

# Examen - IN41B - Economía II

Profesor: Alexandre Janiak

Auxiliar: Santiago Justel V.

Departamento Ingeniería Civil Industrial

Universidad de Chile

Duración: 2 hora 30 minutos

7 de Julio del 2009

Coloque desde ya su nombre en todas las hojas del control.

## Parte 1 (130 puntos)

Muchas de las preguntas de esta parte se basan en el video que se vio en clase “the crisis of credit” (<http://www.crisisofcredit.com/>) de Jonathan Jarvis.

Consideremos un agente que vive dos períodos y maximiza su utilidad intertemporal:

$$U = u(c_1, m_1) + \beta u(c_2, m_2)$$

donde  $\beta$  es el factor de descuento,  $u(c, m) = c^\alpha m^{1-\alpha}$ ,  $c$  es el consumo,  $m$  es el dinero del agente en términos reales,  $\alpha \in (0, 1)$ . Usaremos la notación  $M_t$  para referirnos al dinero en términos nominales (en el periodo  $t$ ) y  $p_t$  para el nivel de precio del periodo  $t$ .

La cantidad de dinero que tendrá el agente en el período  $t$  se determina ex ante (i.e.  $M_t$  es una variable predeterminada), por lo que suponemos que el agente entra en el periodo 1 con una cantidad de dinero  $M_1$  fija.

En cada período el agente recibe un pago  $y_t$  y puede ahorrar de un período para el otro con una tasa de interés nominal  $i$ ,  $r$  es la tasa de interés real. El Banco Central tiene un manejo perfecto de la tasa de interés nominal. La economía está cerrada, no hay gobierno y no se puede invertir.

1. Recuerde la identidad de Fisher y explíquela. **5 puntos**

2. Justifique el hecho de que el dinero aparezca en la función de utilidad. **5 puntos**

3. Muestre que la restricción intertemporal del agente se puede escribir de la manera siguiente:

$$(1 + i)p_1y_1 + p_2y_2 + M_1 + i(M_1 - M_2) \geq (1 + i)p_1c_1 + p_2c_2$$

Intérprete esta ecuación. **10 puntos**

4. Muestre que las condiciones de primer orden del programa de maximización del agente se pueden reescribir de la manera siguiente:

$$\alpha \left( \frac{m_1}{c_1} \right)^{1-\alpha} = \beta(1+r)\alpha \left( \frac{m_2}{c_2} \right)^{1-\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{m_2}{c_2} = \frac{1}{i}$$

Interprete ambas ecuaciones **10 puntos**

5. Recordando la condición de equilibrio en el mercado de los bienes para ambos períodos, escribe la ecuación que da la tasa de interés real de equilibrio. **5 puntos**

6. Explique porque para un factor de descuento  $\beta$  alto la tasa de interés real es baja. **5 puntos**

7. Explique porque en esta economía una tasa de interés alta implica una inflación alta. **5 puntos**

8. ¿Este modelo de determinación de la inflación es un modelo de corto o de mediano plazo? Para contestar a esta pregunta recuerde el efecto de la política monetaria sobre la inflación y la tasa de interés nominal en el modelo AS-AD tanto en el corto como en el mediano plazo, considerando un incremento permanente no anticipado de la tasa de crecimiento de la masa monetaria. Al explicar lo que está ocurriendo en el modelo, dibuje la evolución de la tasa de interés nominal a través del tiempo. **25 puntos**

9. Nos alejamos ahora un poco del modelo anterior para hablar un poco más de la realidad. Explique porque, en los EEUU en los años 90, al mantener las tasas de interés muy bajas, subieron mucho el precio de las viviendas. Para esta explicación se puede basar en la ecuación de Euler de la pregunta 4. **5 puntos**
10. Al mantener las tasas tan bajas, el crecimiento de la economía se volvió muy fuerte. Basándose en el modelo IS-LM, explique el mecanismo económico detrás de este fenómeno. **5 puntos**
11. Explique por qué las tasas de interés asociadas a hipotecas suelen ser más altas para gente de ingresos bajos. **5 puntos**

12. Explique por qué la subida de los precios de las viviendas incitó a ciertas instituciones financieras a ofrecer hipotecas a gente de riesgo alto. **10 puntos**

13. Sin embargo, explique por qué eso implicó después una subida de la cantidad de morosos, incluso dentro del grupo de gente de riesgo bajo. **10 puntos**

