

## Auxiliar 9: Markov con Beneficios

Martes 15 de Junio de 2010

### Problema 1

Giusseppe Mandinga, un dedicado estudiante de nuestra escuela, está preocupado con el estrés que le está produciendo tanto estudio este semestre. Para mantener su salud, ha decidido dedicar las noches de los viernes para salir y “ventilar la mente”. Para ello ha elegido cuatro locales de entretención nocturna de una conocida zona de Santiago. Los locales que ha elegido son “L1”, “L2”, “L3” y “L4”.

Según información que nos proporcionó un amigo cercano, Giusseppe decide a qué local dirigirse cada fin de semana de acuerdo a los siguientes criterios:

- Si el show de la semana anterior le gustó, este viernes se dirige al mismo local.
- Si el espectáculo al que acudió la semana anterior no le gustó, este semana concurrirá a otro local. En este caso el próximo local a visitar (de los tres posibles) es escogido equiprobablemente.

Además, nuestro informante nos comentó, a partir de su experiencia como compañero de salidas de Mandinga, que él sale satisfecho del local “L $i$ ” con una probabilidad  $p_i$ , que es igual todas las semanas e independiente de todas las salidas anteriores. En particular, nos garantiza con certeza absoluta que el espectáculo de “L4” le gustará a Giusseppe siempre (es decir  $p_4 = 1$ ).

1. (2,0 ptos.) Construya una cadena de Markov que represente las salidas de los viernes de Giusseppe Mandinga. Construya un grafo que la represente. Identifique las clases de estados de esta cadena y clasifíquelas en transientes y recurrentes. Para las clases recurrentes determine el período de cada una. Identifique las probabilidades de transición entre estados.
2. (1,0 ptos.) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas. ¿Podemos afirmar, que a partir de algún momento, Mandinga concurrirá todas las semanas a mismo local? En caso afirmativo, ¿a cuál de ellos lo hará? Justifique.

Considere ahora que las entradas en cualquiera de los cuatro locales mencionados tienen un valor  $\$E$  y que todos los locales tienen la política de realizar un descuento de valor  $\$F$  si es presentada una entrada de la semana anterior (i.e. Giusseppe se gana un descuento si concurre dos semanas seguidas al mismo local).

3. (0,5 ptos.) Determine el costo asociado a una transición en el estado estacionario. ¿Qué interpretación tiene este valor en nuestro caso?
4. (2,5 ptos.) Suponiendo que las probabilidades de que un espectáculo le guste a Giusseppe en los locales “L1”, “L2” y “L3” son  $p_1 = p_2 = 0,4$ ,  $p_3 = 0,7$ , respectivamente, determine un vector asintótico de beneficios relativos ( $W$ ). Interprete el resultado obtenido.  
A partir de estos valores, y sin cálculos adicionales, ¿es posible determinar cuántas semanas, en promedio, Mandinga deberá esperar para descubrir el local en el que siempre le gustará el espectáculo?
5. (Bonus, 1,0 pto.) Demuestre que el vector asintótico de beneficios relativos obtenido en el punto anterior no depende de las probabilidades  $p_1, p_2, p_3$  cuando se fija  $W_4$  en 0. O sea, el vector obtenido es el mismo para  $p_1, p_2$  y  $p_3$  elegidos arbitrariamente entre 0 y 1.

## Problema 2

Un prestigioso técnico nacional, más conocido como *El Ingeniero*, le ha pedido su asesoría para estimar cuántos puntos obtendrá en el presente Torneo de Apertura del Fútbol argentino.

Supondremos que los resultados de cada partido que juega su equipo se pueden modelar como una cadena de Markov, es decir, el resultado del próximo partido depende del último resultado obtenido. A partir de datos históricos se ha estimado la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & g & e & p \\ \hline g & 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ e & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ p & 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{array}$$

Se sabe que por cada partido ganado se obtienen tres puntos, si se empata obtiene un punto y si pierde no obtiene puntos. Se han jugado 2 partidos hasta ahora y lleva sólo un punto. Además el último resultado obtenido fue un empate y según el técnico estos resultados no afectarán el rendimiento futuro de sus dirigidos.

