INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN56A
Semestre: Otoño
Profesores: José Miguel Cruz
Gonzalo Maturana
Ercos Valdivieso

# Pauta Auxiliar N° 5

## Problema 1:

La acción de la empresa Cupec tiene un precio corriente de $30, y un retorno mensual compuesto continuamente, con un valor esperado de 1.5% y una desviación estándar de 1.2%. Cupec no pagará dividendos. Suponga que el retorno mensual, compuesto continuamente (=$ln(P_1)$-$ln(P_0)$), se distribuye normal y que los retornos mensuales son independientes.

a) ¿Cuál es el valor esperado y la desviación estándar del retorno anual (compuesto continuamente) de Cupec?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el precio de Cupec sea mayor que $35 el próximo año? *Hint:* la probabilidad de que el precio sea mayor a $35 el próximo año equivale a que el retorno sea mayor a *ln(35)-ln(30)*=0.1542.
c) Calcule el intervalo de confianza al 95% del retorno. Contraste esto con la hipótesis nula de que el retorno es 3%.

## Solución:

Sea $R = \ln\left(\frac{P_{12}}{P_0}\right) = \ln\left(\frac{P_1}{P_0} \times \frac{P_2}{P_1} \times \ldots \times \frac{P_{12}}{P_{11}}\right) = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{P_{12}}{P_{11}}\right) \equiv r_1 + r_2 + \ldots + r_{12}$.

Dado que el retorno del mes i-avo, compuesto continuamente, viene dado por:

$$r_i = \ln\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right) \sim N(0.015,\ 0.012^2)$$

y los retornos mensuales son independientes, la distribución del retorno anual, compuesto continuamente, es la suma de 12 variables i.i.d (independiente e idénticamente distribuidas). Por lo tanto, el valor esperado del retorno anual es 12*0.015=0.18 y su varianza es $12*(0.012)^2=0.001728$ (con lo cual la desviación estándar anual es $\sqrt{0.001728} = 0.0416$). Esto es:

$$R \sim N(0.18,\ 0.001728)$$

La probabilidad de que el precio esté por sobre $35 es equivalente a determinar la probabilidad de que el retorno anual sea superior a un 15.42%:

$$\Pr\left(R > \ln\left(\frac{35}{30}\right) = 0.1542\right) = \Pr\left(z \equiv \frac{R - 0.18}{0.0416} > \frac{0.1542 - 0.18}{0.0416} = -0.6202\right)$$

$$= 1 - \Pr(z \leq -0.6202) = 1 - \Phi(-0.6202) = 1 - 0.2676 = 0.7324$$

**Problema 2:**

Considere dos activos A y B con correlación 0,1.

| **Activo** | **Retorno Esperado** | **Volatilidad** |
|---|---|---|
| A | 10% | 15% |
| B | 18% | 30% |

a) Suponga que Ud. invierte en una cartera C, la cual está constituida en un 50% del activo A y en un 50% del activo B. ¿Cuál es el retorno esperado y la volatilidad de la cartera C?

b) Argumente si C es o no la cartera de mínima varianza.

c) Determine el coeficiente de correlación entre el portafolio C y el activo A.
*Hint:* Recuerde que Rho(R1,R2) = Cov(R1,R2)/(Sigma(R1)*Sigma(R2)) y además que Cov(R1,R2) = E(R1*R2) - E(R1)*E(R2))

d) Suponga que existe además en esta economía un activo libre de riesgo, con retorno de 5%. Construya una cartera D con w% invertido en el activo libre de riesgo y (1-w)% en la cartera C. Encuentre el retorno esperado y la volatilidad de D en función de w.

e) Discuta si la introducción de un activo libre de riesgo altera la frontera eficiente de las carteras.

Solución:

a) Suponga que Ud. invierte en una cartera C, la cual está constituida en un 50% del activo A y en un 50% del activo B. ¿Cuál es el retorno esperado y la volatilidad de la cartera C?