14. Por fin, explique por qué este último fenómeno implicó una recesión. Además, ¿Por qué el estado del mercado del crédito generó persistencia en la recesión? **10 puntos**
15. Los préstamos son para los bancos activos no líquidos. Este hecho implica que los “bank runs” pueden ser muy peligrosos para la actividad económica. Explique lo que se entiende por “bank runs”, así como la afirmación anterior. ¿Por qué este concepto incitó muchos gobiernos a ayudar a ciertos bancos durante la recesión? **15 puntos**



**Parte 2** (75 puntos)

Supongamos una economía modelada por la siguiente función de producción

$$Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$$

$\alpha$  toma valores entre 0 y 1, además esta economía estará cerrada y no hay gobierno. Suponga además que toda la población trabaja, y ésta crece a una tasa igual a  $n$ .

Ahora además supondremos que la productividad del trabajo medida por  $A$  crece a una tasa igual a  $g$ .

1. Muestre que ahorro es igual a inversión en esta economía. **5 puntos**

**Sol:**

Como la economía esta cerrada, y no hay gobierno, esto nos indica que por contabilidad general del PIB, éste se puede escribir:

$$Y = C + I$$

La definición de ahorro, como sabemos es:

$$S = Y - C$$

Igualando estas dos ecuaciones queda  $S = I$  que es lo pedido.

2. Chequee la homogeneidad de la función. ¿De qué grado es? **5 puntos**

**Sol:**

Para ver esto, basta ver:

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^\alpha (A \lambda L)^{1-\alpha} = (\lambda)^\alpha K^\alpha (\lambda)^{1-\alpha} (AL)^{1-\alpha}$$

LLegándose finalmente a:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda K^\alpha (AL)^{1-\alpha} = \lambda F(K, L)$$

Luego la función es homogénea de grado 1.

3. ¿Qué son las condiciones de Inada? ¿Qué implicancias tienen? Muestre si se cumplen o no para esta economía **5 puntos**

**Sol:** Las condiciones de Inada son condiciones que se le imponen a la función de producción para que exista un estado estacionario no trivial en la economía. Es decir se imponen principalmente para:

- Sacarnos el caso en que el estado estacionario son las variables iguales a 0 (este caso es trivial y poco interesante)
- Sacarnos el caso que NO exista estado estacionario, es decir, la economía acumulará (capital o algún otro bien) de manera indefinida, haciendo que la economía crezca indefinidamente y cada vez más

Matemáticamente hablando son:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$$

En este caso, podemos escribir la función de producción en términos de unidades de eficiencia (ver Nota) de la siguiente manera.

$$\frac{Y}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = f(\tilde{k}) = \tilde{k}^\alpha$$

Esto debido a la homogeneidad de la función vista en las partes anteriores, definiendo  $\tilde{k} = \frac{K}{AL}$  Si imponemos esta definición las condiciones de Inada se satisfacen, puesto que

$$f'(\tilde{k}) = \alpha k^{\alpha-1}$$

y como  $\alpha \in (0, 1)$  se satisfacen.

Nota: Ojo que si se define la función de producción en términos per cápita  $Y/L = F(K/L, 1) = f(k) = A^{1-\alpha} k^\alpha$  Esta representación también satisface las condiciones de Inada puesto que la derivada es  $f'(k) = \alpha A^{1-\alpha} k^{\alpha-1}$  El cálculo de los límites es análogo, y se verifican ambas condiciones.

4. Defina el capital y el producto por unidad de eficiencia como  $\frac{Y}{AL}$  y  $\frac{K}{AL}$  (por notación denótelas  $\tilde{y}$  e  $\tilde{k}$ ). ¿Cómo podría interpretar estas definiciones? es decir, ¿a qué nos referimos con “unidades de eficiencia”? ¿Cómo queda la función de producción en términos de  $\tilde{k}$ ? ¿Qué nos señala esta función respecto a su dependencia de  $\tilde{k}$ ? o en otras palabras ¿Qué haría crecer  $\tilde{y}$ ? **5 puntos**

**Sol:**

Definir  $\frac{Y}{AL}$  y  $\frac{K}{AL}$  como  $\tilde{y}$  y  $\tilde{k}$  respectivamente es algo así como definir tanto producción y capital por unidad de trabajo (en este modelo, equivale a definirlo per cápita), pero unidad de trabajo ponderado por su productividad es decir, por unidad de trabajo productivo.

