Rodolfo Núñez | Auxiliar 1 / 29/3/2010

Intro. al Álgebra (MA1101)

P1. (a) P.D.Q. $\underbrace{(p \vee q \Longleftrightarrow p \wedge r)}_{①=\text{hipótesis}} \Rightarrow \overbrace{\left[(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)\right]}^{②}$

lo asumimos para concluir que ② = Ⓥ

$(\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee r)$

$(\bar{q} \wedge \bar{p}) \vee (\bar{q} \wedge r) \vee \cancel{(p \wedge \bar{p})} \vee (p \wedge r)$ Ⓕ

$\overline{(q \vee p)} \vee (\bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \underset{\uparrow}{=} \overline{(p \wedge r)} \vee (\bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge r)$

por hipótesis

Ⓥ (el $(\bar{q} \wedge r)$ puede ser Ⓥ o Ⓕ)

q.e.d.

** Pensar de ésta forma o como lo hizo el profe en clases es mucho más útil para la vida que solo desarrollar y llegar a un Ⓥ

(b) P.D.Q. $\left[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q)\right] \Rightarrow (p \Rightarrow \bar{r})$

Notar que: $(r \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{r}) \therefore (p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q)$

$\Rightarrow \left[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{q} \Rightarrow \bar{r})\right] \underset{\uparrow}{\Rightarrow} (p \Rightarrow \bar{r})$

transitividad

q.e.d.

(c) P.D.Q. $\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{①} \Rightarrow \underbrace{\left[\overline{(q \wedge r)} \Rightarrow \overline{(p \wedge r)}\right]}_{②}$

asumimos ésto para ver si ② es Ⓥ.

Ahora asumimos $\overline{(q \wedge r)} = Ⓥ$, i.e. $(\bar{q} \vee \bar{r}) = Ⓥ$
(es como una cadena)

Notemos que: $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ (contrarrecíproca)

$\Rightarrow (\bar{q} \vee \bar{r}) \underset{\uparrow}{\Rightarrow} (\bar{p} \vee \bar{r}) \Longleftrightarrow \overline{(p \wedge r)}$

ya que $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ y $\bar{r}$ es cte. en éste caso

q.e.d.

(d) P.D.Q. $\overbrace{\left[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r\right]}^{①} \Rightarrow \bar{p}$

$$\left[(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r\right] = (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge \underbrace{\left[\cancel{(\bar{r} \wedge r)}^{Ⓕ} \vee (q \wedge r)\right]}_{(q \wedge r)}$$

$$= \left[(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge q\right] \wedge r \underset{\text{distrivutividad}}{=} (\bar{p} \wedge q) \vee \cancel{(\bar{q} \wedge q)}^{Ⓕ} \wedge r \underset{\text{asociatividad}}{=} \bar{p} \wedge q \wedge r$$

Notar que: Consideramos ① = Ⓥ y luego lo desarrollamos llegando a que ① $\Leftrightarrow \bar{p} \wedge q \wedge r \quad \therefore (\bar{p} \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow$ Ⓥ

$\Rightarrow \bar{p} \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow$ Ⓥ $\quad \therefore \bar{p} =$ Ⓥ q.e.d.

P2. (a) Sea $p \not\Rightarrow q$

Luego, ¿$\left[\underbrace{p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q}_{①}\right] \Leftrightarrow$ Ⓥ ?

Si $p \not\Rightarrow q \Leftrightarrow p =$ Ⓥ ; $q =$ Ⓕ (Es la única opción)

① $\Leftrightarrow \underbrace{Ⓥ \wedge (\cancel{Ⓕ \wedge r}^{Ⓕ})}_{Ⓥ} \Longleftrightarrow \underbrace{(\cancel{Ⓥ \vee r}^{Ⓥ}) \wedge Ⓕ}_{Ⓕ}$

Contradicción

$\therefore$ ① $\Leftrightarrow$ Ⓕ q.e.d.

(b) $\left\{\underbrace{\left[s \Rightarrow \underbrace{(r \vee \bar{r})}_{①}\right]}_{②} \Rightarrow \underbrace{\left[\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \bar{r}\right]}_{③}\right\} \Leftrightarrow$ Ⓥ

- Como ① = Ⓥ , ② ≠ Ⓕ ⇒ ② = Ⓥ
- ∴ ③ = Ⓥ ⇒ $\boxed{s = Ⓥ} \wedge \bar{r} =$ Ⓥ $\Rightarrow \boxed{r = Ⓕ}$ (por separado deben ser Ⓥ)
- $\overline{(p \Rightarrow q)} =$ Ⓥ $\Rightarrow (p \Rightarrow q) =$ Ⓕ $\Rightarrow \boxed{p = Ⓥ} \wedge \boxed{q = Ⓕ}$

q.e.d.

