Rodolfo Núñez | Auxiliar 9 | 31/5/2010

Intro. al Álgebra (MA 1101)

P1 PDQ. $E = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^2 \,/\, \exists n \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = n\}$ es numerable

Primero, notemos que $x_1 \in \mathbb{R}$ y $x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ y como la suma de ambos debe dar natural, x_1 debe estar en $\mathbb{Z}$ (y, de hecho, no puede ser "demasiado negativo" o n sería negativo $\notin \mathbb{N}$)

$\therefore$ En realidad $E = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^2 \,/\, \exists n \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = n\}$

$\Longrightarrow E \subseteq \mathbb{Z}^3$ y sabemos que $|\mathbb{Z}^3| = |\mathbb{N}|$ ya que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ y $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ producto cruz finito de numerables. $\Longrightarrow |E| \leq |\mathbb{N}|$

Además, claramente, E es infinito, basta tomar $(0, 0, n)$ con $n \in \mathbb{N}$ y ver que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ (el mismo) t.q. $0 + 0 + n = n \Longrightarrow |E| \geq |\mathbb{N}| \Longrightarrow |E| = |\mathbb{N}|$ q.e.d.

<u>NOTA</u>: También podrían separar E en muchos $E_n = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^2 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = n \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ fijo}\}$ y ver que $\forall n \in \mathbb{N}$, E_n es finito o numerable $\Longrightarrow \left|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right| = |E| = |\mathbb{N}|$

P2 (a) P.D.Q. $A = \{x \in \mathbb{R}^3 / \exists n \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = n\}$ es no numerable

separemos A en muchos A_n t. q. $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

si vemos que $\exists n \in \mathbb{N}$, A_n es no numerable concluiremos que A es no numerable al tener al menos un cjto no numerable en su unión

sea $A_n = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = n$ t.q. $\overset{\text{fijo}}{n} \in \mathbb{N}\}$

tomemos $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ y más aun, fijemos $x_3 = 0$ para mayor simplicidad y veamos que aun así, $A_{1_0} = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = 1\}$ sigue siendo numerable.

Basta tomar un $x_1 \in \mathbb{R}$ cualquiera y tomar $x_2 = (1 - x_1) \in \mathbb{R}$

Hay una biyección trivial entre este cjto y $\mathbb{R}$

$\therefore A_{1_0}$ es no numerable $\Rightarrow A_1$ es no numerable

$\Rightarrow A$ es no numerable q.e.d.

(b) P.D.Q. $\mathcal{T} = \{T \subseteq \mathbb{R}^2 / T$ es triángulo$\}$ es no numerable

Procederemos de manera muy similar a la anterior notemos que todo triángulo en $\mathbb{R}^2$ está totalmente determinado por 3 ptos. Por simplicidad, fijemos uno en $(0,0)$ y otro en $(0,1)$ y llamemos al cjto de estos Δs $\mathcal{T}'$, claramente $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, pero $\mathcal{T}'$ es no numerable $\therefore$ $\mathcal{T}$ será no numerable. Basta tomar la función que que toma al 3er pto y le asocia su coordenada ordenada que es trivialmente biyectiva (se le llama $\pi_1(\cdot)$ proyección)

$$\pi : \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$(x, 0) \mapsto x$$

q.e.d.

P3) P.D.Q. $\mathcal{L}$ = cjto de todas las rectas no verticales que pasan por $(0,1)$ es no numerable

$L: y = mx + n$, como debe pasar por $(0,1)$, satisface:

$\therefore \quad 1 = m \cdot 0 + n \Rightarrow n = 1 \Rightarrow L: y = mx + 1$

y son no verticales $\therefore -\infty < m < +\infty$ con $m \in \mathbb{R}$

Esta es una pista para construir nuestra función, ya que tenemos que m puede tomar valores en todo $\mathbb{R}$. Para contar la cantidad de rectas en el conjunto basta contar la cantidad de pendientes que nos sirven. (x, y son parte de la estructura común de las rectas y se quedan así)

Tomemos $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}$

$$m \longmapsto L: y = mx + 1$$

(sobrectiva)

Es biyectiva ya que para $L': y = m'x + 1$, $\exists\ m' \in \mathbb{R}$ t.q. $f(m') = L'$

y si $f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow L_1: y = m_1 x + 1 = L_2: y = m_2 x + 1$
con $m_1 \neq m_2$

Las rectas coinciden <u>en todos los ptos</u> $\therefore$ tomemos $(1,0) \Rightarrow y = 0 = \underbrace{m_1 \cdot 1 + 1 = m_2 \cdot 1 + 1}$ (supusimos $m_1 = m_2$)

