Rodolfo Núñez | Auxiliar 6 | 3/5/2010

Intro. al Álgebra (MA1101)

P1/ PDQ. $\forall n \in \mathbb{N} / n \geq 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$

Probemos esto por inducción:

n = 1/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{5}{6}$ ✓

hip/ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$

P.D.Q./ $\displaystyle\underbrace{\sum_{k=1}^{(n+1)+1} \frac{1}{(n+1)+k}} \leq \frac{5}{6}$

aquí ya creamos lo que queríamos, ahora veamos que el resto no lo hace crecer (es <0)

$$\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{(n+1)+k} = \sum_{k=2}^{n+3} \frac{1}{n+k} = \overbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k}} + \frac{1}{n+n+2} + \frac{1}{n+n+3} - \frac{1}{n+1}$$

traslación de índice para tener lo que queremos dentro de la suma

(*NOTA: Es mejor acomodar lo que está adentro primero y luego solo separar sumas.)

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} + \frac{(2n+3)\cancel{(n+1)} + 2(n+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(n+1)}(2n+3)}{(2n+2)(2n+3)\cancel{(n+1)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} + \frac{2n+3+2n+2-4n-6}{2(n+1)(2n+3)} = \underbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k}}_{\leq \frac{5}{6}} \underbrace{- \frac{1}{2(n+1)(2n+3)}}_{<0}}_{\leq \frac{5}{6}}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{(n+1)+1} \frac{1}{(n+1)+k} \leq \frac{5}{6}$$

q.e.d.

P2.| P.D.Q. $\forall n \geq 1$, $2\cdot 7^n + 3\cdot 5^n - 5$ es divisible por 24

$n=1$| $2\cdot 7^1 + 3\cdot 5^1 - 5 = 14 + 15 - 5 = 24$ ✓

hip| $2\cdot 7^n + 3\cdot 5^n - 5 = 24\cdot K$ (ésto es que sea div. por 24) $(K\in\mathbb{Z})$

P.D.Q.| $2\cdot 7^{n+1} + 3\cdot 5^{n+1} - 5 = 24\cdot K'$ / $K'\in\mathbb{Z}$

$2\cdot 7^{n+1} + 3\cdot 5^{n+1} - 5 = 14\cdot 7^n + 15\cdot 3^n - 5$ *NOTA: Debemos hacer aparecer la hipotesis

$= 2\cdot 7^n + 3\cdot 5^n - 5 + 12\cdot 7^n + 12\cdot 5^n = 24K + 12\underbrace{(\underbrace{7^n}_{\text{impar}} + \underbrace{5^n}_{\text{impar}})}_{\text{par}}$

Como $12\cdot(\text{par})$ es divi. por 24

$\Rightarrow 2\cdot 7^{n+1} + 3\cdot 5^{n+1} - 5 = \underbrace{\underbrace{24K}_{\text{div. por } 24} + \underbrace{12\cdot(\text{par})}_{\text{div. por } 24}}_{\text{div. por } 24} = 24K'$ q.e.d.

P3.| P.D.Q. $(\forall n \geq 10)$ $n^3 < 2^n$

$n=10$| $10^3 = 1.000 < 1.024 = 2^{10}$ ✓ * NOTA: aquí partimos de $n=10$ ya que se debe cumplir $\forall n \geq 10$

hip| $n^3 < 2^n$

P.D.Q.| $(n+1)^3 < 2^{n+1}$

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 < 2^n + 3n^2 + 3n + 1 \overset{\text{PDQ.}}{¿<?} 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$

Doble inducción P.D.Q. $\forall n \geq 10$, $3n^2 + 3n + 1 < 2^n$

$n=10$| $300 + 30 + 1 < 1024$ ✓

hip| $3n^2 + 3n + 1 < 2^n$

P.D.Q.| $3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 < 2^{n+1}$

$3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = \underline{3n^2} + 6n + 1 + \underline{3n} + 3 + \underline{1} < 2^n + 6n + 4$

falta provar que $6n + 4 < 2^n$

Triple inducción P.D.Q. $\forall n \geq 10,\ 6n+4 < 2^n$

$n=10$/ $10 < 1024$ ✓

hip/ $6n+4 < 2^n$.