(c) $\{(q = V) \wedge [(p \wedge q) \not\Longleftrightarrow (r \Longleftrightarrow s)]\} \Longleftrightarrow V$

P.D.Q. $$\underbrace{[(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow s)]}_{①} \Rightarrow \underbrace{[p \vee (r \wedge s)]}_{②}$$

$$① \underset{\text{def.} \Rightarrow}{=} [(p \wedge r) \vee (\bar{q} \vee s)] \underset{\text{hip.}}{=} (p \wedge r) \vee \underbrace{(\cancel{F} \vee s)}_{s} \underset{\text{"}F \vee \text{algo"}}{=} (p \wedge r) \vee s \underset{\text{distri.}}{=} (p \vee s) \wedge (r \vee s)$$

Notar que: $(p \wedge q) \underset{\text{hip.}}{=} (p \wedge V) = p \quad \therefore [(p \wedge q) \not\Longleftrightarrow (r \Longleftrightarrow s)]$

$\Longleftrightarrow [p \not\Longleftrightarrow (r \Longleftrightarrow s)]$

Dividamos en casos (dividir para vencer)

<u>Caso $p = V$</u> $p = V \Rightarrow (p \wedge q) = V \Rightarrow (r \Longleftrightarrow s) = F \Rightarrow (r \not\Longleftrightarrow s)$

$\Rightarrow (p \vee s) \wedge \underbrace{(r \vee s)}_{V} \Rightarrow (V \vee s) \wedge V \Rightarrow V \wedge V \Rightarrow V$

<u>Caso $p = F$</u> $p = F \Rightarrow (p \wedge q) = F \Rightarrow (r \Longleftrightarrow s) = V \Rightarrow (r \Longleftrightarrow s)$

$\Rightarrow \underbrace{(\underbrace{p}_{F} \vee s)}_{s} \wedge (r \vee s) \Rightarrow s \wedge (r \vee s) \underset{\text{distri}}{\Rightarrow} \underbrace{\underbrace{(s \wedge r)}_{s\ (s=r)} \vee \underbrace{(s \wedge s)}_{s}}_{s}$

$\therefore ① = s$ Pero recordemos cuanto es ②

$② = [\underbrace{p}_{F} \vee \underbrace{(r \wedge s)}_{s}] = s$ (en este caso)

$\therefore (① \Rightarrow ②) \Longleftrightarrow (s \Rightarrow s)$ que, trivialmente, es V

Hemos demostrado que $(① \Rightarrow ②) = V$ siempre.

q.e.d.

P3. (a) $\bar{r} = \sim\left[(\forall x)(p(x) \Rightarrow q)\right] = (\exists x)\left[\sim(\bar{p} \vee q)\right]$

$$\boxed{\bar{r} = (\exists x)(p \wedge \bar{q})}$$

$\bar{s} = \sim\left\{\left[(\forall x)\ p(x)\right] \Rightarrow q\right\} = \sim\left\{\left[(\exists x)\ \overline{p(x)}\right] \vee q\right\}$

$$\boxed{\bar{s} = \left\{\left[(\forall x)\ p(x)\right] \wedge \bar{q}\right\}}$$

(b) ①: $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q)$

②: $\left[(\forall x)\ p(x)\right] \Rightarrow q$

Probaremos que ① $\Rightarrow$ ② ya que ① dice que $(p(x) \Rightarrow q)$ es Ⓥ independiente del x que escojamos, mientras que ② pide que $\forall x$ que cumpla $p(x)$, tengamos q.

Demostremos ① $\Rightarrow$ ② por absurdo. i.e. ¿Qué pasaría si tuviéramos ① y NO tuviéramos ②

$\sim$② $= \left[(\forall x)\ p(x)\right] \wedge \bar{q}$ $\Rightarrow$ Como estamos demostrando por absurdo, es un hecho que $\sim$② = Ⓥ

$\therefore \left[(\forall x)\ p(x)\right] =$ Ⓥ ; $q =$ Ⓕ

Por otro lado,

① $= (\forall x)(p(x) \Rightarrow q) = (\forall x)(\overline{p(x)} \vee q)$ $\Rightarrow$ Nuevamente asumimos ésto Ⓥ para analizar posibles contradicciones.

$\therefore (\forall x)($o $p(x) =$ Ⓕ o bien $q =$ Ⓥ$)$

Pero por $\sim$② teníamos $q =$ Ⓕ $\therefore$ solo nos queda que $\left[(\forall x)\ p(x)\right] =$ Ⓕ

Pero ésto se contradice con $\sim$② $\therefore$ no pueden existir ① y $\sim$② a la vez $\Rightarrow \left[(① \Rightarrow ②) \Leftrightarrow Ⓥ\right]$ ////

Ahora analicemos ② $\Rightarrow$ ① para asegurarnos de que ① $\not\Leftrightarrow$ ②

Demostremos ② $\not\Rightarrow$ ① por contraejemplo:

Sean: $p(x) =$ "$x \in \mathbb{N}$ pertenece a A"

$q =$ "x es divisible por 2"

$A = \{2, 4, 5\}$

Notar que: $[(\forall x)\ p(x)] =$ Ⓕ ya que existen $x \in \mathbb{N}$ t.q $x \notin A$

Ej: 6

$\therefore$ ② = Ⓥ por vacuidad (Ⓕ $\Rightarrow$ Ⓟ) independientemente del valor de verdad de q.

Si ② $\Rightarrow$ ① y $\therefore$ ② $\Leftrightarrow$ ①, ① debería ser cierta en todos los casos (incluyendo éste en particular), pero ① = Ⓕ aquí, ya que

$(\forall x)$ en los $\mathbb{N}$ no tendremos que si $x \in A$, entonces x es par, 5 no cumple ésto.

Hemos encontrado un contraejemplo $\therefore$

$$① \Rightarrow ② \quad \wedge \quad ② \not\Rightarrow ①$$

q.e.d.

Rodolfo Núñez

Dudas a:

RODO.NUNEZ.V@GMAIL.COM