

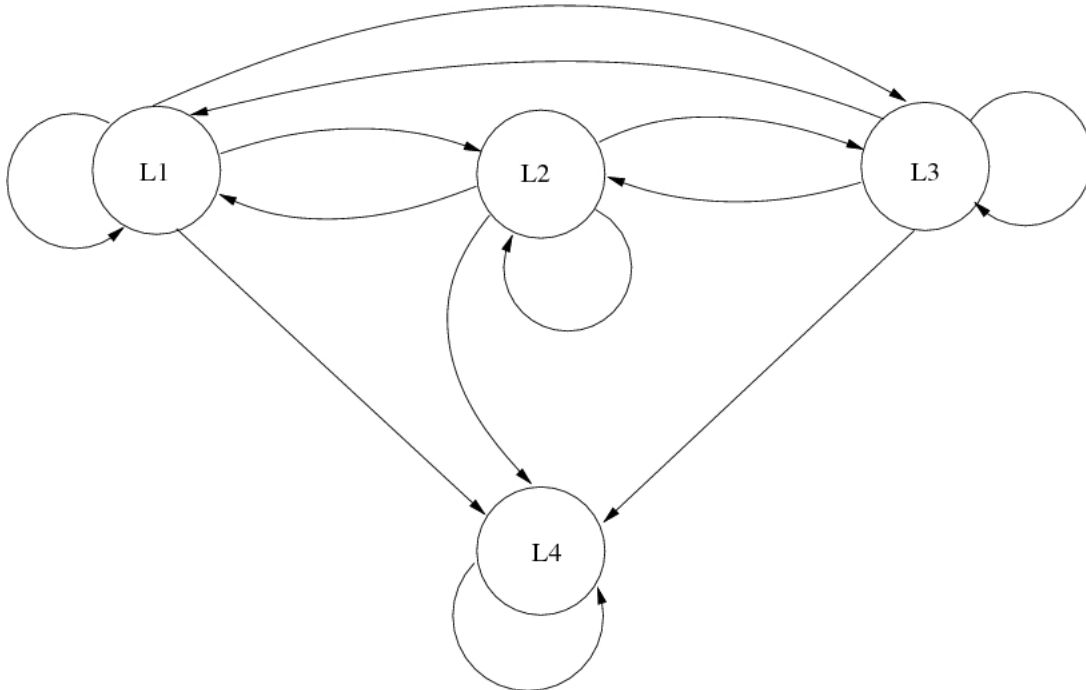


Auxiliar 9: Markov con Beneficios

Martes 15 de Junio de 2010

Problema 1

1. La cadena de Markov tiene cuatro estados, uno asociado a cada local. El grafo que la representa es el siguiente:



Los estados pueden ser separados en las siguientes clases:

- $\{L1, L2, L3\}$: clase transiente.
- $\{L4\}$: clase recurrente aperiódica.

La matriz de probabilidades de transición es (con filas y columnas ordenadas según los estados L1, L2, L3, L4, en este orden, y este orden utilizaremos para todos los vectores y matrices en esta pauta):

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} \\ \frac{1-p_2}{3} & p_2 & \frac{1-p_2}{3} & \frac{1-p_2}{3} \\ \frac{1-p_3}{3} & \frac{1-p_3}{3} & p_3 & \frac{1-p_1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Esta cadena tiene probabilidades estacionarias ya que es una cadena del tipo “ergódica más transiente” (o equivalentemente, porque tiene una sola clase recurrente, la cual es aperiódica).

Como la clase recurrente tiene apenas un estado, las probabilidades estacionarias se determinan sin necesidad de cálculos:

$$\pi = [0, 0, 0, 1].$$

De aquí podemos concluir que, a partir de un cierto momento, Mandinga irá siempre a L4, ya que es el único estado recurrente de la cadena (que es finita).

Para lo que sigue hay, al menos, dos maneras de modelar los costos (y cualquiera de ellas conduce a los mismos resultados).

■ Primera forma:

Asignamos a cada estado el costo de la entrada y a cada transición del tipo “quedarse en el mismo estado” el valor del descuento. Es decir, $r_i := E$ y $r_{ii} := -F$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$; $r_{ij} := 0$ para i distinto de j .

