Rodolfo Núñez | Auxiliar 7 | 10/5/2010

Intro. al Álgebra (MA1101)

P1. Calcule:

(a) $\sum_{K=n}^{m} \log\left(1+\frac{1}{K}\right)$ / $n \le m$

*NOTA: Con log. suele ser útil usar las prop. de los log. y/o convertir la suma en pitatoria adentro $\left(\sum_i \log(\text{algo}_i) = \log\left(\prod_i \text{algo}_i\right)\right)$

$$\sum_{K=n}^{m} \log\left(1+\frac{1}{K}\right) \overset{(\text{suma})}{=} \sum_{K=n}^{m} \log\left(\frac{K+1}{K}\right) \overset{(\text{prop. del log})}{=} \sum_{K=n}^{m}\left[\log(K+1) - \log(K)\right]$$

$$\overset{(\text{telescópica})}{=} \log(m+1) - \log(n) \overset{(\text{prop. log})}{=} \boxed{\log\left(\frac{m+1}{n}\right) = \sum_{K=n}^{m} \log\left(1+\frac{1}{K}\right)}$$

(b) $\sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K!(n-K)!}$ / $n \geq 1$

*NOTA: Este problema ¡GRITA COMBINATORIA!, solo hace falta un $n!$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{K!(n-K)!} = \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K!(n-K)!}\cdot\frac{n!}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n!}{K!(n-K)!} = \frac{1}{n!}\sum_{K=1}^{n-1}\binom{n}{K}$$

*NOTA: nosotros sabemos que

$$\circledast \quad (x+y)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} x^K y^{n-K}$$

En este caso $x = y = 1$, solo falta arreglar los límites

$$\frac{1}{n!}\sum_{K=1}^{n-1}\binom{n}{K} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n!}\left[\sum_{K=1}^{n-1}\binom{n}{K} + \underbrace{\binom{n}{n} + \binom{n}{0}}_{\text{faltan éstos } (K=0 \text{ y } K=n)} - \binom{n}{n} - \binom{n}{0}\right] = \frac{1}{n!}\left[\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K} - \underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{sobraba éste}} - \binom{n}{n}\right]$$

ojo con el paréntesis

$$= \frac{1}{n!}\left[\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K} - 2\right] = \frac{1}{n!}\left[\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}\cdot 1^K \cdot 1^{n-K} - 2\right] \underset{\text{por } \circledast}{=} \frac{(1+1)^n - 2}{n!} = \boxed{\frac{2^n - 2}{n!} = \sum_{K=1}^{n-1}\frac{1}{K!(n-K)!}}$$

P2.) Calcular para $m \geq 1$, $\displaystyle\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$

*NOTA: Este problema tiene un solo "problema": los límites. Pero no se resuelven, el problema es muy fácil.

$$\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1) = \sum_{i=0}^{\frac{m(m+1)}{2}-\left(\frac{m(m-1)}{2}+1\right)} \left[2\left(i+\left(\frac{m(m-1)}{2}+1\right)\right)-1\right] = S$$

El límite superior será: $\frac{m(m+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - 1$

$= \frac{\cancel{m^2}}{\cancel{2}} + \frac{m}{2} - \frac{\cancel{m^2}}{\cancel{2}} + \frac{m}{2} - 1 = m - 1$ dif. de límites

$$S = \sum_{i=0}^{m-1}\left[2\left(i+\frac{m(m-1)}{2}+1\right)-1\right] = 2\sum_{i=0}^{m-1} i + \sum_{i=0}^{m-1}\left[2\left(\frac{m(m-1)}{2}+1\right)-1\right]$$

$$= \cancel{2}\left[\frac{(m-1)[(m-\cancel{1})+\cancel{1}]}{\cancel{2}}\right] + \underbrace{\left[2\left(\frac{m(m-1)}{2}+1\right)-1\right]}_{cte} \cdot \underbrace{[(m-\cancel{1})+\cancel{1}]}_{\text{diferencia de límites}+1}$$

$$= (m-1)m + \left(\frac{\cancel{2}(m^2-m)}{\cancel{2}}+1\right)\cdot m = \cancel{m^2} - \cancel{m} + m^3 - \cancel{m^2} + \cancel{m}$$

$$= \boxed{m^3 = \sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)}$$

P3.) Calcular $\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}}_{S_k}$

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot \underbrace{\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}}_{\downarrow}$$

* NOTA: Se me ocurrió multiplicar por esto para que se fuera un término en el denominador. Así quedará más simple

el 1 adecuado y luego podremos usar telescópica

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}(k+1-k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right]$$

(telescópica) racionalizar

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}} = \boxed{\frac{n+1-\sqrt{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}}$$

P4.) $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \neq y$, sin usar inducción

PDQ.
$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i = \frac{x^n - y^n}{x-y}$$

* NOTA: Esta vez nos GRITAN $\sum_{k=0}^{n} r^k$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i \underset{\uparrow}{=} x^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} x^{-i} y^i = x^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{y}{x}\right)^i$$

ojo: podemos sacar las ctes.

$$= x^{n-1} \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{y}{x}\right)} = x^{n-1} \frac{\frac{x^n - y^n}{x^n}}{\frac{x-y}{x}} = \frac{\cancel{x^{n-1}}}{\cancel{x^n}\cdot x} \frac{x^n - y^n}{x-y}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i = \frac{x^n - y^n}{x-y}$$

q.e.d.