Lllamarlo “por unidad de eficiencia” es la misma aproximación, puesto que estamos definiendo tanto PIB como capital por unidades de trabajo efectivo o eficiente.

El cálculo de  $\tilde{y}$  es como en la parte anterior es, definiendo  $\frac{Y}{AL}$  y  $\frac{K}{AL}$  como  $\tilde{y}$  y  $\tilde{k}$  respectivamente se llega a:

$$\frac{Y}{AL} = \tilde{y} = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = f(\tilde{k}) = \tilde{k}^\alpha$$

Esta forma funcional nos dice que entre más “capital por unidad de eficiencia” se tengá, más rico será el país, luego, la producción en términos de eficiencia crecerá tanto como lo haga el capital eficiente lo haga.

5. Escriba la ecuación dinámica del capital, interprete esta ecuación. Suponga que en esta economía, como es de costumbre, los agentes ahorran un porcentaje  $s$  de sus ingresos. ¿Cómo queda la ecuación dinámica en función de  $\tilde{k}$ ? **5 puntos**

**Sol:**

La ecuación dinámica para el capital es:

$$\dot{K} = I - \delta K$$

Agregando el hecho de que además es una economía cerrada, luego  $S = I$ , y que los agentes ahorra un porcentaje “s” del ingreso (que será igual al PIB) queda:

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

Para escribir esta ecuación en términos de  $\tilde{k}$  primero calculemos  $\dot{\tilde{k}}$  por definición

$$\tilde{k} = \frac{K}{AL} \rightarrow \dot{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}AL - K(\dot{A}L + A\dot{L})}{A^2L^2}$$

Separando los términos en la fracción se llega a:

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{\dot{A}}{A} \frac{K}{AL} - \frac{\dot{L}}{L} \frac{K}{AL} = \frac{\dot{K}}{AL} - (n + g)\tilde{k}$$

Así obtenemos:

$$\frac{\dot{K}}{AL} = \dot{\tilde{k}} + (n + g)\tilde{k}$$

Ahora tomemos la ecuación de dinámica del capital y dividámosla por  $AL$ :

$$\frac{\dot{K}}{AL} = s \frac{Y}{AL} - \delta \frac{K}{AL}$$

Notemos que el lado derecho queda

$$s\tilde{y} - \delta\tilde{k}$$

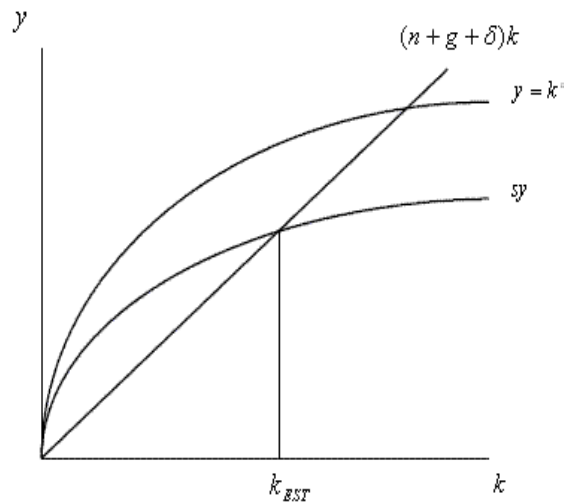
También notemos que el lado izquierdo ya lo tenemos en términos de  $\tilde{k}$ , si juntamos todos los términos y agrupamos queda:

$$\dot{\tilde{k}} = s\tilde{k}^\alpha - (\delta + n + g)\tilde{k}$$

6. Analice gráficamente las expresiones encontradas ¿cómo es el movimiento del capital hacia el estado estacionario? Encuentre el estado estacionario en forma explícita. ¿Cómo depende éste de los diferentes parámetros del problema? **10 puntos**

**Sol:**

El gráfico sería algo así:



Los movimientos del capital hacia el estado estacionario son algo así como:

- Si estoy por debajo del estado estacionario, se aprecia que el ahorro (equivalentemente la inversión) está por sobre la depreciación (es decir, lo que invierto alcanza a “pagar” la depreciación), luego, al tener una inversión positiva, se acumula capital, esto hace crecer el producto, lo que eleva el ahorro, por ende la inversión... y esto sigue, hasta que me empiezo a mover hasta el estado estacionario donde mi inversión sólo cubre la depreciación.
- Si estoy a la derecha del estado estacionario, mi capital se deprecia más rápido de lo que puedo invertir, entonces se desacumula capital hasta llegar al estado estacionario.