■ Segunda forma:

Asignamos costos nulos a cada estado y manejamos los costos de las entradas vía las transiciones. Es decir, $r_i := 0$ y $r_{ii} := E - F$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$; $r_{ij} := E$ para i distinto de j .

En ambos casos se obtiene que:

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} E - p_1 F \\ E - p_2 F \\ E - p_3 F \\ E - F \end{bmatrix}.$$

3. $g = \pi \hat{r} = E - F$. En nuestro caso, esto nos dice que, en el estado estacionario, Mandinga pagará la entrada con descuento (esto lo podemos concluir también del hecho que sabemos que en el estado estacionario siempre irá al mismo local).
4. Para obtener W , fijamos $W_4 = 0$ (estamos basándonos en el estado recurrente) y resolvemos el sistema:

$$W + ge = \hat{r} + PW.$$

Con los datos que tenemos, esto se reduce a determinar $W_T = [W_1, W_2, W_3]^\top$, resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 & -0,2 \\ -0,1 & -0,1 & 0,3 \end{bmatrix} W_T = \begin{bmatrix} 0,6D \\ 0,6D \\ 0,3D \end{bmatrix},$$

cuya solución es $W_T = [3D, 3D, 3D]^\top$.

Esto puede interpretarse como que Giuseppe irá, en media, a tres espectáculos que no le gusten (cambios de local entre una semana y la siguiente, por los cuales pierde los descuentos) antes de ir al local “L4”.

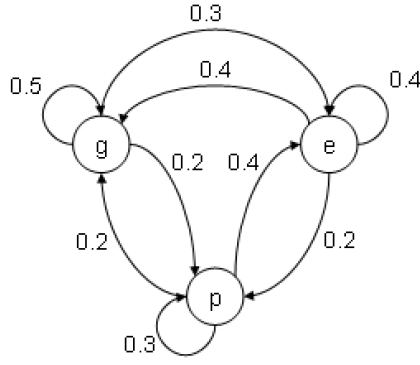
A partir de esto, y sin cálculos adicionales, no podemos concluir cuánto tiempo le llevará descubrir este local (no tenemos información de cuántas veces, en media, le gustará el espectáculo de los otros locales).

5. **Bonus.** Basta verificar que el vector $W_T = [3D, 3D, 3D]^\top$, satisface

$$\begin{bmatrix} 1 - p_1 & -\frac{1 - p_1}{3} & -\frac{1 - p_1}{3} \\ -\frac{1 - p_2}{3} & 1 - p_2 & -\frac{1 - p_2}{3} \\ -\frac{1 - p_3}{3} & -\frac{1 - p_3}{3} & 1 - p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3D \\ 3D \\ 3D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - p_1)D \\ (1 - p_2)D \\ (1 - p_3)D \end{bmatrix},$$

lo que es cierto.

También se podría tratar de resolver el sistema correspondiente con la matriz genérica y ver que se obtiene el mismo vector W_T , pero esto es más difícil.



Problema 2

Antes de responder las preguntas debemos determinar la estructura de la cadena. Los estados serán el resultado del partido de la semana. La cadena asociada se muestra en la figura.

1. La pregunta va orientada a definir una estructura de costos y ocupar las formulas de Markov con beneficios. Para esto definimos la siguiente estructura:

$$r_g = 3 \quad r_e = 1 \quad r_p = 0 \quad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Esto implica que:

$$\hat{r}_g = 3 \quad \hat{r}_e = 1 \quad \hat{r}_p = 0$$

Adicionalmente necesitaremos los valores de las probabilidades estacionarias (existirán dado que se trata de una cadena irreducible de una clase recurrente aperiódica). Sin embargo si observamos P^{16} (en el enunciado) vemos que todas las filas son iguales por lo que podemos argumentar que ya convergió a su forma de estado estacionario, por lo que se puede decir que:

$$\pi_g = 0,42 \quad \pi_e = 0,36 \quad \pi_p = 0,22$$

De esta forma tendremos que

$$g = 3 \cdot 0,42 + 1 \cdot 0,36 = 1,62$$

Ahora debemos encontrar el valor de \vec{W} , que satisface:

$$\vec{W} + \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \vec{W}$$

Imponiendo que $W_p = 0$ se tiene que:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces calculamos cuántos puntos se acumularán en 16 partidos (los restantes) si parto en el estado g :

$$\vec{v}(16) = 16 \cdot \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular nos interesa conocer $V_g(16)$. Esto es:

$$V_g(16) = 25,92 + 3,5\bar{6} + 0,42 \cdot 0,5\bar{6} - 0,36 \cdot 0,3\bar{4} \approx 30,1792$$