P5.) $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f*g) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longmapsto \sum_{K=0}^{n} f(K)\, g(n-K)$$

* NOTA: Esto es una especie de convolución, la verán con más detalle en EDO y CAA

(a) $f(u) = 1$; $g(u) = u$, $\forall u \in \mathbb{N}$, Calcule en función de n:

(i) $(f*f)(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{K=0}^{n} f(K)\, f(n-K) \overset{\text{hip}}{=} \sum_{K=0}^{n} 1 \cdot 1 = \boxed{n+1 = (f*f)(n)}$

(ii) $(f*g)(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{K=0}^{n} f(K)\, g(n-K) \overset{\text{hip}}{=} \sum_{K=0}^{n} 1 \cdot (n-K) = n\sum_{K=0}^{n} 1 - \sum_{K=0}^{n} K$

$= n(n+1) - \dfrac{n(n+1)}{2} = \boxed{\dfrac{n(n+1)}{2} = (f*g)(n)}$

(iii) $(g*g)(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{K=0}^{n} g(K)\, g(n-K) \overset{\text{hip}}{=} \sum_{K=0}^{n} K(n-K) = n\sum_{K=0}^{n} K - \sum_{K=0}^{n} K^2$

$= \boxed{n \cdot \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right] - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (g*g)(n)}$

(b) $f(u) = \dfrac{a^u}{u!}$, $g(u) = \dfrac{b^u}{u!}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{N}$

Calcule en función de a, b, n: $n!(f*g)(n)$

$n!\,(f*g)(n) \overset{\text{def}}{=} n!\sum_{K=0}^{n} f(K)\, g(n-K) = n!\sum_{K=0}^{n} \dfrac{a^K}{K!} \cdot \dfrac{b^{n-K}}{(n-K)!}$

* NOTA: El combinatorial está listo (Es más, el binomio está listo)

$= \sum_{K=0}^{n} \dfrac{n!}{K!(n-K)!}\, a^K \cdot b^{n-K} = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} a^K b^{n-K} \underset{\text{Binomio de Newton}}{=} (a+b)^n$

$\Rightarrow \boxed{n!\,(f*g)(n) = (a+b)^n}$

P6.) P.D.Q. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k$$

*NOTA: Este problema lo pueden resolver con binomio de newton o inducción, como más les acomode.

NOTA: Hagamos $x=0$ aparte ya que veremos que es un caso problemático

$\sum_{k=0}^{n} 1^k = (n+1) = \binom{n+1}{0+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} 0^k \quad (0^0 = 1)$

Binomio de Newton

*NOTA: Basta ver la forma de la derecha para notar que se parece a un binomio, arreglémoslo.

*NOTA: Partiré del lado derecho ya que tiene más datos pero conviene desarrollar un poco el izq. y notar que es suma geom.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (-x)^k$$

*NOTA: aun no podemos usar el bin. de New. ya que tenemos un $\binom{n+1}{k+1}$ además, el $(n+1)$ debe coincidir con el límite de la sum $\sum_{k=0}^{n}$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-x)^{k-1}$$

*NOTA: Con esta técnica es muy fácil arreglarse los problemas dentro de las sumas

$$= \frac{-1}{x} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-x)^k = \frac{-1}{x}\left[\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k}(-x)^k + \underbrace{\underbrace{\binom{n+1}{0}(-x)^0}_{1} - \underbrace{\binom{n+1}{0}(-1)^0}_{1}}_{\text{"cero inteligente"}}\right]$$

$$= \frac{-1}{x}\left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-x)^k \cdot 1^{n+1-k} - 1\right]$$

*NOTA: Ahora sí tenemos la forma de un Bin. de New. ∴

$$= \frac{-1}{x}\left[(1-x)^{n+1} - 1\right] = \frac{\left[(1-x)^{n+1} - 1\right]}{-x}$$

*NOTA: Ahora se preguntarán cómo llegaremos a la solución $\sum_{k=0}^{n} (1-k)^k$ pues algo que deberán aprender es a reconocer ciertas sumas (tal como los "productos notables")

suma geométrica

$$= \frac{\left[(1-x)^{n+1} - 1\right]}{\left[(1-x) + 1\right]} = \sum_{k=0}^{n} (1-x)^k$$

ojo: Caso problema mencionado arriba $x=0$

*NOTA: Como dije antes, es bueno que desarrollen ambas partes para ver mejor a qué deben llegar (pero SIN poner = entre ambas partes)

q.e.d.