La cartera C está constituida en un 50% por el activo A, y en un 50% por el activo B.

El retorno esperado es:

$$E(R_C) = 0{,}5 * 10\% + 0{,}5 * 18\% = 14\%$$

La varianza es

$$\sigma^2 = 0{,}5^2 * 0{,}15^2 + 0{,}5^2 * 0{,}3^2 + 2 * 0{,}5 * 0{,}5 * 0{,}15 * 0{,}3 * 0{,}1 = 0{,}03$$

Luego la volatilidad es

$$\sigma = \sqrt{0{,}03} = 0{,}1743 = 17{,}43\%$$

b) Argumente si C es o no un punto de la frontera "eficiente" de carteras (es decir, carteras preferidas por agentes aversos al riesgo)

Para que C sea un punto de la frontera eficiente de carteras, los pesos deben ser solución del problema de minimización de la pregunta 1. Así, debe cumplir que:

$$w = \frac{{\sigma_2}^2 - \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12}}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2 - 2 * \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12}}$$

Calculando,

$$w = \frac{0{,}3^2 - 0{,}15 * 0{,}3 * 0{,}1}{0{,}15^2 + 0{,}3^2 - 2 * 0{,}15 * 0{,}3 * 0{,}1} = 0{,}826 = 82{,}6\%$$

Luego, la volatilidad mínima es:

$$\sigma^2 = 0{,}826^2 * 0{,}15^2 + 0{,}174^2 * 0{,}3^2 + 2 * 0{,}826 * 0{,}174 * 0{,}15 * 0{,}3 * 0{,}1 = 0{,}0193$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}01936} = 0{,}1392 = 13{,}92\%$$

$$E(R_C) = 0{,}826 * 10\% + 0{,}174 * 18\% = 11{,}39\%$$

c) Determine el coeficiente de correlación entre el portafolio C y el activo A. Hint: Recuerde que Rho(R1,R2) = Cov(R1,R2)/(Sigma(R1)*Sigma(R2)) y además que Cov(R1,R2) = E(R1*R2) - E(R1)*E(R2))

Se debe recordar que la covarianza es lineal. Dado esto,

$$Cov(R, R1) = Cov(0{,}5 * R1 + 0{,}5 * R2, R1)$$
$$Cov(R, R1) = 0{,}5 * Cov(R1, R1) + 0{,}5 * Cov(R2, R1)$$
$$Cov(R, R1) = 0{,}5 * {\sigma_1}^2 + 0{,}5 * Cov(R1, R2)$$
$$Cov(R, R1) = 0{,}5 * 0{,}15^2 + 0{,}5 * 0{,}15 * 0{,}3 * 0{,}1 = 0{,}0135$$

Luego, podemos calcular el coeficiente de correlación

$$\rho = \frac{Cov(R, R1)}{\sigma_C * \sigma_1} = \frac{0{,}0135}{0{,}1743 * 0{,}15} = 0{,}516$$

d) Suponga que existe además en esta economía un activo libre de riesgo, con retorno de 5%. Construya una cartera D con w% invertido en el activo libre de riesgo y (1-w)% en la cartera C. Encuentre el retorno esperado y la volatilidad de D en función de w.

Con los datos del problema, el retorno esperado de la cartera D es:

$$E(R) = w * 0{,}05 + (1 - w) * 0{,}14$$

Dado que el activo libre de riesgo, posee volatilidad cero, la volatilidad de la cartera D es:

$$\sigma_D = (1 - w) * \sigma_C$$

Donde $\sigma_C$ es la volatilidad de la cartera C, conocida.

e) Discuta si la introducción de un activo libre de riesgo altera la frontera eficiente de las carteras.

Al introducir un activo libre de riesgo, se crea la Linea de Mercado de Capitales, la cual es una recta que corta tangente a la frontera eficiente, y corta el eje de la rentabilidad en el valor de la rentabilidad del activo libre de riesgo. Todas aquellas carteras pertenecientes a la línea, son eficientes, y esto permite obtener una cartera con una mayor rentabilidad asumiendo un mismo riesgo que alguna otra de la frontera eficiente.