<u>NOTA</u>: Basta tomar un pto ya que nos hace falta solo un error a la regla para demostrar por contradicción $\Rightarrow m_1 = m_2 \therefore$ es inyectiva $\Rightarrow$ es biyectiva entre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{L}$

$\Rightarrow |\mathbb{R}| = |\mathcal{L}| \Rightarrow \mathcal{L}$ es no numerable

<u>NOTA</u>: Bastaría ver $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{L}|$ es decir, sobreyect. <u>q.e.d.</u>

En clases lo hice distinto, se puede hacer de no numerables formas. (Demuéstrenlo si quieren)

P4. (a) A cjto no numerable, $B \subseteq A$ numerable

P.D.Q. $A \setminus B$ es no numerable.

Fácil... por contradicción: Si $A \setminus B$ fuera numerable $\Rightarrow A \setminus B \cup B$ sería numerable, pero $A \setminus B \cup B = A$

$= (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B^c \cup B) = (A \cup B) = A$ (ya que $B \subseteq A$)

$\therefore A$ es numerable $\Rightarrow\Leftarrow \Rightarrow A \setminus B$ debe ser no numerable q.e.d.

(b) P.D.Q. $\mathbb{I}$ es no numerable

Más fácil aun, es un corolario de (a)

Basta tomar $A = \mathbb{R}$ no numerable y $B = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} = A$ numerable $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es no numerable por (a)

pero $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{I}$ es no numerable

q.e.d.

NOTA: En caso de querer de alguna generación posterior, revisa el foro de la sección 3 del 2010-1. Postee algunos cosas que pueden ser útiles para el control.
(www.u-cursos.cl/ingenieria/2010/1/MA1101/3/foro/)
además, están el resto de los guías y algunos de Roberto Castillo
Algo que quiero enfatizar mucho es que hay muchas formas de resolver los problemas.

P5.] $A \neq \emptyset$; $\mathcal{F} = \{ f : A \to A / f$ biyectiva$\}$

sea $*$ t.q. $(\forall f, g \in \mathcal{F})\ f * g = (f \circ g)^{-1}$

(a) P.D.Q. $(\mathcal{F}, *)$ es estructura algebraica (i.e. $*$ l.c.i. en $\mathcal{F}$)

$f, g \in \mathcal{F}$ (biyecciones de A en A)

$(f * g) = (\underbrace{f \circ g}_{})^{-1} \Rightarrow (f \circ g)^{-1}$ es biyectiva al ser inversa de una biyectiva y como

biyectiva por composición

$f : A \to A$; $g : A \to A \Rightarrow (f \circ g) : A \to A \Rightarrow (f \circ g)^{-1} : A \to A$

$\Rightarrow (f \circ g)^{-1} \in \mathcal{F} \Rightarrow *$ es l.c.i. $\Rightarrow (\mathcal{F}, *)$ es estructura algebraica

q.e.d.

(b) Estudiar asociatividad de $*$

$(f * g) * h = (f \circ g)^{-1} * h = ((f \circ g)^{-1} \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)$

inversas de funciones en $(\mathcal{F}, \circ)$ (que asocia y tiene neutro)

asociatividad de funciones

análogamente,

$f * (g * h) = f * (g \circ h)^{-1} = (f \circ (g \circ h)^{-1})^{-1} = (g \circ h) \circ f^{-1}$

A simple vista parece que no se cumple que $(f * g) * h = f * (g * h)$

Demos un contraejemplo, entonces.

sea $A = [0, 1]$ $\quad f(x) = x^2$; $g(x) = x^3$; $h(x) = \ln x$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}$; $g^{-1}(x) = \frac{1}{x^3}$; $h^{-1}(x) = e^x$

$(f \circ g)(x) = x^6$; $\quad h^{-1} \circ (f \circ g)(x) = e^{x^6}$

$(g \circ h)(x) = (\ln x)^3$; $(g \circ h) \circ f^{-1}(x) = \left(\ln \frac{1}{x^2}\right)^3$

NOTA: no creo que les pidan esto en un control, pero si aparece y no se les ocurre, déjenlo para el final.

Basta ver que con $x = 1 \Rightarrow h^{-1} \circ (f \circ g)(1) = e^6$

$(g \circ h) \circ f^{-1}(1) = (\ln(1))^3 = 0 \neq e^6 \Rightarrow$ ↯

q.e.d.

(c) Estudie la conmutatividad de $*$

$(f, g) \in \mathcal{F}$

$(f * g) = (f \circ g)^{-1}$ pero $(f \circ g) \neq (g \circ f)$ en general.

$\therefore$ no es necesariamente conmutativa

q.e.d.