Inducción | $n=0$ / $\sum_{k=0}^{0}(1-x)^k = 1$ $\left(\begin{matrix}\text{tomamos } \mathbb{N} \text{ partiendo}\\ \text{de } 0\end{matrix}\right)$

Por otro lado, $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{1}{k+1}x^k = \overbrace{(-1)^0\binom{1}{1}x^0}^{1}$

$\therefore \sum_{k=0}^{0}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{2}{k+1}x^k$ ✓

hip / $\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}x^k$

P.D.Q. / $\sum_{k=0}^{n+1}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+2}{k+1}x^k$

Por un lado tenemos $\sum_{k=0}^{n+1}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n}(1-x)^k + (1-x)^{n+1}$

$\overset{\text{(hip)}}{=}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}x^k + (1-x)^{n+1} \overset{\text{(bin. Newt.)}}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\underbrace{1^{n+1-k}(-x)^k}_{1^{-k}\cdot(-x)^k=(-x)^k}$

*NOTA: ahora solo falta igualar los límites de las sumas, sacamos el elemento "n+1" de la segunda suma, que está sobrando $\therefore$

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-x)^k + \overbrace{\binom{n+1}{n+1}}^{1}(-x)^{n+1}$

$= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n+1}{k+1}(-x)^k + \binom{n+1}{k}(-x)^k\right] + (-x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\left[\underbrace{\left(\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k}\right)}_{\binom{n+2}{k+1}\text{(prop. vista)}}(-x)^k\right] + (-x)^{n+1}$

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+1}(-x)^k + \underbrace{(-x)^{n+1}}_{\binom{n+2}{(n+1)+1}(-x)^{n+1}}$ NOTA: Este es el elemento Nº n+1 de la suma

$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}(-x)^k = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+2}{k+1}x^k$ q.e.d.

P7.| Calcule $\sum_{k=0}^{n} k\,7^k \binom{n}{k}$

NOTA: un detalle: Esta suma vale para $n \geq 1$ (si es 0 queda $\sum_{k=1}^{0}$ ✗)

$$\sum_{k=0}^{n} k\,7^k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} 7^k\, k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} 7^k \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

(ojo: $k=0$ no aporta)

* NOTA: Cuando hay un k multiplicando y al lado una combinatoria, se lo pueden sacar así. Luego solo sacan un n. del $n!$ y les queda combinatoria de nuevo

Ojo $(n-k)! = ((n-1)-(k-1))!$

$$= n \sum_{k=1}^{n} 7^k \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 7^k$$

* NOTA: y ahora, el siempre útil truco del binomio (luego de arreglar la suma)

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 7^k \cdot 1^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 7^{k+1} \cdot 1^{n-(k+1)} = n \cdot 7 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 7^k\, 1^{n-1-k}$$

$$= 7n(7+1)^{n-1} = \boxed{7n \cdot 8^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\,7^k \binom{n}{k} \quad (\forall n \geq 1)}$$

veamos el caso $n=0$ aparte

$$\sum_{k=0}^{0} k\,7^k \binom{0}{k} = 0 \cdot 7^0 \binom{0}{0} = \boxed{0 = \sum_{k=0}^{n} k\,7^k \binom{n}{k} \quad (n=0)}$$

$$\therefore \boxed{7 \cdot n \cdot 8^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\,7^k \binom{n}{k} \quad (\forall n \in \mathbb{N})}$$

P8.| (a) P.D.Q. $\forall n, i, k \in \mathbb{N}$; $k \leq i \leq n$

$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$$

NOTA: Lo más complicado de formar es el $(x-y)!$ pero aquí tenemos los 2, ∴ lo que queda es fácil, solo un "ni quita ni pone"

Partamos de la izq.

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \frac{n!}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \frac{\cancel{(n-k)!}}{(i-k)!\,(n-\cancel{k}-(i-\cancel{k}))!} = \frac{n!}{k!\,(i-k)!\,(n-i)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(i-k)!\,(n-i)!} \frac{i!}{i!} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \frac{i!}{k!\,(i-k)!} = \binom{n}{i}\binom{i}{k} \quad \text{q.e.d.}$$

(b) Con (a) y sin inducción PDQ. $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}2^{n-k}$

Como dice que usemos (a), es lo primero que haremos

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$$

NOTA: ¡¡n y k son ctes!! las podemos sacar de la suma

$$= \binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k}$$

ahora solo hace falta hacer aparecer el 2^{n-k}, pero por la forma de la suma, es claro que hay que ocupar el truco de $1^{k}\cdot 1^{n-k}$ pero luego de arreglar índices.

$$= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}$$

$$= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}1^{i}\cdot 1^{n-k-i} = \binom{n}{k}(1+1)^{n-k} = \binom{n}{k}2^{n-k}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}2^{n-k}$$

q.e.d.

Mucho Éxito

Dudas a:
RODO.NUNEZ.V@GMAIL.COM
Rodolfo Núñez