Problema 3:

Suponga que el mercado de Renta Variable en Chile está compuesto por sólo 4 acciones. Las varianzas y covarianzas de los retornos de cada uno de estos activos se resumen en la siguiente tabla. MERCADO equivale a una combinación de estos 4 activos, los que conforman el Portafolio de Mercado:

| | **FALABELLA** | **ENDESA** | **RIPLEY** | **COLBUN** | **MERCADO** |
|---|---|---|---|---|---|
| **FALABELLA** | 0,078 | 0,043 | 0,037 | 0,021 | 0,06 |
| **ENDESA** | 0,043 | 0,089 | 0,068 | 0,011 | 0,080 |
| **RIPLEY** | 0,037 | 0,068 | 0,013 | 0,077 | 0,050 |
| **COLBUN** | 0,021 | 0,011 | 0,077 | 0,065 | 0,135 |
| **MERCADO** | 0,06 | 0,080 | 0,050 | 0,135 | 0,300 |

Además de la presencia de instrumentos de renta variable, el Banco Central emite diferentes tipos de bonos. La siguiente tabla muestra el valor de la TIR (anual) de cada uno de ellos:

| | |
|---|---|
| BCP (Bono en Pesos) | 9% |
| BCD (Bono en Dólares) | 6% |
| BCU (Bono en UF) | 3% |

Un prestigioso equipo de analistas ha determinado que el Portafolio de Mercado tiene una rentabilidad esperada de 14% (anual en pesos).

a. Utilizando el modelo CAPM, calcule el retorno esperado de un portafolio (PORTAFOLIO A) que invierte una 20% en Renta Fija y el resto en instrumentos de Retail (consumo - 40% en cada acción de retail). Calcule la volatilidad de ese portafolio.

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f)$$

$$\beta_A = \frac{cov(A,M)}{var(M)} = \frac{cov\left(0{,}2 \cdot r_f + 0{,}4 \cdot r_{fal} + 0{,}4 \cdot r_{rip}\right)}{var(M)}$$
$$= \frac{0{,}4 \cdot cov\left(r_{fal}, r_m\right) + 0{,}4 \cdot cov\left(r_{rip}, r_m\right)}{var(M)}$$

$$\beta_A = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}06 + 0{,}4 \cdot 0{,}05}{0{,}3} = 0{,}147$$

Se debe usar $r_f = 9\%$ dado que los retornos y volatilidades están expresadas en pesos. Se puede suponer que los instrumentos emitidos por el Banco Central están libre de riesgo (No considera riesgo de tasas)

$$r_A = r_f + \beta_A\left(r_m - r_f\right) = 9\% + 0{,}147(14\% - 9\%) = 9{,}74\%$$

$$var(A) = 0{,}4^2 \cdot var\left(r_{fal}\right) + 0{,}4^2 \cdot var\left(r_{rip}\right) + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot cov\left(r_{fal}, r_{rip}\right) = 0{,}0264$$

$$\sigma_A = \sqrt{var(A)} = 16{,}25\%$$

b. Suponga ahora un portafolio sólo constituido por instrumentos del sector eléctrico. Determine la volatilidad de esta cartera (PORTAFOLIO B) si desea minimizar el riesgo. Usando CAPM, calcule el retorno esperado de ese portafolio.