(d) Estudie la existencia de neutro.

supongamos que existe y es e

$\Rightarrow f * e = f \quad \wedge \quad e * f = f$ Estudiemos un solo lado por ahora

si $f * e = f \Rightarrow (f \circ e)^{-1} = e^{-1} \circ f^{-1} = e \circ f^{-1} = f \quad / \circ f$

$= e \circ f^{-1} \circ f = f \circ f$

$\Rightarrow e = f \circ f = f^2$ pero e depende de f

$\therefore$ habrá muchos neutros, sin embargo debe haber solo 1 (y acá abrá un neutro para cada función f)

$\therefore \nexists$ no existe el neutro para $*$

q.e.d.

(e) Determinar si todo elemento $f \in \mathcal{F}$ admite un inverso para $*$.

Pero el inverso es tal que $f * f^{-1} = e$, pero como e no existe $\Rightarrow$ no tiene sentido buscar f^{-1}

$\therefore$ no hay inversos para $*$ q.e.d.

(f) Encuentre los elementos idempotentes ($f * f = f$)

Si existen, serán de la forma $f * f = f \Rightarrow (f \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ f^{-1} = f$

$\Rightarrow f^{-1} \circ f^{-1} \circ f = f \circ f \Rightarrow f^{-1} \circ f = f^2 \circ f \Rightarrow \boxed{f^3 = id}$ (son de esta forma)

P6.| $(E, *)$ una estructura algebraica, R rel. de eq. t.q.

$(\forall (x_1, x_2, y_1, y_2))\ x_1 R x_2 \wedge y_1 R y_2 \Longrightarrow (x_1 * y_1) R (x_2 * y_2)$

sea $\left(E/R, \circledast\right)$ t.q.

$$[x]_R \circledast [y]_R = [x * y]_R$$

(a) P.D.Q. $\circledast$ está bien definida (i.e. veamos que si tomamos $x \in [x]_R$, $y \in [y]_R$ cualesquiera, puedo definir totalmente $[x * y]_R = \{(x' * y') \,/\, x' \in [x]_R,\ y' \in [y]_R\ (x*y) R (x' * y')\}$

sabemos por hip. que como $x' \in [x]_R$, $y' \in [y]_R$

$\Longrightarrow x R x' \wedge y R y'$ ~~y~~ por tendremos que

$(x * y) R (x' * y')$ $\left(\begin{array}{l}\text{además, como } R \text{ es rel. de eq., } x * y \in [x * y]_R \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(refleja)}\end{array}\right)$

$\therefore$ el cjto $[x * y]_R$ no depende de los $x \in [x]_R$, $y \in [y]_R$ escogidos $\Longrightarrow$ está bien definida.

(b) Supongamos que $(E, *)$ tiene neutro e

Encontremos e_R neutro en $\left(E/R, \circledast\right)$

si existiera, tendríamos que $\forall\ [x]_R \in E/R$

$e_R \circledast [x]_R = [x]_R \Longrightarrow [? * x]_R = [x]_R$ no sabemos cuánto es "?" pero esto da una muy buena pista de cuál debe ser el candidato a neutro en E/R

tomemos $e_R = [e]_R \implies e_R \oplus [x]_R = [e]_R \oplus [x]_R = [e * x]_R$

$= [x]_R$ $\therefore$ efectivamente $[e]_R$ es el neutro en $(E/_R, \oplus)$

NOTA: si son capaces de detectar el candidato a neutro sin ver la forma que debe tener, no es necesario que hagan la primera parte.

NOTA: Este es un morfismo de $(E,*)$ a $(E/_R, \oplus)$ con la función $[\cdot]_R$ y por propiedades de morfismos, el neutro en $E/_R$ es $[(\text{neutro en } E)]_R$ i.e. $[e]_R$. (vale en 3 líneas)

(c) Supongamos que $x \in (E,*)$ tiene inverso $x^{-1} \in (E,*)$

Determinemos el inverso de $[x]_R \in E/_R$ en $(E/R, \oplus)$

¿Qué forma tendrá?: $[x]_R \oplus [x]_R^{-1} = [e]_R$

¿Cuál será el candidato? ... pues de alguna forma hay que

usar x^{-1} en E (de hecho, esto es un morfismo, así que $[x]_R^{-1} = [x^{-1}]_R$ trivialmente, pero lo comprobaré para no usar materia de la próxima semana).

$[x]_R \oplus [x^{-1}]_R = [x * x^{-1}]_R = [e]_R$ $\therefore$ efectivamente $[x^{-1}]_R = [x]_R^{-1}$

q.e.d.

Mucho Éxito

Dudas a:
RODO.NUNEZ.U@GMAIL.COM
Rodolfo Núñez