Rodolfo Núñez | Auxiliar 2 | 5/4/2010

Intro. al álgebra (MA1101)

P1 (a) (1) P.D.Q. $(B\setminus A)\subseteq C \iff C^c \subseteq (B^c\cup A)$

$(B\setminus A) \underset{(\text{def})}{=} B\cap A^c \quad \therefore \underbrace{(B\cap A^c)}_{D \text{ (simple notación)}} \subseteq C \iff D\subseteq C$

$\underset{(\text{prop})}{\iff} C^c \subseteq D^c \underset{(\text{simple def. de } D)}{=} (B\cap A^c)^c \underset{\text{Ley de De morgan}}{=} (B^c\cup A)$ *Notar que no es necesario dividir en casos $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$ ya que trabajamos SOLO con equivalencias y no simples implicancias.

$C^c \subseteq (B^c\cup A)$ *Notar analogía de $(D\subseteq C \iff C^c\subseteq D^c)$ con $(a\le b \iff -b\le -a)$

q.e.d.

(2) P.D.Q. $(B\setminus A)\subseteq C \Rightarrow (D\setminus C)\subseteq (D\setminus B)\cup A$

$(B\setminus A)\subseteq C \underset{\text{por (1)}}{\Longrightarrow} C^c \subseteq (B^c\cup A)$ / $D\cap$ *Nota: $\cap$ es conmutativo $\therefore \cap D$ es lo mismo que $D\cap$, pero en un caso general, si aplicamos $\circledast D$ (con $\circledast$ una operación cualquiera) no es necesariamente igual $\circledast D$ a $D\circledast$ ($\circledast$ debe conmutar para ello)

$\iff D\cap C^c \subseteq D\cap (B^c\cup A)$ *Nota: Es muy importante el paréntesis.

por def de $\setminus$ y distri.

$\iff (D\setminus C) \subseteq (D\cap B^c)\cup(D\cap A)$ *Notemos que tenemos CASI lo que nos piden, solo debemos transformar $D\cap A$ en A, pero como tenemos $\subseteq$ y no $=$, podemos mayorar o acotar, al igual que en $\mathbb{R}$ con $\le$. Si le "sumamos algo" al lado derecho sigue siendo mayor $\therefore$ Como $(D\cap A)\subseteq A$

$(D\cap A)\subseteq D$

podemos cambiar $(D\cap A)$ por A, ya que el lado derecho seguirá siendo mayor que $(D\setminus C)$. Si exageramos podemos unirle Universo y seguirá siendo cierto ya que

$$X \subseteq U \quad \forall X \Rightarrow \text{en particular } (D\setminus C) \subseteq U$$

$$\therefore\ (D\setminus C) \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{def. de } \setminus)}}{(D\setminus B)} \cup (D\cap A) \subseteq (D\setminus B) \cup \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{mayoras})}}{A}$$

Por transitividad $\Rightarrow (D\setminus C) \subseteq (D\setminus B) \cup A$ q.e.d

(b) P.D.Q. $A\cup B = A\cap C \Longleftrightarrow B\subseteq A \wedge A\subseteq C$

$\Leftarrow|$ $B\subseteq A \quad \wedge \quad A\subseteq C$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$A\cup B = A \qquad A\cap C = A \quad \Rightarrow A\cup B = A\cap C$$

$\Rightarrow|$ Por contradicción, si tuviéramos $B\nsubseteq A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ojo}}}{\vee} A\nsubseteq C$
y además $A\cup B = A\cap C$

$\underline{B\nsubseteq A|}$ $\quad B\nsubseteq A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aplicamos } \cup A}}{\Longleftrightarrow} B\cup A \nsubseteq \overbrace{A\cup A}^{A} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótesis}}}{\Longleftrightarrow} A\cap C \nsubseteq A$

$\Rightarrow \underbrace{A\nsubseteq A}_{↯} \wedge C\nsubseteq A$

$\underline{C\nsubseteq A|}$ análogamente $C\nsubseteq A \Longleftrightarrow A\cap C \nsubseteq \overbrace{A\cap A}^{A} \Longleftrightarrow A\cap C \nsubseteq A$

$\Rightarrow \underbrace{A\nsubseteq A}_{↯} \wedge C\nsubseteq A$ *Notar que c/u por separado contradice, no es necesario tener $B\nsubseteq A \wedge A\nsubseteq C$

$\therefore$ Debemos tener $B\subseteq A \wedge A\subseteq C$ q.e.d.