Utilizando la fórmula para una cartera de mínima varianza de dos activos:

$$w_{end} = \frac{var(r_{col}) - cov(r_{end}, r_{col})}{var(r_{end}) + var(r_{col}) - 2cov(r_{end}, r_{col})}$$

$$w_{end} = \frac{0{,}065 - 0{,}011}{0{,}089 + 0{,}065 + 2 \cdot 0{,}011} = 0{,}409$$

$$w_{col} = 1 - w_{end} = 0{,}591$$

$$var(B) = 0{,}409^2 \cdot 0{,}089 + 0{,}591^2 \cdot 0{,}065 + 2 \cdot 0{,}409 \cdot 0{,}591 \cdot 0{,}011 = 0{,}04289$$

$$\sigma_B = \sqrt{var(B)} = 20{,}71\%$$

$$\beta_B = \frac{cov(0{,}409 \cdot r_{end} + 0{,}591 \cdot r_{col})}{var(M)} = \frac{0{,}409 \cdot cov(r_{end}, r_m) + 0{,}591 \cdot cov(r_{col}, r_m)}{var(M)}$$

$$\beta_B = \frac{0{,}409 \cdot 0{,}08 + 0{,}591 \cdot 0{,}135}{0{,}3} = 0{,}375$$

$$r_B = 9\% + 0{,}375 \cdot (14\% - 9\%) = 10{,}88\%$$

c. Calcule los beta del PORTAFOLIO A y PORTAFOLIO B basándose en sus cálculos anteriores. ¿Es posible encontrar un tercer portafolio (PORTAFOLIO C) constituido por los dos anteriores cuya sensibilidad a a la prima por riesgo de mercado sea nula?

Dada la modalidad de resolución de las partes anteriores el valor de los betas ya se tiene.

La sensibilidad del Portafolio C sea nula es equivalente a decir que su beta sea cero. Debemos encontrar $w_A$ y $w_B$ que cumplan:

$$w_A\beta_A + w_B\beta_B = 0$$

Además se cumple que,

$$w_A + w_B = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones,

$$w_A = \frac{-\beta_B}{\beta_A - \beta_B} = \frac{-0{,}375}{0{,}147 - 0{,}375} = 1{,}645$$

$$w_B = 1 - w_A = 1 - 1{,}645 = -0{,}645$$

Luego, un Portafolio C si se construye vendiendo 0,645 del Portafolio B y comprando 1,645 del Portafolio A. De esta manera el comportamiento del mercado no influye en el comportamiento del Portafolio C.

d. Suponga ahora que se cumple un modelo APT, donde además de la sensibilidad que tienen los instrumentos con el comportamiento del mercado existe una dependencia con respecto al precio del Gas Natural. La sensibilidad a este factor para ENDESA es de -1 y para COLBUN es de 2. El premio por riesgo ante este factor es de un 6%. Encuentre un portafolio sólo compuesto por acciones del sector eléctrico (PORTAFOLIO D) cuyo comportamiento no dependa del precio del Gas Natural. ¿Cuál es la rentabilidad esperada del PORTAFOLIO D?

$$-1 \cdot w_{end} + 2 \cdot w_{colb} = 0$$
$$w_{end} + w_{col} = 1$$

Despejando el sistema de ecuaciones se tiene,

$$w_{end} = \frac{2}{3} = 0{,}667$$
$$w_{col} = 1 - w_{end} = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

El premio por riesgo asociado al factor del comportamiento del mercado está dado por

$$r_m - r_f = 0{,}14 - 0{,}09 = 0{,}05$$

El premio por riesgo total del Portafolio D está dado por:

$$r_d = r_f + 0 \cdot 6\% + \beta_D \cdot (14\% - 9\%)$$

$$\beta_D = \frac{cov(0{,}667 \cdot r_{end} + 0{,}333 \cdot r_{col}, r_m)}{var(r_m)}$$
$$= \frac{0{,}667 \cdot cov(r_{end}, r_m) + 0{,}333 \cdot cov(r_{col}, r_m)}{var(r_m)}$$
$$\beta_D = \frac{0{,}667 \cdot 0{,}08 + 0{,}333 \cdot 0{,}135}{0{,}3} = 0{,}328$$
$$r_d = 9\% + 0{,}328 \cdot (14\% - 9\%) = 10{,}64\%$$

El premio por riesgo entonces es:

$$r_d - r_f = 10{,}64\% - 9\% = 1{,}64\%$$