Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1001-08 Introducción al Cálculo
Semana 10 Sucesiones
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Víctor Verdugo S.
Semestre Otoño 2010
Fecha: Lunes 7 de Junio de 2010

P1.- Sea $\mu_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)$. Calcular $\lim \frac{\mu_1+\mu_2+\ldots\mu_n}{n}$

Solucion:
Debemos notar que si n es par $u_n = 1$ y que si n es impar $u_n = 0$. Veamos lo siguiente: $\mu_1 = 0$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 2$, en general, si n es par:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{n}{2}$$

Por otra parte si n es impar:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{n-1}{2}$$

Así:

$$\frac{n-1}{2} \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \leq \frac{n}{2}$$

Dividiendo por n:

$$\frac{n-1}{2n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n} \leq \frac{1}{2}$$

Aplicando límite a la desigualdad y sandwich, tenemos finalmente:

$$\lim \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_n}{n} = \frac{1}{2}$$

P2.- Dado $k \in \mathbb{N}$, estudie la convergencia de la sucesión $n^k q_n^n$ donde $(q_n) \to q$ con $|q| < 1$.

Solucion:
Vemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $q_n \in (-1, 1)$, luego por álgebra de límites tenemos que: $n^k |q|^n = (n|q|^{\frac{n}{k}})^k$, si hacemos que $h = \frac{1}{|q|} - 1$ y usando Bernoulli:

$$\frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots a_n h^n}$$

Multiplicando por n^k:

$$\frac{n^k}{(1+h)^n} \leq \frac{n^k}{1 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots a_n h^n}$$

Además $n^k|q|^n \geq 0$ y como k es fijo:

$$0 \leq \frac{n^k}{(1+h)^n} \leq \frac{n^k}{1+a_1h+a_2h^2+\ldots a_nh^n} \overbrace{\rightarrow}^{n\to\infty} 0$$

ya que a_n es un polinomio de grado n y por sandwich se concluye.

P3.- Sea (h_n) con $h_n > 0$ y $(\frac{1}{nh_n}) \to 0$. Demuestre que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} \to 0$.

Solucion:
Aplicando la desigualdad de Bernoulli $1 + nh_n \leq (1+h_n)^n$, ya que $h_n > -1$:

$$0 \leq \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n} \leq \frac{1}{nh_n}$$

Por hipótesis la última sucesión converge a 0, por sandwich $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} \to 0$.

P6.- Para $0 \leq a \leq b$. Sea $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_ny_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$. Demostrar que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim x_n = \lim y_n$ y que si llamamos l a éste último límite, se cumple que $\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$.

Solucion:
Para ver que las sucesiones poseen límite, debemos probar que son monótonas y acotadas. Consideremos la relación:

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} - \sqrt{x_ny_n} = \frac{x_n+y_n-2\sqrt{x_ny_n}}{2} = \frac{(\sqrt{y_n}-\sqrt{x_n})^2}{2} \geq 0$$

Luego:

$$y_{n+1} \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Usando (1) para la definición de y_n:

$$y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \leq \frac{y_n+y_n}{2} = y_n$$

Luego y_n es decreciente, así $y_n \leq y_1 = b$ (2).

De la definición de x_n y usando (1):

$$x_{n+1} = \sqrt{x_ny_n} \geq \sqrt{x_nx_n} = x_n$$

Luego x_n es creciente, así $x_n \geq x_1 = a$ (3). Juntando (2) y (3):

$$a \leq x_n \leq y_n \leq b$$

De lo que se deduce que x_n e y_n son monótonas y acotadas, luego por el teorema de las sucesiones monótonas estas sucesiones poseen límite.
Veamos que los límites de ambas sucesiones son iguales, es decir $\lim x_n = \lim y_n$, sea $\lim x_n = l_x$ y $\lim y_n = l_y$, además toda subsucesión debe poseer el mismo límite. Así: $\lim x_n = \lim x_{n+1} = l_x$ y $\lim y_n = \lim y_{n+1} = l_y$, consideremos la definición de y_{n+1}:

$y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ aplicando límite a ambos lados se tiene:

$$2l_y = l_x + l_y \Leftrightarrow l_x = l_y$$

Llamando $l_x = l_y = l$ y:
Como

$$x_n \geq x_2 \quad \forall n \geq 2 \quad y_n \leq y_2 \quad \forall n \geq 2$$

Y usando la definición de x_n e y_n, se tiene que:

$$\sqrt{ab} = x_2 \leq x_n \leq y_n \leq y_2 = \frac{a+b}{2}$$

y aplicando límite:

$$\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$$