P2) $A, B \subseteq U$; $C = (A\cup B)^c$

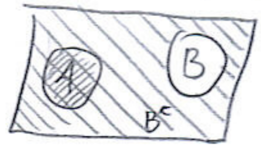
P.D.Q. $(A\Delta B)\Delta C = A\cup B\cup C \iff A\cap B=\emptyset$

*Notación: Universo := Ⓤ

↑ Esto significa que definimos algo (:=)

$\Leftarrow$) $(A\Delta B)\Delta C = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)\Delta C = [(A\cap B^c)\cup(B\cap A)]\Delta C$

Como $A\cap B=\emptyset \Rightarrow A\cap B^c = A$



Análogamente, $B\cap A^c = B$

$$\Rightarrow (A\Delta B)\Delta C = (A\cup B)\Delta C = \underbrace{[(A\cup B)\cap \underbrace{C^c}_{(A\cup B)\text{ (por def)}}]}_{(A\cup B)} \underset{\cup}{\cup} \underbrace{[C\cap(\underbrace{A^c\cap B^c}_{C\text{ (por def)}})]}_{C}$$

$\Rightarrow (A\Delta B)\Delta C = A\cup B\cup C$

$\Rightarrow$) $(A\Delta B)\Delta C = [(A\cap B^c)\cap(B\cap A^c)]\Delta(A\cup B)^c$

$$\{\underbrace{[(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)]\cap(A\cup B)}_{①}\}\cup\{\underbrace{(A\cup B)^c\cap[(A^c\cup B)\cap(B^c\cup A)]}_{②}\}$$

$$① = \underbrace{[(A\cup B)\cap \underbrace{(A\cup A^c)}_{U}\cap\underbrace{(B^c\cup B)}_{U}\cap(B^c\cup A^c)\cap(A\cup B)]}$$

$$① = [(A\cup B)\cap(B^c\cup A^c)] =$$

$$② = \{\underbrace{(A\cup B)^c}_{C}\cap\underbrace{[\underbrace{(A^c\cap B^c)}_{C}\cup\underbrace{(A^c\cap A)}_{\emptyset}\cup\underbrace{(B\cap B^c)}_{\emptyset}\cup(B\cap A)]}\}$$

$$= C \cap [C\cup(B\cap A)]$$

$$= (C\cap C)\cup[C\cap(B\cap A)] = C\cup[(A\cup B)^c\cap(B\cap A)]$$

$② = C \cup \underbrace{[A^c \cap B^c \cap B \cap A]}_{\emptyset}$

$\Rightarrow (A \Delta B) \Delta C = ① \cup ②$

$\Leftrightarrow [(A \cup B) \cap (B^c \cup A^c)] \cup C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(por hip.)}}}{=} A \cup B \cup C$

pero la única manera para que ésto ocurra es:

$(B^c \cup A^c) = U \Leftrightarrow (B^c \cup A^c)^c = \emptyset$

$\Leftrightarrow B \cap A = \emptyset$ q.e.d.

P3/ $U \neq \emptyset$; $A \subseteq U$

P.D.Q. $[(\forall X, y \in P(U))(A \cup X = A \cup y \Rightarrow X = y)]$

$\Longrightarrow A = \emptyset$

Probemos ésto por contradicción:

si $A \neq \emptyset$, $\exists X, y \in P(U)$ t.q. $X, y \subseteq A$

$\Rightarrow A \cup X = A \cup y$, pero $\not\Rightarrow X = y$

Un buen contraejemplo sería

$X = \emptyset$, $y = A$

Tenemos que $A \cup \emptyset = A = A \cup A$ pero claramente

$A \neq \emptyset$ (por suposición) q.e.d.

