Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1001-08 Introducción al Cálculo
Semana 09 Sucesiones
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Víctor Verdugo S.
Semestre Otoño 2010
Fecha: Lunes 31 de Mayo de 2010

P2.- Calcule $\lim \frac{p(n)a^n}{n^n}$ para $p(n)$ un polinomio de grado k, $k \in \mathbb{N}$. Puede ser de utilidad comenzar considerando el polinomio $p(n) = n^k$ y luego utilizar álgebra de límites.

Solución:
La idea es dejar un término de grado $k+1$ en el denominador para lograr una sucesión nula y una acotada, esto es:

$$\frac{p(n)}{n^{k+1}} \frac{a^{k+1}a^{n-k-1}}{n^{n-k-1}}$$

Como $p(n)$ es de grado k, luego:

$$p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$$

Lo que implica que $\lim \frac{p(n)}{n^{k+1}} \cdot a^{k+1} = 0$, por ser una sucesión nula por una acotada. Falta ver que pasa con $\lim \left(\frac{a}{n}\right)$, consecuencia de la definición de límite, tenemos que $\forall \epsilon > 0$ (en particular $\epsilon = \frac{1}{2}$) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple:

$$0 \leq \left|\frac{a}{n}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Elevando a la potencia $n-k-1$ se tiene:

$$0 \leq \left|\frac{a}{n}\right|^{n-k-1} \leq \frac{1}{2^n} \cdot 2^{k+1}$$

El lado derecho de la desigualdad converge a 0 pues es una sucesión nula por acotada, luego por sandwich $\lim \left(\frac{a}{n}\right)^{n-k-1} = 0$, lo que finalmente por álgebra de sucesiones se tiene:

$$\lim \frac{p(n)a^n}{n^n} = 0$$

P3.- Demuestre que si $\lim na_n$ existe entonces $\lim a_n = 0$

Solución:
Sea $l = \lim na_n$, luego tenemos que:

$$\lim a_n = \lim na_n \cdot \lim \frac{1}{n}$$

por hipótesis cada límite debe existir para que el límite del producto exista. Así:

$$\lim a_n = \lim na_n \cdot \lim \frac{1}{n} = l \cdot 0 = 0$$

P4.- Si se sabe que para α y β positivos $\lim n(\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta))$ existe, se pide calcular el valor de α y β, y luego el valor del límite.

Solución:
Racionalizando

$$\lim n(\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n+1}+(\alpha n+\beta)}{\sqrt{n^2+n+1}+(\alpha n+\beta)}$$

$$\lim n(\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)) = \lim \frac{n(n^2+n+1-(\alpha n+\beta)^2)}{\sqrt{n^2+n+1}+(\alpha n+\beta)}$$

$$\lim n(\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)) = \lim \frac{n^2(1-\alpha^2)+n(1-2\alpha\beta)+(1-\beta^2)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\alpha+\frac{\beta}{n}}$$

Se debe imponer que el numerador se vaya a un real, luego:

$$1-\alpha^2=0 \quad 1-2\alpha\beta=0$$

De lo que se obtiene: $\alpha=1$ (α es positivo) y $\beta=\frac{1}{2}$. El límite final queda:

$$\lim \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1+\frac{1}{2n}} = \frac{3}{8}$$