Para encontrar la expresión analítica del estado estacionario basta:

$$\tilde{k}^* \rightarrow \dot{\tilde{k}}^* = 0 \rightarrow s(\tilde{k}^*)^\alpha = (n + g + \delta)\tilde{k}^*$$

De aquí se desprende que

$$\tilde{k}^* = \left( \frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Luego vemos que  $\tilde{k}^*$  es creciente en  $s$  y decreciente en  $n$  y  $g$  (también en  $\delta$  pero no es relevante, porque es una tasa dada, no se puede modificar).

7. Dadas estas dependencias, sería bueno hacer políticas tal que se fomente el ahorro en los agentes, para así subir  $s$  ¿por qué sí? ¿por qué no? No hace falta desarrollar cálculos para contestar a esta pregunta, sin embargo, es importante desarrollar la intuición detrás de los mecanismos económicos  
**10 puntos**

**Sol:** Al ver la dependencia de  $\tilde{k}^*$  respecto a  $s$ , sería intuitivo pensar que para que aumente la riqueza de un país, se debe ahorrar más, pues al ser más ricos, mejor, ¿no?. Entonces por esa parte serían buenas políticas que busquen aumentar el ahorro de sus agentes (como China o Japón)

Pero, ¿qué estamos olvidando?. Nos olvidamos que elevar la tasa de ahorro hace que el consumo de los agentes disminuya, es decir, ahorramos más, somos más ricos, pero para esto estamos dejando de consumir. Luego hay un trade-off.

Entonces una política que estimule el ahorro es buena en el sentido que nos hace ser más ricos en algún tiempo, pero por otra parte es mala porque hace que los agentes consuman menos, lo que los haría menos felices además que como ya sabemos que se deprima el consumo puede tener efectos importantes en la economía, salarios, producción, etc.

8. Recuerde que si bien en el estado estacionario  $\dot{\tilde{k}} = 0$ , esto no implica que  $k$  (ie  $K$  per cápita) en el estado estacionario no crezca. ¿Por qué? ¿Cuál es el valor de la tasa de crecimiento del producto per cápita en el estado estacionario? En su opinión ¿qué es más razonable en términos que refleje la realidad? ¿un modelo en que la productividad crezca o uno en que la productividad sea constante? Justifique. **10 puntos**

**Sol:**

$$\tilde{k}^* = \frac{k^*}{A}$$

Tomando logaritmo y diferenciando respecto al tiempo

$$\frac{\dot{\tilde{k}}^*}{\tilde{k}^*} = \frac{\dot{k}^*}{k^*} - \frac{\dot{A}}{A}$$

Sabemos que en el estado estacionario  $\dot{\tilde{k}}^* = 0$  y que  $\frac{\dot{A}}{A} = g$ , luego:

$$\frac{\dot{k}^*}{k^*} = g$$

Es decir, el capital per cápita en estado estacionario crece a una tasa  $g$ .

En palabras, anteriormente se obtuvo que el capital por unidad eficiente no crece en el estado estacionario, pero esto no significa que el capital per cápita no crezca, como lo hemos mostrado, esto debido a que está creciendo la productividad, luego como crece ésta, crece el capital.

Tomemos ahora la función de producción en términos per cápita:

$$\frac{Y}{L} = y = A\tilde{k}^\alpha$$

Esto se cumplirá siempre, entonces tomamos logaritmos y derivamos una vez más, llegando así a:

