Rodolfo Niñez | Aux 3 | 9/4/2010

Intro al Álgebra

P1/ $f: \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q} / \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$n \longmapsto f(n) = \frac{1}{2n}$$

$$g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \ / \ \forall q \in \mathbb{Q}$$

$$q \longmapsto g(q) = \frac{q}{2}$$

Determine si f y g son inyectivas, epiyec. o biyec.

f / Epi/ $n \longmapsto f(n) = \frac{1}{2n} = y$

sea $y \in \mathbb{Q}$ ¿$\forall y \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ t.q. $y = \frac{1}{2n}$?

no, basta ver que $\forall y \geq 1$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ej: para $n = 10$

$\therefore$ NO es epiyectiva $\qquad 10 = \frac{1}{2n} \Rightarrow n = \frac{1}{20} \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Iny/ si $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \frac{1}{2n_1} = \frac{1}{2n_2} \Rightarrow \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} \Rightarrow n_1 = n$

$\therefore$ SI es inyectiva *NOTA: sabemos que $n_1, n_2 \neq 0$ $\therefore$ podemos multiplicar cruzado. Si no sabemos esto, no debemos hacerlo.

g / Epi/ $q \longmapsto g(q) = \frac{q}{2} = y$

sea $y \in \mathbb{Q}$ ¿$\forall y \in \mathbb{Q}, \exists q \in \mathbb{Q}$ t.q. $y = \frac{q}{2}$?

sí, ese q será $y = \frac{q}{2} \Rightarrow q = 2y \in \mathbb{Q}$ $\left(y = \frac{2y}{2} = y \checkmark\right)$

$\therefore$ SI es epiyectiva

Iny/ si $g(q_1) = g(q_2) \Rightarrow \frac{q_1}{\cancel{2}} = \frac{q_2}{\cancel{2}} \Rightarrow q_1 = q_2$

$\therefore$ SI es inyectiva $\Longrightarrow$ g es biyectiva

P2./ $f: \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

(a) P.D.Q. $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}\} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

sea $y = \dfrac{2x+1}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = 2x+1$

$$-2y - 1 = (2-y)x$$

$$\Rightarrow x = -\left(\frac{1+2y}{2-y}\right) \Rightarrow y \neq 2$$

$\Rightarrow f(x) \neq 2$ (si $x \to \infty$, $f(x) \to 2$)

$\therefore$ la imagen no contendrá al $\{2\}$ $\therefore$ NO es epiyectiva q.e.d.

(b) P.D.Q. f inyectiva

si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{2x_1+1}{x_1-2} = \dfrac{2x_2+1}{x_2-2}$

$\Rightarrow \cancel{2x_1x_2} - 4x_1 + x_2 \cancel{-2} = \cancel{2x_2x_1} - 4x_2 + x_1 \cancel{-2}$

$\Rightarrow x_2 + 4x_2 = x_1 + 4x_1 \Rightarrow \cancel{5}x_2 = \cancel{5}x_1 \Rightarrow x_2 = x_1$ q.e.d.

(c) sea $g: \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$x \longmapsto g(x) = f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

P.D.Q. g es biyectiva y encontrar su inversa

- f es inyectiva $\therefore$ g también lo será análogamente.
- f no era epiyec. ya que no podía valer 2, pero era el único problema (pto en el que se indefinía). Ahora que lo sacamos del recorrido, g recorrerá todo el Rec. $\therefore$ será epiy. y $\therefore$ biyec

$\Rightarrow \exists\, g^{-1}$ y por parte (a) será $g^{-1}(x) = \dfrac{1+2x}{x-2}$

Con $g^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{2\}$

q.e.d.

P3/ $a, b \in \mathbb{R}$ / $L_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax + b\}$

$\uparrow$

1 recta en $\mathbb{R}$ de pendiente a y coef. de pos. n

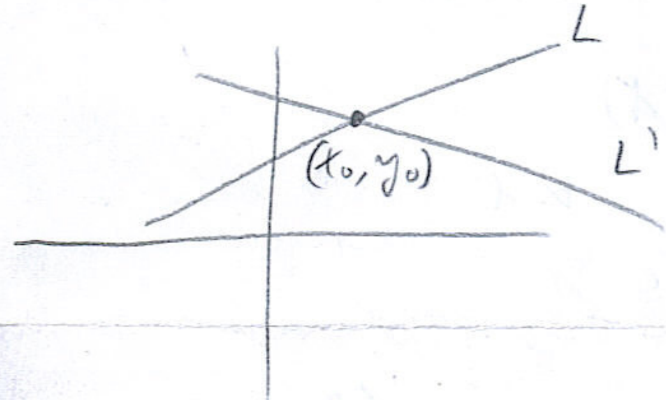
$\mathcal{L} = \{L_{a,b} \subset \mathbb{R}^2 / a, b \in \mathbb{R}\}$ → gto de todas las rectas en $\mathbb{R}^2$ con pendiente $\in \mathbb{R}$ y coef. pos. $\in \mathbb{R}$

$\mathcal{H} = \{(L, L') \in \mathcal{L}^2 / L \cap L' \neq \emptyset, L \neq L'\}$

↳ gto de los pares de rectas secantes que son $\neq$s

$\Psi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \Psi((L, L')) = (x_0, y_0)$

t. q. (x_0, y_0) es el único pto. de intersección de L y L'



sea (x_0, y_0) un pto en $\mathbb{R}^2$, veamos que podemos construir 2 rectas que se intersectan en (x_0, y_0)

Para probar que $\exists (L, L')$ t.q. $\Psi((L, L')) = (x_0, y_0)$ basta encontrar un par de rectas que cumplan que contienen a x_0 e y_0, con pendientes $m \neq m'$.

