Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Soluciones Guía de Problemas Semana 5

MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliares: Roberto Castillo, Rodolfo Núñez
Lunes 26 de Abril de 2010

P1.-
(a) Ver que $\mathcal{R}$ es relación de orden:
Refleja:
Se sabe que $p \wedge p \Leftrightarrow p$, por lo tanto $p\mathcal{R}p$
Antisimétrica:
Sean p, q tales que $(p\mathcal{R}q) \wedge (q\mathcal{R}p)$, se ha de probar que $p \Leftrightarrow q$. Veamos que tienen el mismo valor de verdad.
Si p es V, entonces como $q\mathcal{R}p$, se tiene que $q \wedge p \Leftrightarrow p \Leftrightarrow V$, lo que implica que q debe ser verdadera.
Si p es F, entonces como $p\mathcal{R}q$, se tiene que $q \wedge p \Leftrightarrow q$ y como p es F, $q \wedge p \Leftrightarrow F$, luego q debe ser F. Se concluye que $p \Leftrightarrow q$, y por definición $p = q$.
Transitiva:
Sean p, q, r tales que $p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}r$, se ha de probar que $p\mathcal{R}r$.
Se tiene que $(p \wedge q \Leftrightarrow q) \wedge (q \wedge r \Leftrightarrow r)$,de manera que se tiene:

$$p \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow q \wedge r \Leftrightarrow r$$

es decir $p \wedge r \Leftrightarrow r$, por lo tanto $p\mathcal{R}r$.
(b) Para ver que es de orden total, tomando p, q proposiciones, basta ver que si $\sim (p\mathcal{R}q)$, entonces $q\mathcal{R}p$ (pues cambiando el orden de p y q y con el mismo argumento se ve el otro caso).
Se supone entonces que $\sim (p\mathcal{R}q)$, es decir las proposiciones $p \wedge q$ y q no tienen el mismo valor de verdad. Se tiene que si q es F, entonces $p \wedge q$ también es F, por lo que esto no puede ser. Se tiene entonces que q es V, lo que implica que p es F, y en este caso $p \wedge q$ tiene el mismo valor de verdad que p. Se concluye que la relación es de orden total.

P2.-
(a) Se tiene que la relación es de equivalencia. Para ver que es refleja se observa que para $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$x + y - x - y = 2 \cdot 0$$

y $0 \in \mathbb{Z}$. Para ver que es simétrica, se toman $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2)$ con $a_1, a_2, b_1, b_2 \in ZZ$ observando que entonces $a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, como $-k$ también es un entero, se tiene que $b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 2(-k)$ y así $(b_1, b_2)\mathcal{R}(a_1, a_2)$.
Finalemente para ver que es transitiva, se toman $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2)$ (a través de $k_1 \in \mathbb{Z}$) y $(b_1, b_2)\mathcal{R}(c_1, c_2)$ (relacionados por $k_2 \in \mathbb{Z}$). Se tiene entonces que:

$$a_1 + a_2 - c_1 - c_2 = a_1 + a_2 - b_1 - b_2 + b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$$

Como $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ se tiene que su suma es también entero.
(b) $[(0,0)] = \{(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2 | a_1 + a_2 = 2k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}\} = \{(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2 | a_1 \text{ y } a_2 \text{ tienen la misma paridad }\}$.
Por otro lado:
$[(1,0)] = \{(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2 | a_1 + a_2 = 2k+1, \text{ con } k \in \mathbb{Z}\} = \{(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2 | a_1 \text{ y } a_2 \text{ tienen distinta paridad }\}$
(c) Claramente la unión de ambas clases de equivalencia está contenida en $A = \mathbb{Z}^2$, falta ver la inclusión en el otro sentido. Tomando $(a_1,a_2) \in A$, se tiene que como a_1, a_2 son enteros, o bien son ambos impares, ambos pares o son un par y un impar. En los dos primeros casos, se tiene que $(a_1,a_2) \in [(0,0)]$, y en el segundo caso en que son un par o un impar (independiente de cuál de los dos sea par), $(a_1,a_2) \in [(1,0)]$.
(d) Una biyección entre las clases de equivalecia es asociar a un elemento $(a_1,a_2) \in [(1,0)]$ el elemento $(a_1-1,a_2) \in [(0,0)]$. Es decir considerar la función $f(a_1,a_2) = (a_1-1,a_2)$. Hay que verificar que esta función está bien definida (es decir, que si (a_1,a_2) está en el dominio, (a_1-1,a_2) está en el conjunto de llegada) y que es biyectiva, lo que queda como un ejercicio propuesto (bueno para repasar funciones).

P3.-
Este problema se puede hacer de la manera "habitual" demostrando que se cumplen las propiedades de acuerdo a la definición que se da. O bien es posible recordar que la definición de una relación es como un subconjunto del producto cartesiano (es decir $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) y que $x\mathcal{R}y$ es equivalente a decir $(x,y) \in \mathcal{R}$.
Observando las relaciones de esta manera, es fácil notar que $R_1 \Omega R_2 \Leftrightarrow R_1 \subseteq R_2$, y probar que la inclusión es relación de orden queda como un ejercicio. Para ver que es orden parcial, basta ver que dos relaciones disjuntas ($R_1 \cap R_2 = \emptyset$) no están relacionadas en ninguno de los dos sentidos.