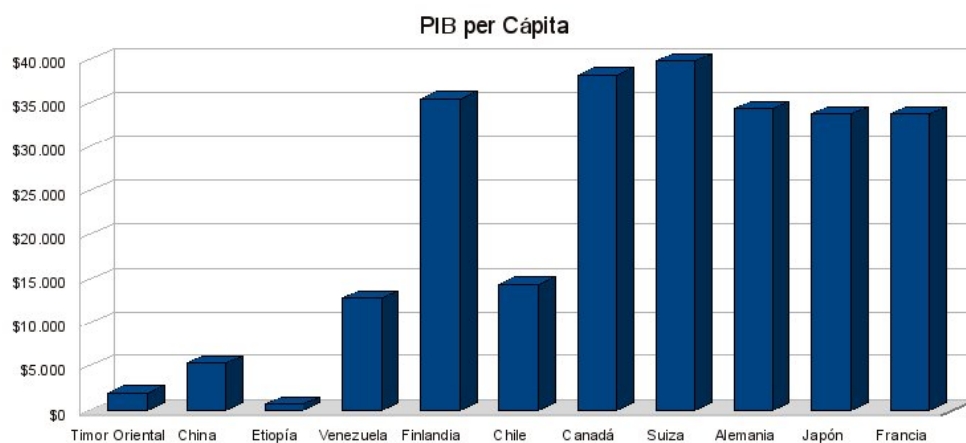
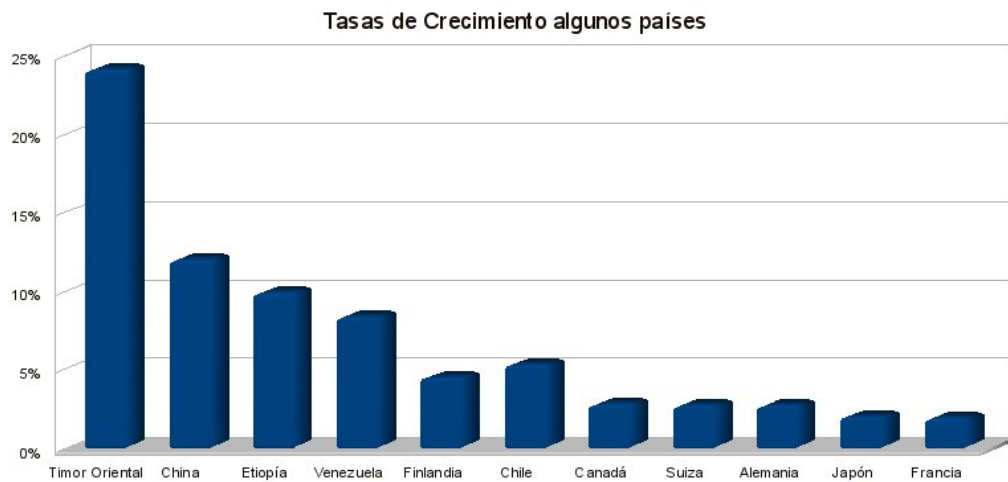
$$\frac{\dot{y}}{y} = g + \alpha \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}}$$

Ahora si fijamos el capital de eficiencia como el capital de eficiencia en estado estacionario (ie  $\dot{\tilde{k}}^* = 0$ ), llegaremos a que:

$$\frac{\dot{y}^*}{y^*} = g$$

Esto nos dice que la producción en estado estacionario, aún así crece a una tasa  $g$ , es decir, como crece la productividad del trabajo, crece la producción.

9. Si ahora estamos fuera del estado estacionario. Calcule la tasa de crecimiento del PIB per cápita en terminos de  $\tilde{k}$ . Represente esto en una gráfica. ¿Cómo el resultado puede explicar las diferencias observadas en las graficas siguientes? **10 puntos**



**Sol:**

Primero volvamos a escribir la definición de crecimiento del PIB per cápita, en términos de  $\tilde{k}$  y lo mismo, logaritmo y diferenciando, queda:

$$\frac{\dot{y}}{y} = g + \alpha \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}}$$

