una nota  $j \in \{2.0, 3.0, \dots, 7.0\}$ . Cada vez que vuelve a pasar por la prueba de un alumno le baja una décima (la nota *puede ser negativa*). Si llega a la prueba del alumno  $M$ , le pone la nota correspondiente y el proceso de corrección termina. Por otro lado, si está en la prueba del alumno 1 y “se devuelve” entonces a todos los alumnos que no les ha puesto nota todavía les pone un 1.0 y finaliza la corrección.
  - a) (1.0 pto) Modele el *paso de una prueba a otra* como una Cadena de Markov <sup>1</sup>. Dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.
  - b) (0.5 pts) Calcule la probabilidad de que el alumno  $M$  obtenga una nota estrictamente superior a 1.0 en la P2 del Control 2.
  - c) (1.0 pto) Calcule la nota esperada del alumno  $M$  en la P2 del Control 2.

### Problema 4

En un famoso casino, existe un traga monedas con sólo dos ventanas, en cada una de las cuáles puede aparecer una piña o un guinda. Dado los años de uso es sabido que la máquina está descalibrada y opera de la siguiente manera: cada vez que un jugador inserta una ficha y tira de la palanca, las dos ventanas funcionan en forma independiente. La probabilidad que en la segunda ventana a aparezca una guinda es siempre  $r$ , en cambio en la primera ventana la probabilidad que aparezca una guinda es  $q$ , si antes había aparecido una guinda, y  $p$  si antes había aparecido una piña.

---

<sup>1</sup>Para esta modelación no debe considerar las probabilidades  $q_j$ .

El sistema de apuesta es el siguiente: Antes de ingresar la moneda de  $C$  [u.m.] usted debe predecir el resultado **exacto**<sup>2</sup> de la jugada. Si acierta recupera la inversión y gana  $G$  [u.m.] adicionales. De lo contrario pierde la inversión y debe pagar  $T$  [u.m.] adicionales.

1. (2,5 pts) Modele los resultados de la máquina traga monedas como una cadena de Markov en tiempo discreto. Indique claramente los estados, clases y probabilidades de transición, justificando cada una de ellas.
2. (1,5 pts) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que le permitiría encontrarlas (no es necesario calcularlas).
3. (1,0 pts) Suponga que usted llega al casino y encuentra el traga monedas desocupado (luego de haber sido utilizado durante “mucho” tiempo). Sin ver el estado actual de la maquina, usted escoge equiprobablemente cualquiera de los posibles resultados en que las 2 ventanas son iguales y tira de la palanca. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta jugada?. (Suponga conocidas las probabilidades estacionarias).
4. (1,0 pts) Ahora suponga que pagando  $W$  [u.m.] adicionales (inversión que no se recupera) usted puede retrasar su apuesta hasta una vez conocido el resultado de la primera ventana. Así, su decisión consiste en predecir si el resultado de la segunda ventana es igual o diferente al de la primera. Considere que su estrategia es decir siempre la figura contraria a la de la primera ventanilla y el traga monedas lleva funcionando “mucho” tiempo. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta nueva estrategia de juego bajo este nuevo sistema?.

---

<sup>2</sup>Esto es predecir correctamente la figura de la primera ventana y la figura de la segunda ventana