PDQ./ $6(n+1)+4 < 2^{n+1}$

$$6(n+1)+4 = 6n+4+6 < 2^n + \underbrace{6}_{< 2^n\ \forall n \geq 10} < 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\Rightarrow 6(n+1)+4 < 2^{n+1}$

$\Rightarrow 6n+4 < 2^n$

$\Rightarrow 3n^2+3n+1 < 2^n$

$\Rightarrow n^3+3n^2+3n+1 < 2^{n+1}$

$\Rightarrow n^3 < 2^n$ q.e.d.

*NOTA: hice esto así solo para que vieran que puede haber muchas inducciones en un solo problema. Veamos ahora una forma más corta.

P.D.Q. $n^3+3n^2+3n+1 < 2^{n+1}$.

$n^3+3n^2+3n+1 < n^3+3n^2+3n^2+3n^2$ (ya que $1 < 3n < 3n^2$ Esto es acotar o mayorar)

$= n^3+9n^2 < n^3+n^3$ (ya que $n \geq 10$)

$= 2n^3 < 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$

$\Rightarrow (n+1)^3 < 2^{n+1}$

q.e.d.

P4. $\{a(n)\}_{n\geq 1}$ / $a(2)=a(1)=1 \wedge a(n) = 3[a(n-1)+a(n-2)]+1$

veremos que $a(3n)+a(3n+1)$ es div. por 32

(a) P.D.Q. $a(3n+2)-1 = 2K$ para algún $K \in \mathbb{Z}$

$n=1$/ $a(5)-1 = 3[a(4)+a(3)]+\cancel{1}-\cancel{1} = 3[[3(a(3)+1)+1] + \overbrace{[3(1+1)+1]}^{7}]$

$= 3[[3(7+1)+1]+7] = 3[24+1+7] = 3\cdot 32 = 96$ ✓

$a(1)=a(2)=1$; $a(3)=7$; $a(4)=25$; $a(5)=97$

hip/ $a(3n+2)-1=2K \quad / K\in\mathbb{Z}$

PDQ/ $a(3(n+1)+2)-1=2K' \quad / K'\in\mathbb{Z}$

$a(3(n+1)+2)-1=3\left[3\left(a(3n+4)+a(3n+3)\right)+1\right]-1$

$=9\left[a(3n+4)+a(3n+3)\right]+3-1=9\left[3\left(a(3n+3)+a(3n+2)\right)+1+a(3n+3)\right]+2$

$=9\left[3a(3n+2)+4a(3n+3)+1\right]+2=36\cdot a(3n+3)+27\cdot a(3n+2)+11$

$=\underbrace{36}_{\text{par}}\cdot a(3n+3)+9\underbrace{(3\cdot a(3n+2)-1)}_{\text{par (hip.)}}+\underbrace{20}_{\text{par}}=2K'$

q.e.d.

(b) P.D.Q. $3a(3n+1)+5=8K \quad / K\in\mathbb{Z}$

$n=1$/ $3a(4)+5=80$ ✓

hip/ $3a(3n+1)+5=8\cdot K$

P.D.Q./ $\underbrace{3a(3(n+1)+1)+5}=8K'$

$3a(3n+4)+5=3\left[3\left(a(3n+3)+a(3n+2)\right)+1\right]+5$

$=9\left[a(3n+3)+a(3n+2)\right]+8=9\left[3\left(a(3n+2)+a(3n+1)\right)+1+a(3n+2)\right]+8$

$=9\left[4\cdot a(3n+2)+3\cdot a(3n+1)+1\right]+8=36\,a(3n+2)+27\cdot a(3n+1)+17$

$=\underbrace{9\cdot 4\underbrace{(a(3n+2)-1)}_{\text{par por (a)}}}_{\substack{\text{div. por 8}\\(4\cdot\text{par})}}+9\underbrace{(3a(3n+1)+5)}_{\text{div. por 8 por hip.}}+\underbrace{17-45+36}_{8}=8K'$

q.e.d.