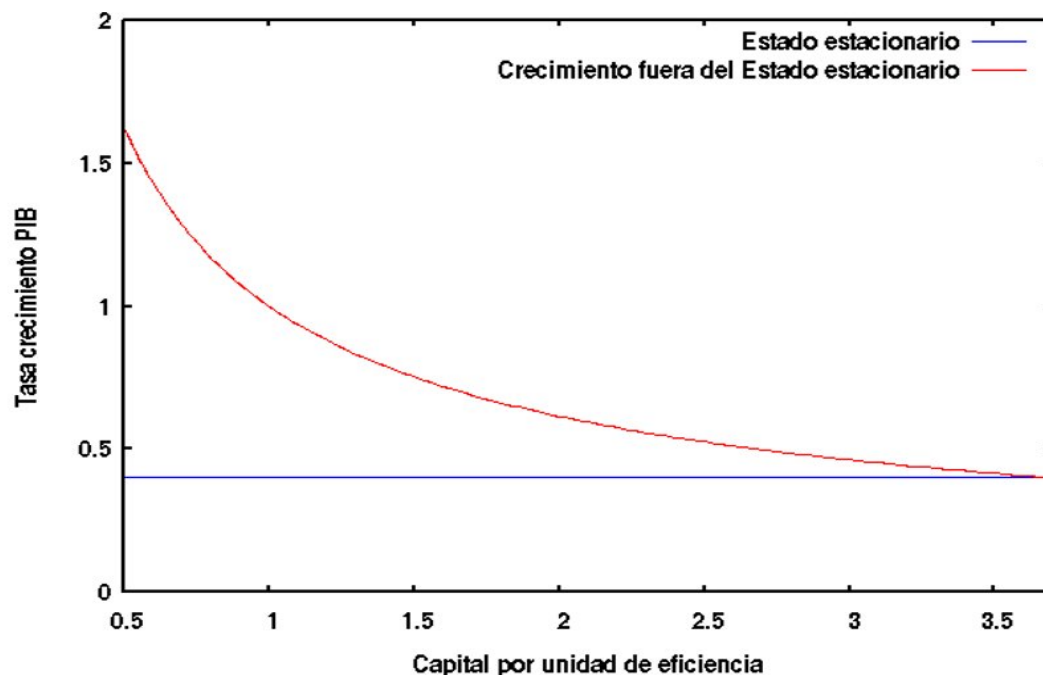
De la ecuación dinámica se tiene que:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = s(\tilde{k})^{\alpha-1} - (n + g + \delta)$$

Luego, reemplazando:

$$\frac{\dot{y}}{y} = g + \alpha(s(\tilde{k})^{\alpha-1} - (n + g + \delta))$$

Graficamente esto se ve algo así



El eje vertical sería la tasa de crecimiento del producto y el eje horizontal es el stock de capital per cápita.

Nótese que a partir de  $\tilde{k}^*$ , la tasa de crecimiento empieza a ser constante igual a  $g$ .

La gráfica recién hecha nos señala que los países más pobres (es decir, los que tienen menor capital per cápita y por lo tanto menor capital eficiente) son los que crecen a una mayor tasa.

Ambas gráficas nos señalan que los países más pobres crecen más rápido que los países “ricos” y todos crecerían al mismo estado estacionario (convergencia total). Por otra parte del gráfico se desprende que sólo los países que tienen un ingreso similar, tienen un mismo estado estacionario y por ende crecen a una misma tasa (convergencia condicional)

Es clara la relación de ambas gráficas con el modelo, de hecho, justamente el modelo recién hecho describe los datos empíricos y la forma que presentan.

10. Tenemos los siguientes datos de Costa de Marfil. Su PIB per cápita es de US\$ 1800, y su tasa de crecimiento es de 1.7 %. Vea nuevamente los datos de por ejemplo China, Timor Oriental y Etiopía. ¿Por qué nuestro modelo no permite explicar el caso de este país? ¿Qué supuesto básico del modelo tiene que modificar para conseguirlo? Represente el caso de Costa de Marfil en un nuevo gráfico como la que hizo para contestar a la pregunta 6 y explique. Ojo que no es necesario desarrollar cálculos para contestar a esta pregunta. **10 puntos**