Sean las rectas $L: y = -x + x_0 + y_0$; $L': y = x - x_0 + y_0$

veamos que $(x_0, y_0) \in L$: $y_0 = -x_0 + x_0 + y_0 \iff y_0 = y_0$ //

además, $(x_0, y_0) \in L'$: $y_0 = x_0 - x_0 + y_0 \iff y_0 = y_0$ //

y como $m = 1$, $m' = -1 \Rightarrow m \neq m'$ ∴ Encontramos un (L, L') t. q. $(x_0, y_0) \in L$; $(x_0, y_0) \in L' \Rightarrow (x_0, y_0) \in L \cap L'$ y $m \neq m' \Rightarrow L \neq L'$ y además, $\Psi((L, L')) = (x_0, y_0)$ q.e.d.

P4/ U ; $A, B \subset U$

$$f : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$$

$$X \longmapsto f(X) = A \cap (B \cup X) = (A \cap B) \cup (A \cap X)$$

(a) P.D.Q. $f(f(X)) = f(X) \quad \forall X \in \mathcal{P}(U)$

$f(X) = A \cap (B \cup X) \Rightarrow f(f(X)) = (A \cap B) \cup (A \cap [(A \cap B) \cup (A \cap X)])$

$= (A \cap B) \cup [(A \cap A \cap B) \cup (A \cap A \cap X)] = (A \cap B) \cup [(A \cap B) \cup (A \cap X)]$

$= (A \cap B) \cup ((A \cap B) \cup (A \cap X)) = (A \cap B) \cup (A \cap X)$ q.e.d.

(c) $A \neq U \vee B \neq \emptyset$ P.D.Q. f NO es inyectiva   notar que estamos restando gitos.

$\underline{A \neq U}$ $f(X_1) = f(X_2) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap X_1) = (A \cap B) \cup (A \cap X_2)$ / $(A \cap B)^c \cap$

$\Rightarrow (A \cap B)^c \cap [(A \cap B) \cup (A \cap X_1)] = (A \cap B)^c \cap [(A \cap B) \cup (A \cap X_1)]$

*ojo, el paréntesis es importante, le restamos a todo

$= \emptyset \cup (A \cap X_1) = \emptyset \cup (A \cap X_2) = A \cap X_1 = A \cap X_2$ (notar que aquí ya no podemos restar)

Si $A \neq U$ podemos tomar $A \subset X_1 \subset X_2 \subset U$ $\therefore X_1 \neq X_2$
(puede ser inyec. pero no tiene por qué serlo para todos) f.l.d.

El $B \neq \emptyset$ está más adelante.

* Otras formas de proceder:
- Por casos $\left(\underset{\text{(Caso 1)}}{A \neq U \wedge B = \emptyset} \,/\, \underset{\text{(Caso 2)}}{A = U \wedge B \neq \emptyset} \,/\, \underset{\text{(Caso 3)}}{A \neq U \wedge B \neq \emptyset}\right)$
  El caso $A = U \wedge B = \emptyset$ no interesa.
- Usando la dif. de f (lo que hizo Roberto en clases)
- Etc.

P4 / (c) $A \neq U$ P.D.Q. f no es sobreyectiva.

sea $A \cap (B \cup X) = (A \cap B) \cup (A \cap X)$

Notemos que si $A \neq U$, $f(X) \neq U \quad \forall X$

ya que $(A \cap B) \subseteq A$ y $(A \cap X) \subseteq A$

$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap X) \subseteq A \subsetneq U$ $\therefore$ f no es sobreyec

q.e

(b) $B \neq \emptyset$

$(A \cap B) \cup (A \cap X_1) = (A \cap B) \cup (A \cap X_2)$

ya vimos que si $A \neq U$, f no es inyectiva $\therefore$

sea $A = U$ $(A \cap B) = (U \cap B) = B$

$\Rightarrow B \cup (U \cap X_1) = B \cup (U \cap X_2) \Leftrightarrow B \cup X_1 = B \cup X_2$

¿tendremos $X_1 = X_2$ siempre?

NO, porque B puede ser U y $X_1 \subsetneq X_2$

y tendremos $B \cup X_1 = B \cup X_2$ igual

$\therefore$ f no es necesariamente inyectiva.

q.e.d.

P5/ $E \neq \emptyset$; $\forall A \subseteq E$

$$\delta_A : E \longrightarrow \{0,1\}$$
$$x \longmapsto \delta_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

(a) $\delta_E : E \longrightarrow \{0,1\}$ $\qquad$ $\delta_\emptyset : E \longrightarrow \{0,1\}$

$x \longmapsto \delta_E(x) = 1$ $\qquad$ $x \longmapsto \delta_\emptyset(x) = 0$

(b) P.D.Q. $(\forall x \in E)\ \delta_{A\cap B}(x) = \delta_A(x)\,\delta_B(x)$

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \Rightarrow \delta_A(x)\,\delta_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \vee x \notin B \end{cases} = \delta_{A\cap B}(x)$$

$$\delta_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

q.e.d.

(c) $C, D \subseteq E$ PDQ. $C \subseteq D \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ \delta_C(x) \leq \delta_D(x)$

$\Rightarrow /$ $\delta_C = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \subseteq D \\ 0 & \text{si } x \notin C \subseteq D \end{cases}$ δ: si $x \in C \Rightarrow x \in D$

pero si $x \in D \not\Rightarrow x \in C$

$\Rightarrow \delta_C(x) \leq \delta_D(x)\ (\forall x \in E)$

$\Leftarrow /$ $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)\ (\forall x \in E)$

$\Rightarrow \forall x \in C \Rightarrow x \in D$

$\Rightarrow C \subseteq D$ q.e.d.