Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1001-08 Introducción al Cálculo
Semana 03 Geometría Analítica
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Víctor Verdugo S.
Semestre Otoño 2010
Fecha: Lunes 12 de Abril de 2010

P1.- Dado el punto P de coordenadas (a, b) y la recta L de ecuación $y = mx$, determine la ecuación de la recta que pasa por P y tal que el trazo queda determinado por la intersección de ella con los ejes, queda dimidado por L.

Solución:
Si definimos $y_1 = mx$ e $y_2 = m'(x-a) + b$ la recta que pasa por P con m' por determinar. Luego la intersección de y_1 con y_2 es el punto $O(x_0, y_0)$ dado por:

$$O\left(\frac{am'-b}{m'-m}, m\left(\frac{am'-b}{m'-m}\right)\right)$$

Luego la intersección con los ejes X e Y de la recta y_2 está dado respectivamente por:

$$R\left(-\frac{b}{m'}+a, 0\right) \quad S(0, -am'+b)$$

Entonces, como queremos que el punto O dimida a la recta y_2, se impone que O sea punto medio del trazo $\overline{RS}$. Así:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{m'}+a\right) = \frac{am'-b}{m'-m}$$

y por otra parte

$$\frac{1}{2}(-am'+b) = m\left(\frac{am'-b}{m'-m}\right)$$

De ambas ecuaciones se obtiene que

$$m' = -m$$

Luego la recta y_2 es:

$$y_2 = -m(x-a) + b$$

P2.- Un triángulo ABC isósceles ($AC = BC$) y rectángulo en C, varía de tal manera que su vértice A permanece fijo en el origen del sistema de coordenadas, y su vértice B que se mueve sobre la recta de ecuación $x = a$. Determine la ecuación del lugar geométrico que recorre el punto C y reconocer la figura que describe.

Solución:
Definiendo las coordenadas de los puntos A, B y C tenemos que $A(0, 0)$ $B(a, y_0)$ (el punto B se mueve en la recta $x = a$) y $C(x, y)$, donde a es dato, la idea es encontrar una relación

entre x e y dadas las condiciones del problema. Primero que todo el triángulo es rectángulo luego establecemos relaciones entre las pendientes:

$$m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$$

que es equivalente a

$$\frac{y}{x} = \frac{x-a}{y_0 - y}$$

Despejando y_0 tenemos que

$$y_0 = \frac{y^2 - x^2 + ax}{y}$$

En segundo lugar debemos imponer que el triángulo es isósceles, es decir, $(d(AC))^2 = (d(BC))^2$ que es igual a:

$$x^2 + y^2 = (y - y_0)^2 + (x - a)^2$$

reemplazando a esta ecuación el valor de y_0 tenemos que

$$2(y^2 - x^2 + ax) + 2ax = a^2 + \frac{(y^2 - x^2 + ax)^2}{y^2}$$

multiplicando y^2 llegamos a:

$$2ax(x^2 + y^2) = x^4 - y^4 + a^2(x^2 + y^2)$$

simplificando por $x^2 + y^2$ y extrayendo raiz tenemos finalmente:

$$y_1 = x - a$$

La ecuación $y_2 = a - x$ representa el caso en donde el triángulo está al lado derecho de la recta, pero éste no cumple que A esté en el origen.

P7.- La base de triángulo está fija, siendo sus vértices $A = (0,0)$ y $B = (b,0)$. El vértice C está sobre la recta $y = c$, $b > 0$, $c > 0$. Determine el lugar geométrico correspondiente a la intersección de las 3 alturas.

Solución:

El punto C está dado por las coordenadas $C(x_0, c)$ (ya que este punto se mueve por la recta $y = c$), es claro que la recta $x = x_0$ es la altura trazada desde el punto C, ahora necesito la altura traza por el punto A, obviamente es perpendicular al trazo $\overline{BC}$ así:

$$m_{ha} \cdot m_{BC} = -1$$

luego tenemos: $m_{ha} = \frac{b - x_0}{c}$ y la ecuación de la altura h_a es:

$$y = \left(\frac{b - x_0}{c}\right) x$$

Así intersectando las dos alturas logramos:

$$y = \left(\frac{b - x}{c}\right) x$$

que es la ecuación de la parábola de vértice $V(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4c})$ y foco $F(\frac{b}{2}, \frac{b^2 - c^2}{4c})$