Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Soluciones Guía de Problemas Semana 4

MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliares: Roberto Castillo, Rodolfo Núñez
Lunes 19 de Abril de 2010

P1.-
Dado que $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$, se tiene que $f(x) = 3x + 2$. En efecto:

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= 3\frac{x-2}{3} + 2 \\ &= x - 2 + 2 \\ &= x\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f) &= \frac{3x + 2 - 2}{3} \\ &= \frac{3x}{3} \\ &= x\end{aligned}$$

Ahora se observa que:

$$g \circ f(x) = \frac{3x+2}{9x^2 + 12x + 5} = \frac{3x+2}{(3x+2)^2 + 1}$$

De lo que se concluye que $g = \frac{x}{x^2+1}$

P2.-

(a) $\Rightarrow$ Si f es inyectiva se tiene que como g es biyectiva, en particular es inyectiva y la composición de funciones inyectivas es, asimismo, inyectiva.
$\Leftarrow$ Si $f \circ g$ es inyectiva. Dados x_1,x_2 $\in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, por ser g biyectiva existen y_1,y_2 $\in A$ con $x_1 = g(y_1)$ y $x_2 = g(y_2)$. Se tiene entonces que $f \circ g(y_1) = f \circ g(y_2)$ y como $f \circ g$ es inyectiva, $y_1 = y_2$, por ser g una función, esto implica que $x_1 = x_2$.

(b) $\Rightarrow$ Si f es sobreyectiva, como g es biyectiva, en particular es sobreyectiva y la composición de funciones sobreyectivas es, asimismo, sobreyectiva.
$\Leftarrow$ Si $g \circ f$ es sobreyectiva, dado que g es biyectiva, existe su inversa g^{-1} y ésta es biyectiva. Observando que $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$, se concluye que f es sobreyectiva por ser composición de funciones sobreyectivas.
Nota: Observe que este mismo argumento puede ser utilizado para probar $\Leftarrow$ en la parte (a).

P3.-

(a) Se tiene que claramente la función $\bar{f}$ va de A en $\mathbb{R}$, luego basta probar que se cumple que $\bar{f}(0)+\bar{f}(1)+\bar{f}(2)+\bar{f}(3)=0$, veamos que esto es cierto:

$$\begin{aligned}\bar{f}(0)+\bar{f}(1)+\bar{f}(2)+\bar{f}(3) &= f\circ T(0)-f(0)+f\circ T(1)-f(1)+f\circ T(2)-f(2)+f\circ T(3)-f(3)\\ &= f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+f(3)-f(2)+f(0)-f(3)\\ &= 0\end{aligned}$$

(b) Se tiene que si se prueba que existe Δ^{-1} la inversa de Δ, demostrando que efectivamente es la inversa, se concluye que Δ es biyectiva (y se tiene su inversa).
Se define la función $\Gamma: I \to D$ tal que $\Gamma(f)$ satisface que $\Gamma(f)(0)=-f(0)-f(1)-f(2)-f(3)$, $\Gamma(f)(1)=-f(1)-f(2)-f(3)$, $\Gamma(f)(2)=-f(2)-f(3)$, $\Gamma(f)(3)=-f(3)$. Es claro que para $f\in I$, $\Gamma(f)(0)=0$, luego $\Gamma(f)\in D$. Se ve que $\Gamma\circ\Delta = id = \Delta\circ\Gamma$:

$$(\Gamma\circ\Delta)(f)(0)=\Gamma(\bar{f})(0)=-\bar{f}(0)-\bar{f}(1)-\bar{f}(2)-\bar{f}(3)=0=f(0)$$

$$(\Gamma\circ\Delta)(f)(1)=\Gamma(\bar{f})(1)=-\bar{f}(1)-\bar{f}(2)-\bar{f}(3)=f(1)$$

$$(\Gamma\circ\Delta)(f)(2)=\Gamma(\bar{f})(2)=-\bar{f}(2)-\bar{f}(3)=f(2)$$

$$(\Gamma\circ\Delta)(f)(3)=\Gamma(\bar{f})(3)=-\bar{f}(3)=f(3)$$

Con lo que $\Gamma\circ\Delta=id$. Análogamente se prueba que $\Delta\circ\Gamma=id$

P4.-

(a) Si $h\in\mathcal{F}$, h es biyectiva y como $f\in\mathcal{F}$, f también es biyectiva, luego su composición es biyectiva y es función de E en E, luego $h\circ f\in\mathcal{F}$.