Entonces, si considero que ya llevaba un punto ganado, entonces espero juntar 31,1792 puntos en lo que queda de campeonato.

2. Ahora me preguntan por los puntos acumulados desde un partido empatado hasta 17 fechas más. Para calcular esto no debo cambiar la estructura de beneficios por lo que el W será el mismo de la parte anterior. También puedo asumir que $P^{16} = P^{17}$. Es por esto que tendremos que:

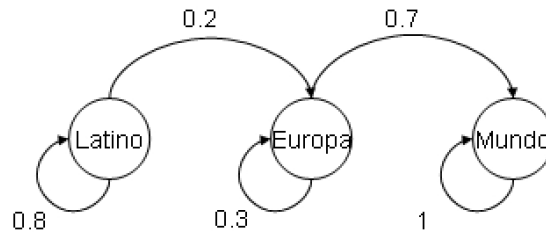
$$\vec{v}(17) = 17 \cdot \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular:

$$V_e(17) = 27,54 + 1,3\bar{4} + 0,42 \cdot 0,5\bar{6} - 0,36 \cdot 0,3\bar{4} \approx 29,572$$

que es lo que nos están pidiendo calcular (en este caso no sumo un punto adicional)

3. Si modelamos el estado de la carrera del técnico tendremos que la cadena asociada es la que se muestra en la figura.



Entonces, sólo debemos calcular w_{latino} utilizando la siguiente estructura de costos:

$$r_{latino} = r_{europa} = 1 \quad r_{mundo} = 0 \quad y \quad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Entonces \vec{W} debe cumplir con:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{W}$$

Si imponemos $W_{mundo} = 0$ tendremos que la segunda ecuación es:

$$W_{europa} = 1 + 0,3 \cdot W_{europa} \Rightarrow W_{europa} = \frac{10}{7}$$

Remplazando en la primera ecuación tendremos que:

$$W_{latino} = 6,42$$

Que es exactamente el número esperado de temporadas que tardará el entrenador chileno en alcanzar la fama a nivel Mundial.

Problema 3

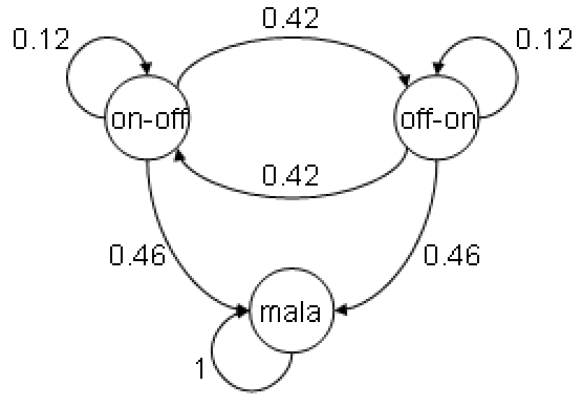
1. Existen dos posibles interpretaciones para el estado de falla del sistema: Cuando éste llegaba a los estados ON-ON ó OFF-OFF, o cuando llegaba al estado ON-ON. Para la primera de las interpretaciones el desarrollo es mucho más fácil, puesto que limitamos el número de estados transcientes, lo que simplifica los cálculos. Los desarrollos en los distintos casos son los siguientes:

- Caso ON-ON ó OFF-OFF \Rightarrow FALLA:

