

**CTP N° 3**

Dado los siguientes datos:

Activo	Retorno	Volatilidad	Matriz Corr		
			A	B	C
A	11%	20%	1	0,8	0,4
B	14%	30%	0,8	1	0,3
C	13%	25%	0,4	0,3	1

- Calcule el retorno y varianza de la cartera formada por 25% activo A, 25% activo B y 50% activo C.
- Calcule la cartera de mínima varianza, su desviación estándar y su retorno.
- Le piden crear una cartera con los activos A, B y C, siendo una de las restricciones que el activo B pese exactamente un 15% en su cartera y ésta que tenga la menor volatilidad posible. ¿Cuál sería su propuesta de cartera? Indique la volatilidad y retorno esperado. ¿Era esperable la diferencia de la volatilidad de esta cartera con la obtenida en la parte b)? ¿Por qué?
- Suponga usted que quiere invertir en una cartera con riesgo igual a 21%, compuesta solamente por activos del tipo A y C. ¿Cuál sería dicha cartera? Indique el retorno esperado.
- Calcule los  $w$  correspondientes para una cartera que posee un retorno esperado igual a 12,5% utilizando sólo los activos B y C. Interprete el resultado.

Pauta:

a)

$$r_e = 0.25 * 11\% + 0.25 * 14\% + 0.5 * 13\% = 12,75\%$$

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= 0.25^2 \cdot 0.2^2 + 0.25^2 \cdot 0.3^2 + 0.5^2 \cdot 0.25^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.25 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \\ &\quad + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.25 = 4.04\% \\ \sigma_e &= 20.09\%\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\min_w w' \Sigma w &= \min_w \sigma_e^2 \\ \text{st: } w_1 + w_2 + w_3 &= 1\end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}w_1 &= 1 - w_2 - w_3 \quad (1) \\ \min_{w_2, w_3} \sigma_1^2 (1 - w_2 - w_3)^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + \sigma_3^2 w_3^2 + 2 \cdot (1 - w_2 - w_3) w_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \\ &\quad + 2 \cdot (1 - w_2 - w_3) w_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 + 2 w_2 w_3 \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3\end{aligned}$$

FOC:

$$\frac{d(\sigma_e^2)}{d w_2} = 0.068 \cdot w_2 - 0.011 \cdot w_3 + 0.016 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d(\sigma_e^2)}{d w_3} = 0.125 \cdot w_3 - 0.011 \cdot w_2 - 0.04 = 0 \quad (3)$$

Utilizando (2) y (3) se obtiene  $w_2 = -0.186$ ,  $w_3 = 0,309$ , luego reemplazando en (1)  $w_1 = 0.877$

$$r_e = 11.06\%$$

$$\sigma_e = 18.01\%$$

c) Sabe que  $w_1 + w_2 + w_3 = 1$  y que además le imponen que  $w_b = 0.15$  entonces tendrá:

$$w_1 + 0.35 + w_3 = 1 \Rightarrow w_1 = 0.85 - w_3$$

Análogo a la parte b) se minimiza la varianza

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \sigma_1^2 (0.85 - w_3)^2 + \sigma_2^2 0.15^2 + \sigma_3^2 w_3^2 + 2(0.85 - w_3) \cdot 0.15 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \\ &\quad + 2(0.85 - w_3) w_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 + 2 \cdot 0.15 \cdot w_3 \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3\end{aligned}$$

$$\min_{w_3} \sigma_e^2$$

FOC:

$$\frac{d(\sigma_e^2)}{d w_3} = 0.125w_3^2 - 0.04165 = 0$$

$$w_3 = 0.3332$$

$$w_1 = 0.85 - 0.3332 = 0.5168$$

$$r_e = 11\% * 0.5168 + 14\% * 0.35 + 13\% * 0.3332 = 12.116\%$$

$$\sigma_e = 19.03\%$$

d)

$$0.21^2 = w^2 \cdot \sigma_a^2 + (1 - w)^2 \cdot \sigma_c^2 + 2 \cdot w \cdot (1 - w) \cdot \rho_{a,c} \sigma_a \sigma_c$$

Dado que se tendrán dos resultados de  $w$  (dado que en la frontera eficiente existen 2 puntos con volatilidad igual a 0.21) se utiliza el que maximiza los retornos. Por lo que  $w = 0,27 \Rightarrow (1 - w) = 0.73$  lo que da un retorno de

$$r_e = 0.27 * 11\% + 0.73 * 13\% = 12.46\%$$

e)

$$0.125 = w_b \cdot 0.11 + (1 - w_b) \cdot 0.13$$

$$w_b = -0.5 \Rightarrow w_c = 1 - w_b = 1,5$$

Para obtener un retorno esperado igual a 12.5% se debe realizar una venta corta del activo B, lo que se refleja en el signo de  $w_b$