P4.-
(a) Se tiene que es relación de equivalencia, es refleja porque para $x \in \mathbb{Q}^+$ $\frac{x}{x} = 1 = p^0$. Se tiene que es simétrica, porque si $x,y \in \mathbb{Q}^+$ $x\Omega_p y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = p^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$, se tiene que $-\alpha \in \mathbb{Z}$, luego se tiene que $\frac{y}{x} = p^{-\alpha}$ y por lo tanto $y\Omega_p x$.
Finalmente la transitividad viene del hecho de que si $x,y,z \in \mathbb{Q}^+$ son tales que $x\Omega_p y$, $y\Omega_p z$, entonces se tienen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $\frac{x}{y} = p^{\alpha_1}$ y $\frac{y}{z} = p^{\alpha_2}$, por lo tanto multiplicando estas dos igualdades se obtiene $\frac{x}{z} = p^{\alpha_1+\alpha_2}$.
(b) Se tiene que $[1]_{\Omega_2} = \{2^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}\}$

P5.-
(a) Se tiene que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia. En primer lugar es refleja pues, tomando $k = n$, $f^{(n)}(x) = id(x) = x$, por lo que $x\mathcal{R}x$. En segundo lugar tenemos que si $x\mathcal{R}y$, entonces existe k tal que $f^{(k)}(x) = y$, de esta igualdad y el hecho de que $f^{(n)} = id$ se tiene que aplicando $f^{(n-k)}$ se obtiene $x = f^{(n-k)}(y)$, por lo que como $1 \leq n-k \leq n$, $y\mathcal{R}x$. Luego, la relación $\mathcal{R}$ es simétrica. Por último se tiene que la relación es transitiva, pues si se toman $x,y,z \in A$ de modo que $x\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}z$, se tiene que existen $1 \leq k_1, k_2 \leq n$, tales que $f^{(k_1)}(x) = y$ y $f^{(k_2)}(y) = z$.
Aquí se tiene que si $k_1 + k_2 \leq n$, entonces aplicando $f^{(k_2)}$ a la primera igualdad se obtiene $f^{(k_1+k_2)}(x) = z$, por lo que $x\mathcal{R}z$.
En caso de que $k_1 + k_2 > n$, se tiene que como $k_1, k_2 \leq n$, $k_1 + k_2 \leq 2n$, por lo que observando que $1 \leq k_1 + k_2 - n \leq n$ y que componiendo $f^{(k_2)}$ en la primera igualdad como en la ocasión anterior, se tiene que $z = f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(n)} \circ f^{(k_1+k_2-n)}(x) = f^{(k_1+k_2-n)}(x)$ y así se concluye que $x\mathcal{R}z$. La relación $\mathcal{R}$ es transitiva.
(b)
(b.1) Para ver que f verifica la propiedad enunciada, basta ver que $f^{(3)} = id$
(b.2) Se tienen las siguientes clases de equivalencia:

$[(0,0,0)] = \{(0,0,0)\}$
$[(1,1,1)] = \{(1,1,1)\}$
$[(1,0,0)] = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
$[(1,1,0)] = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

P6.-
(a) Para ver que es relación de equivalencia se ve que es refleja, pues para cualquier $X \subseteq E$, $A \cap X = A \cap X$, y luego $X\mathcal{R}X$.
Se ve que es simétrica, pues si $X, Y \subseteq E$, se tiene que si $X\mathcal{R}Y$, entonces $A \cap X = A \cap Y$, pero esto es equivalente a $A \cap Y = A \cap X$, lo que significa que $Y\mathcal{R}X$.
Por último, se ve que es transitiva, pues si se toma $X, Y, Z \subseteq E$, tales que $X\mathcal{R}Y$, $Y\mathcal{R}Z$, entonces se tiene que $A \cap X = A \cap Y$ y que $A \cap Y = A \cap Z$, y de ello se tiene que $A \cap X = A \cap Z$, por lo tanto $X\mathcal{R}Z$.
Se concluye que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
(b) Se observa que $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X] | X \in \mathcal{P}(E)\}$, dado que $A \subseteq E$, claramente $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(E)$ y por lo tanto $I = \{[X] | X \in \mathcal{P}(A)\} \subseteq \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$.
Para mostrar la otra inclusión. Se considera $Z \in \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$, es decir $Z = [X]$ para algún $X \in \mathcal{P}(E)$.
Se tiene que $A \cap X = A \cap A \cap X$, por lo que $A \cap X\mathcal{R}X$, con lo que se tiene que $Z = [X] = [A \cap X$, y como se sabe que $A \cap X \subseteq A$, se tiene que $Z = [A \cap X] \in I$.
(c) Se tiene que si $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, y se tiene $X \neq Y$, entonces observando que $A \cap X = X$, y que $A \cap Y = Y$, como $X \neq Y$, se tiene entonces que $A \cap X \neq A \cap Y$, por lo tanto X no está relacionado con Y, y por lo tanto sus clases de equivalencia son distintas: $[X] \neq [Y]$