(c) P.D.Q. $a(3n)+a(3n+1)=32K \quad / K\in\mathbb{Z}$

$n=1$/ $a(3)+a(4)=7+25=32$ ✓

hip/ $a(3n)+a(3n+1)=32K \quad / K\in\mathbb{Z}$

P.D.Q./ $a(3(n+1))+a(3(n+1)+1)=32K' \quad / K'\in\mathbb{Z}$

$a(3(n+1))+a(3n+4)$

$= 3\,a(3n+2) + 3(3n+1) + 1 + 3a(3n+3) + 3a(3n+2) + 1$

$= 6a(3n+2) + 3a(3n+1) + 3a(3n+3) + 2$

$= 18\cdot a(3n+1) + 18\cdot a(3n) + 6 + 3\cdot a(3n+1) + 9\cdot a(3n+2) + 9\cdot a(3n+1) + 3 + 2$

$= 18\cdot(a(3n) + a(3n+1)) + 12\cdot a(3n+1) + 27(a(3n+1) + a(3n)) + 9 + 11$

$$= 45\underbrace{(a(3n) + a(3n+1))}_{\text{div. por 32 por hip.}} + \underbrace{4\cdot\underbrace{[3(a(3n+1)) + 5]}_{\text{div. por 8 por (b)}}}_{4\cdot 8k \Rightarrow \text{div. por } 32} - \underbrace{20 + 20}_{0} = 32k'$$

q.e.d.

P5| $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, $\forall n \geq 1$

(a) P.D.Q. $H_{2^k} \leq 1 + k$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$k=1$| : $H_{2^1} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leq 2 = 1+1$ ✓.

hip| $H_{2^k} \leq 1 + k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (i.e. $\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \leq 1 + k$)

P.D.Q.| $H_{2^{k+1}} \leq 1 + (k+1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$H_{2^{k+1}} = H_{2\cdot 2^k} = \sum_{i=1}^{2\cdot 2^k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^k+1}^{2\cdot 2^k} \frac{1}{i} \leq k+1 + \sum_{i=2^k}^{2\cdot 2^k} \frac{1}{i}$

falta ver que $\sum_{i=2^k}^{2\cdot 2^k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} \leq 1$

Mayoremos: $\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{1+2^k} = \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^k+2^k}$ El mayor término es $\frac{1}{2^k+1}$ ∴

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^k+1}}_{2^k \text{ veces}} = \frac{2^k}{2^k+1} \leq 1$$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \leq 1 + k + 1$ q.e.d.

5

(b) P.D.Q. $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1) H_n - n \quad \forall n \geq 1$

$n=1$ / $\sum_{i=1}^{1} H_i = H_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = 1 = (1+1)\cdot 1 - 1$. ✓

hip / $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1) H_n - n$

P.D.Q. / $\sum_{i=1}^{n+1} H_i = ((n+1)+1) H_{n+1} - (n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1} H_i = \sum_{i=1}^{n} H_i + H_{n+1} = (n+1) H_n - n + H_{n+1}$$

$$= (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - n + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} = (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} - n$$

$$= (n+1+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1-n^2-n}{n+1} = ((n+1)+1)\left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right] + \frac{1-n^2-n}{n+1}$$

$$= ((n+1)+1) H_{n+1} - \frac{(n+2)}{n+1} - \frac{(n^2+n-1)}{n+1} = ((n+1)+1) H_{n+1} - \frac{(n^2+2n+1)}{n+1}$$

$$= ((n+1)+1) H_{n+1} - \frac{(n+1)\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}} = ((n+1)+1) H_{n+1} - (n+1)$$

q.e.d.

P6 / P.D.Q. $\forall n \geq 1,\ x \neq 1$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}$$

$n=1$ / $1 + x^{2^0} = 1+x = 1+x \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1}$ ✓

hip / $\underbrace{\prod_{i=1}^{n}}\left(1+x^{2^{i-1}}\right) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}$

notación para serie de multiplicaciones, es como Σ pero en vez de sumar, multiplica.

P.D.Q. / $\prod_{i=1}^{n+1}\left(1+x^{2^{i-1}}\right)=\dfrac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+x^{2^{i-1}}\right)=\frac{x^{2^n}-1}{x-1} \quad /\cdot\ 1+x^{2^n}$$

$$\prod_{i=1}^{n+1}\left(1+x^{2^{i-1}}\right)=\frac{\left(x^{2^n}-1\right)\cdot\left(x^{2^n}+1\right)}{x-1}$$

$$=\frac{\left[\left(x^{2^n}\right)^2-1\right]}{x-1} \quad \text{(suma · diferencia)}$$

$$=\frac{\left[x^{2\cdot 2^n}-1\right]}{x-1}=\frac{\left[x^{2^{n+1}}-1\right]}{x-1} \quad \text{q.e.d.}$$

¡Mucho Éxito!

Dudas a:

RODO.NUNEZ.U@GMAIL.COM

Rodolfo Núñez