1. Construya un modelo de Markov con Beneficios que le permita estimar el valor esperado de los puntos que obtendrá el equipo del *Ingeniero* en el campeonato de Apertura, si el primer partido de los que le resta por jugar se gana. Suponga que restan 16 partidos y recuerde que ya tiene un punto.

$$P^{16} = \begin{array}{c|ccc} & 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ \hline & 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ & 0,42 & 0,36 & 0,22 \end{array}$$

2. Suponiendo que el último partido jugado (el cual fue empatado) si afectará el rendimiento futuro del equipo, de la manera descrita por matriz  $P$ , ¿cuál es el valor esperado de los puntos que obtendrá en el Torneo?.

Independiente de las partes anteriores, suponga ahora que la carrera del técnico chileno también puede ser modelada como una Cadena de Markov. Actualmente *El Ingeniero* es conocido sólo a nivel Latinoamericano, sin embargo cada temporada existe una probabilidad  $q=0.2$ , de que sea tentado por un equipo de la Liga Italiana, con lo que pasaría a ser conocido a nivel Europeo. Una vez en la Liga Italiana con probabilidad  $r=0.3$  el D.T no saldrá campeón con su equipo por lo que seguirá siendo conocido sólo a Nivel Europeo, pero con probabilidad  $1 - r$  será Campeón de Liga pasando a formar parte de la elite de técnicos famosos mundialmente, nivel del que nunca dejará de pertenecer.

1. Calcule el número esperado de temporadas que tardará el entrenador chileno en alcanzar la fama a nivel Mundial.

## Problema 3

En un laboratorio existe un sofisticado equipo electrónico con 2 componentes, las que llamaremos  $A$  y  $B$ , las que pueden estar *encendidas* (ON) o *apagadas* (OFF). Para que este equipo funcione correctamente es necesario que una y sólo una de las componentes se encuentre encendida (si se encienden ambas se produce un alza de voltaje que destruye el equipo, mientras que si ambas están apagadas el sistema suspende sus actividades definitivamente).

El comportamiento de *encendido* y *apagado* es aleatorio e independiente para ambas componentes, pudiendo cambiar al comienzo de cada día. Estos, sólo han podido determinar las probabilidades de transición entre estos estados para ambas componentes, los que se muestran a continuación:

Componente $A$		
	ON	OFF
ON	0.4	0.6
OFF	0.6	0.4

Componente $B$		
	ON	OFF
ON	0.3	0.7
OFF	0.7	0.3

1. Modele el estado del equipo como una Cadena de Markov de tiempo discreto. Determine si existen probabilidades de estado estacionario y escriba la matriz de transición de un período.
2. Si la componente  $A$  está actualmente en ON y la componente  $B$  en OFF, ¿Cuál será la duración esperada del equipo antes de fallar?.

Suponga ahora que cada vez que el equipo deja de funcionar porque ambas componentes se encuentran encendidas se incurre en un costo de  $C$  [\$] porque hay que realizar reparaciones mayores producto del alza de voltaje. Estas reparaciones demoran exactamente dos días (el día en que falla y uno adicional), luego de los cuales la máquina comenzará a operar con la componente  $A$  en ON y la  $B$  en OFF.

Sin embargo, si el equipo ha dejado de funcionar porque ambas componentes están en OFF el encargado del laboratorio al inicio del día siguiente interviene y pone en ON a la componente  $A$ , incurriendo en un costo  $k$  [\$] con  $k < C$  asociados a no tener el equipo funcionando un día.

En esta situación conteste las siguientes preguntas:

1. Modele la nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Determine las probabilidades de transición de un período.
2. ¿Cuál es la fracción del tiempo en el largo plazo que la máquina no estará operativa?. ¿Cuál es el costo promedio diario en el largo plazo de mantener el equipo operando?.