Para calcular las probabilidades de transición es necesario ver qué eventos son los necesarios para tener cada una de las transiciones. Por ejemplo, para pasar del estado ON-OFF al estado OFF-ON es necesario que la componente A se apague y la componente B se encienda, lo que ocurre con una probabilidad $P_{ON-OFF; OFF-ON} = 0,6 \cdot 0,7 = \frac{21}{50}$. La matriz de transición resultante, siguiendo el mismo tipo de razonamiento es:

| | | ON-OFF | OFF-ON | Mala |
|----|--------|-----------------|-----------------|---------------------------------|
| P= | ON-OFF | $0,4 \cdot 0,3$ | $0,6 \cdot 0,7$ | $0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3$ |
| | OFF-ON | $0,6 \cdot 0,7$ | $0,4 \cdot 0,3$ | $0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3$ |
| | Mala | 0 | 0 | 1 |

La cadena resultante es la que se muestra en la figura.



Además, podemos ver claramente que existe una única clase recurrente (la del estado “Mala”), mientras que los otros 2 estados pertenecen a una clase transiente. Así existirá una ley de probabilidades estacionarias que estará dada por: $\Pi = [0 \ 0 \ 1]$.

■ Caso ON-ON \Rightarrow FALLA:

Análogamente al caso anterior la matriz de transiciones será la siguiente:

| | | ON-OFF | OFF-ON | OFF-OFF | Mala |
|----|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| P= | ON-OFF | $0,4 \cdot 0,3$ | $0,6 \cdot 0,7$ | $0,6 \cdot 0,3$ | $0,4 \cdot 0,7$ |
| | OFF-ON | $0,6 \cdot 0,7$ | $0,4 \cdot 0,3$ | $0,4 \cdot 0,7$ | $0,6 \cdot 0,3$ |
| | OFF-OFF | $0,6 \cdot 0,3$ | $0,4 \cdot 0,7$ | $0,4 \cdot 0,3$ | $0,6 \cdot 0,7$ |
| | Mala | 0 | 0 | 0 | 1 |

La cadena resultante es la que se muestra en la figura.

- Utilizaremos las herramientas de Markov con Beneficios para calcular el tiempo esperado en el transiente. De esta manera, calcular el $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n)$ se limita a encontrar el vector de relativos asintótico W y elegir la componente asociada al estado ON-OFF.

■ Caso ON-ON o OFF-OFF \Rightarrow FALLA:

De esta manera tendremos que resolver:

$$W_T = \begin{bmatrix} \frac{44}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{44}{50} \end{bmatrix}^{-1} \cdot e_T$$

Para resolver este sistema NO se necesita invertir la matriz, si nos damos cuenta que comenzar en ON-OFF es equivalente a empezar en OFF-ON porque la situación es simétrica. Si multiplicamos por la matriz P_T debemos calcular:

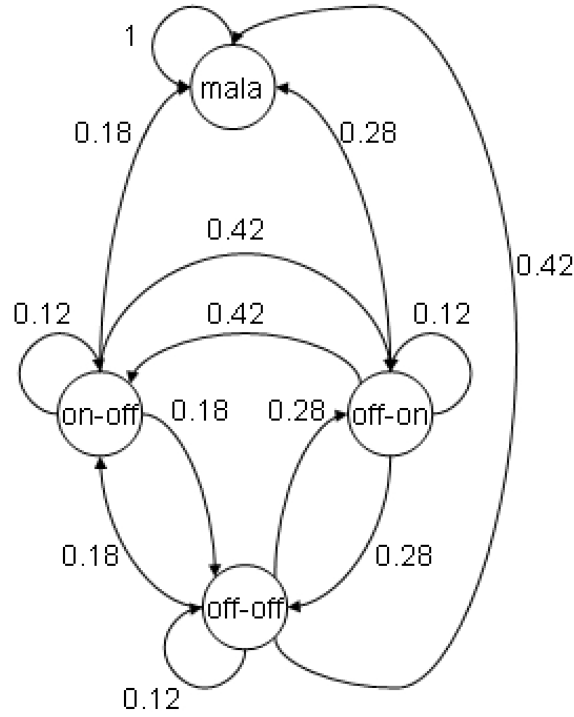
$$\begin{bmatrix} \frac{44}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{44}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Así, } x = \frac{50}{23}$$

Podemos ver que el tiempo esperado antes de que la máquina falle será $\frac{50}{23}$.