*Nota: Recuerden que se debe cumplir $\forall X, y$ ∴ basta encontrar 1 que no lo cumpla para llegar a una afirmación falsa y a una contradicción

P4.) (a) $A, B \subseteq U$

P.D.Q. $A \cap B = \emptyset \iff \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow$) $A \cap B = \emptyset \iff \nexists\ x \neq \emptyset \,/\, x \in A \wedge x \in B$

$\Rightarrow \forall$ cjto. $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$; $\nexists\ X \neq \{\emptyset\} \,/\, X \subseteq A' \wedge X \subseteq B'$

* Notar que $\{\emptyset\} \subseteq A \quad \forall A$ cjto

* Notar que $A' \in \mathcal{P}(A)$ y $A' \subseteq A$ ya que A' es subcjto de A

$\therefore$ pertenece al cjto de todos los subcjtos de A

* Ojo $A' \in A$ es falso al igual que $A' \subseteq \mathcal{P}(A)$

$\mathcal{P}(A)$ es cjto de subcjtos, cada subcjto de A es un ELEMENTO de $\mathcal{P}(A)$.

* Pueden ver A = "cjto de países del mundo" y

$\mathcal{P}(A)$ = "cjto de posibles tratados con Chile"

$A' = \{$Chile, Argentina, Canadá, Francia$\} \subseteq A$

y no $A' \subseteq \mathcal{P}(A)$ t.q

$A' = \{\{$Chile$\}, \{$Chile, USA$\}, \{$Canada$\}, \{$Mexico, Brasil$\}\}$

Las opciones de tratados serían:

- Chile tiene tratado con Chile
- Chile y USA tienen tratado con Chile
- Canadá tiene tratado con Chile
- Mexico y Brasil tienen tratado con Chile

Ahora lo importante

$\emptyset$ = "ningun país en el cjto" ; $\{\emptyset\}$ = "ningun país tiene tratado con Chile"

Inrivto, ¡$\emptyset \neq \{\emptyset\}$!

Luego de este paréntesis, volvamos a lo nuestro:

$\forall$ cjto $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$; $\nexists X = \{\emptyset\} / X \subseteq A' \wedge X \subseteq B'$

$\Rightarrow \nexists X \neq \{\emptyset\} / X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$

$\therefore \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$ * Nota: Mucho ojo con el cambio de $\emptyset$ a $\{\emptyset\}$

$\Leftarrow$] $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

$\Leftrightarrow \nexists X \neq \{\emptyset\} / X \subseteq A' \subseteq A \wedge X \subseteq B' \subseteq B$

* Notar que, en particular, X puede ser un cjto de un solo elemento $\neq \emptyset$, con lo cual logramos pasarnos a los cjtos que queremos.

$\Rightarrow \nexists x \neq \emptyset / x \in A' \subseteq A \wedge x \in B' \subseteq B$

En particular, tendremos

$\nexists x \neq \emptyset / x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ q.e.d.

(b) $A * B = A^c \cap B^c$; U; $F \subseteq \mathcal{P}(U)$

$\forall A, B \in F$, $(A * B) \in F$ $\neq \emptyset$

Si $A, B \in F$, Demuestre

(1) P.D.Q. $A^c \in \mathcal{F}$

$A \in \mathcal{F} \therefore A * A \in \mathcal{F}$; $A * A = A^c \cap A^c = A^c$

$\Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$ q.e.d.

(2) P.D.Q. $A \cap B \in \mathcal{F}$

Si $A, B \in \mathcal{F} \underset{\text{por}(1)}{\Longrightarrow} A^c, B^c \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c * B^c \in \mathcal{F}$

Como $A^c * B^c = A \cap B \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ q.e.d.

(3) P.D.Q. $A \cup B \in \mathcal{F}$

$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A * B = A^c \cap B^c \in \mathcal{F} \underset{\text{por}(1)}{\Longrightarrow} A \cup B \in \mathcal{F}$

q.e.d.

(4) P.D.Q. $A \Delta B \in \mathcal{F}$

$$A \Delta B = \underbrace{(\underset{\mathcal{F}}{A} \cap \underset{\mathcal{F}\ \text{por}(1)}{B^c}) \cup (\underset{\mathcal{F}}{B} \cap \underset{\mathcal{F}\ \text{por}(1)}{A^c})}_{\in \mathcal{F}\ \text{por}(3)}$$

q.e.d.

(5) P.D.Q. $\emptyset \in \mathcal{F}$; $U \in \mathcal{F}$

Por def de $\emptyset \Longrightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$ ($\emptyset \in A$ / $\forall A$ cjto)

y por (1) $\Longrightarrow U \in \mathcal{F}$ q.e.d.

Rodolfo Núñez

Dudas a:

RODO.NUNEZ.U@GMAIL.COM

¡Mucho Éxito en la U. y en la vida!