(b) Considerando $g\in\mathcal{F}$, se ve que $g\circ f^{-1}$ pertenece a $\mathcal{F}$, pues g es biyectiva y f^{-1} existe y es biyectiva, por ser f biyectiva. Dado que $\varphi_f(g\circ f^{-1})=g\circ f^{-1}\circ f=g$, se concluye que φ_f es sobreyectiva.
Falta probar la inyectividad, para ello se consideran $h_1,\ h_2\in\mathcal{F}$ tales que $\varphi_f(h_1)=\varphi_f(h_2)$, esto es equivalente a decir que $h_1\circ f=h_2\circ f$, como f es biyectiva, se puede aplicar $\circ f^{-1}$ a ambos lados de esta igualdad (pues f^{-1} existe) y se obtiene que $h_1=h_2$
Nota: Un camino alternativo para probar la biyectividad de φ_f consiste en demostrar que tiene inversa. Para ello, en este caso, bastaría probar que $\varphi_{f^{-1}}$.

P5.-
Hay que mostrar que la inversa de la función $f\circ g$ es la función $g^{-1}\circ f^{-1}$. Para esto:

$$(f\circ g)\circ(g^{-1}\circ f^{-1})=f\circ id\circ f^{-}1=f\circ f^{-1}=id$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})\circ(f\circ g)=g^{-1}\circ id\circ g=g^{-1}\circ g=id$$

Con lo que se prueba que $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

P6.-
Se tiene que $g^{-1}(\mathbb{Z})=\{x\in\mathbb{Q}|\frac{x}{2}\in\mathbb{Z}\}=\{2z|z\in\mathbb{Z}\}$ y que $(g\circ f)^{-1}(\mathbb{Z})=\{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}|\frac{1}{4n}\in\mathbb{Z}\}=\emptyset$.

P7.-
Se ha de ver que esto es cierto primero con la diferencia de conjuntos. Sean A, $B \subseteq X$, sea $y \in f(A)\backslash f(B)$, se tiene que entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ y además $(\forall z \in B) f(z) \neq y$ con lo que $x \notin B$, es decir $x \in A\backslash B$, por lo tanto $y \in f(A\backslash B)$ con lo que se tiene que $f(A)\backslash f(B) \subseteq f(A\backslash B)$.
Para probar la igualdad en el caso f inyectiva, basta probar que se cumple en este caso $f(A\backslash B) \subseteq f(A)\backslash f(B)$. Sea $y \in f(A\backslash B)$, se tiene entonces que existe $x \in A\backslash B$ tal que $f(x) = y$. Luego se sabe que $x \in A$ y, por tanto, $y \in f(A)$. Se ve que si $y \in f(B)$, entonces existiría $\bar{x} \in B$ tal que $f(\bar{x}) = y (= f(x))$, y por ser f inyectiva $\bar{x} = x$, lo que es una contradicción, pues se sabe que $x \notin B$, luego $y \notin f(B)$ y se concluye que $y \in f(A)\backslash f(B)$.
Para probar que se cumple para la diferencia simétrica, basta notar que

$$A \Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

y usando que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ y las propiedades previamente probadas para $\backslash$, se concluye.

P8.-
Si $f(B)\backslash f(A) = \emptyset$, entonces se observa que siempre $f(A) \subseteq f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$, luego basta probar que $f(A \cup B) \subseteq f(A)$, se tiene que dado $x \in f(A \cup B)$, como $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, entonces $x \in f(A) \vee x \in f(B)$, como $f(B)\backslash f(A) = \emptyset$, se tiene que $f(B) \subseteq f(A)$, luego se tiene que necesariamente $x \in f(A)$. Se concluye que $f(A \cup B) = f(A)$.