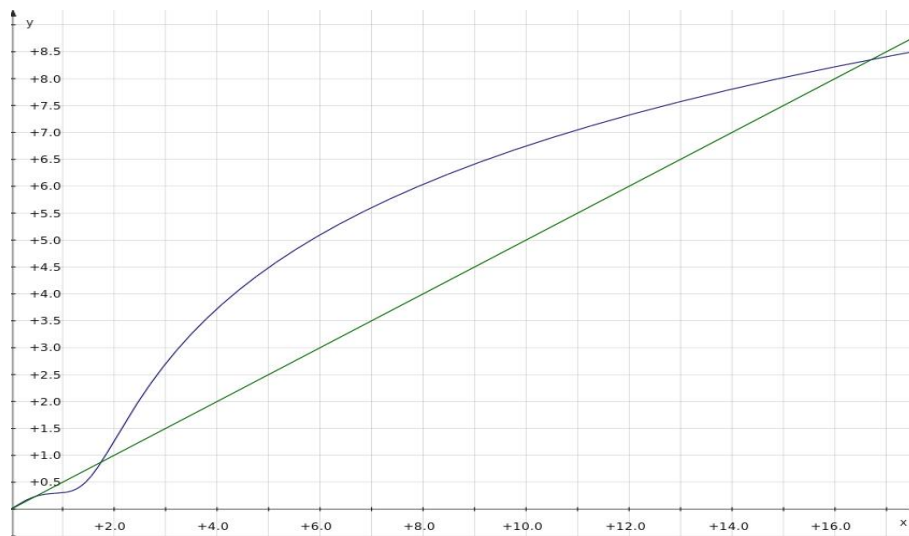
**Sol:**

Justamente al mirar los datos de Costa de Marfil y contrastarlo con los de China y Etiopía que tienen un nivel similar de riqueza per cápita, y con lo dicho en la pregunta anterior, se debe dar que Costa de Marfil al ser pobre tenga una tasa de crecimiento elevada. Justamente eso, no se obtiene.

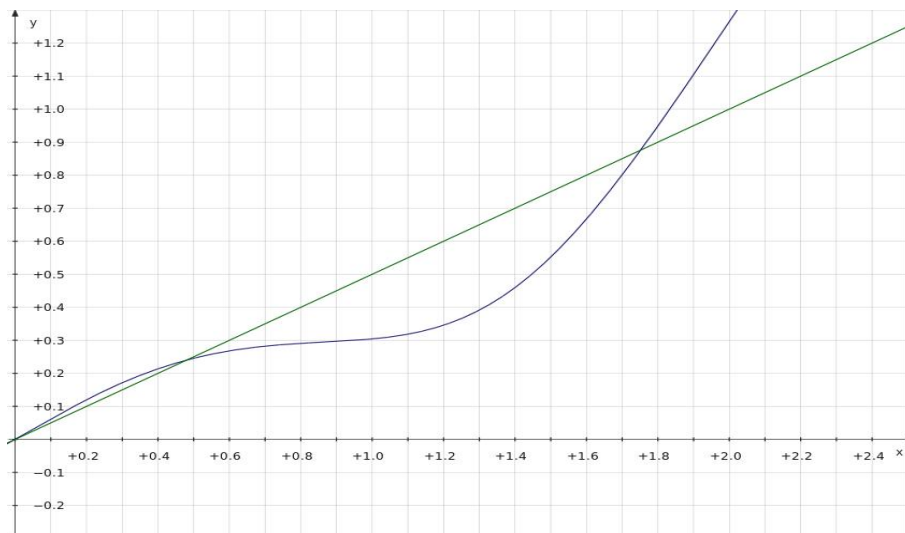
Para modificar esto podría levantarse el supuesto de la condición de Inada cuando el capital tiende a infinito. Pero notemos que no es necesario. Sólo basta que exista más de un estado estacionario, pues si esto sucede podríamos identificar una “trampa de pobreza” en la que podría estar Costa de Marfil. Para esto tomemos un ejemplo gráfico.

Sea una función de producción tal que el gráfico de la función per cápita tenga la siguiente forma (la recta será la “línea de depreciación”), luego cada cruce de estas dos curvas es un estado estacionario. Notemos que en los gráficos se indentifican 3 estados estacionarios. Uno de ellos inestable. El segundo gráfico no es más que un acercamiento en torno al origen para indentificar más claramente los estados estacionarios.

Esta función cumple las condiciones de Inada.



Haciendo un acercamiento en torno al origen vemos que:



Vemos entonces que dado el primer estado estacionario estable (el primer cerca del origen). Podría modelarse que Costa de Marfil al ser tan pobre y crecer tan poco, esta cercano por abajo de este estado estacionario, luego se acerca al primer estado estacionario y no puede tener más capital(y por ende riqueza) que el dado por ese estado. Mientras Timor Oriental, China y Etiopía pueden estar más cerca pero por arriba del segundo estado estacionario, que como vemos no están muy distantes. El segundo estado estacionario no es estable e incentiva a esas economías a moverse rápidamente (ie con gran crecimiento) al tercer estado estacionario. Esto explicaría el gran crecimiento de por ejemplo China, Timor Oriental y Etiopía.

Nota: En general los argumentos debiesen moverse por este ámbito, la existencia de más de un estado estacionario. Cualquier otro, habría que revisarlo con atención y ver la coherencia, pero debiese estar malo.