■ Caso ON-ON \Rightarrow FALLA:

Nuevamente tendremos que resolver el siguiente sistema:

$$W_T = \left[I - P_{TT} \right]^{-1} \cdot e_T$$



Donde P_{TT} es la submatriz de transición entre estados transientes. En este caso TAMPOCO es necesario invertir la matriz, y sólo es necesario resolver un sistema de 2x2 utilizando el mismo argumento de simetría de la parte anterior. Así:

$$\begin{bmatrix} 1 - 0,12 & -0,42 & -0,18 \\ -0,42 & 1 - 0,12 & -0,28 \\ -0,18 & -0,28 & 1 - 0,12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ocupando la primera y tercera ecuación, se tiene que $y = \frac{10}{7}$ por lo que el tiempo esperado antes de fallar x será igual a

$$x = \frac{1 + 0,18 \cdot \frac{10}{7}}{0,46} = \frac{59}{23}$$

- En esta parte es necesario separar el motivo por el cual falla la máquina, además de introducir un estado que indique que la máquina está siendo reparada. Por esto bajo ambas interpretaciones, los desarrollos son los mismos. La matriz de transiciones en 1 etapa queda bien representada por:

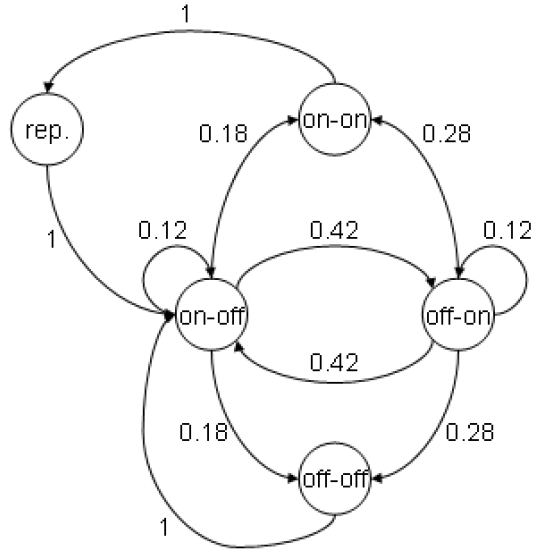
| | ON-OFF | OFF-ON | OFF-OFF | ON-ON | Rep |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----|
| ON-OFF | $0,4 \cdot 0,3$ | $0,6 \cdot 0,7$ | $0,4 \cdot 0,7$ | $0,6 \cdot 0,3$ | 0 |
| OFF-ON | $0,6 \cdot 0,7$ | $0,4 \cdot 0,3$ | $0,6 \cdot 0,3$ | $0,4 \cdot 0,7$ | 0 |
| OFF-OFF | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ON-ON | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Rep | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

La cadena se muestra en la figura.

Podemos ver que existe una única clase recurrente aperiódica (formada por todos los estados), por lo que existirá una ley de probabilidades estacionarias.

- No estará operando una fracción $\pi_{\text{OFF-OFF}} + \pi_{\text{ON-ON}} + \pi_{\text{Rep}}$

Para calcular este valor es necesario resolver el sistema $\Pi = \Pi \cdot P$. Vamos a dejar todo en función de $\pi_{\text{ON-OFF}}$. Se tiene que:



$$\pi_{\text{OFF-ON}} = \frac{23}{50} \cdot \pi_{\text{ON-OFF}}$$

$$\pi_{\text{OFF-OFF}} = \pi_{\text{ON-ON}} = \pi_{\text{Rep}} = \frac{231}{50} \cdot \pi_{\text{ON-OFF}}$$

$\pi_{\text{ON-OFF}}(1 + \frac{23}{50} + 3 \cdot \frac{231}{50}) = 1$ donde se tiene que $\pi_{\text{ON-OFF}} = \frac{50}{766}$.
De esta manera, la fracción del tiempo que no estará operativo será $\frac{693}{766}$.

Para calcular el costo esperado de un período en el largo plazo hay que limitarse a calcular g . Así se tendrá $g = C \cdot \pi_{\text{OFF-OFF}} + k \cdot \pi_{\text{ON-ON}}$