Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Soluciones Problemas Complementarios

MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliares: Roberto Castillo, Rodolfo Núñez
Viernes 04 de Junio de 2010

P1.-
Sean $i, k, n \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq k \leq i \leq n$. Pruebe que:

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{i}\binom{i}{k}$$

y utilícelo para calcular:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i!}{k!(i-k)!} \\ &= \binom{n}{i}\binom{i}{k}\end{aligned}$$

Con esto se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k} \\ &= 3^n\end{aligned}$$

P2.-
Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que:

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \text{ y } |B| = |C|$$

Demuestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$

Se tiene que como $|B| = |C|$ existe una función $\psi : B \to C$ biyectiva. Usando esto, se define $f : A \cup B \to A \cup C$ de modo tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in A \\ \psi(x) & x \in B \end{cases}$$

Como $A \cap B = \emptyset$, esta función está bien definida y es biyectiva, pues la identidad de A en A lo es y ψ lo es, además de que $A \cap C = \emptyset$.

P3.-
Sea A un conjunto tal que $|A| \geq 2$. Sea $F(A) = \{f : A \to A | f \text{ es función }\}$, muestre que $|A| < |F(A)|$

Claramente se tiene que $|A| \leq F(A)$, pues se considera la función $\varphi : A \to F(A)$, que a cada a en A le asocia la función $\varphi(a)$ como la función constante igual a a.
Es claro que la función φ es inyectiva.
Por otro lado, se tiene que dada ψ una función inyectiva cualquiera de A en $F(A)$, esta función no puede ser sobreyectiva, pues como $|A|$ tiene más de dos elementos, se puede definir la función $\gamma : A \to A$, tal que a cada a en A le asocia b tal que $b \neq \psi(a)(a)$ (Observar que $\psi(a)$, es una función de A en A, por lo que se puede evaluar en a, un elemento de A y se obtiene otro elemento de A).
Se ve que no existe a_g en A tal que $\psi(a_g) = g$, pues si existiera un elemento como el descrito, se tendría que por la definición de g

$$g(a) = b \neq \psi(a)(a) = g(a)$$

lo que es una contradicción. Así, cualquier función inyectiva de A en $F(A)$ no puede ser sobreyectiva, es decir $|A| < |F(A)|$.

P4.-
Sea C el conjunto de todas las circunferencias en el plano cartesiano cuyos centros tienen coordenadas racionales y su radio es racional. Pruebe que el conjunto de todos los pares de puntos (P, Q), donde P y Q son los extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias en C es infinito numerable.

Se tiene que el conjunto de los puntos (P, Q) es infinito, pues contiene a todos los pares de puntos que son extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias en C con centro entero y radio 1, que es un conjunto infinito.
Además, se tiene que la circunferencia de centro (a, b) con radio r con a, b, r racionales. Tiene como extremos de su diámetro horizontal $(a + r, b)$ y $(a - r, b)$, que son claramente tres números racionales. Por lo que trivialmente se inyectan los pares de puntos $(P, Q$ descritos antes en $\mathbb{Q}^3$, que es numerable.
De esta forma, se tiene que el conjunto descrito es infinito numerable.

P5.-
Sea $(S, *)$ una estructura algebraica con neutro e y $*$ una operación asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $*$ y con inverso $a^{-1} \in S$ se define la operación Δ en S por:

$$\forall x, y \in S \quad x \Delta y = x * a * y$$

(i) Demuestre que Δ es l.c.i asociativa.
(ii) Determine si Δ tiene neutro y, en caso que lo tenga, calcúlelo.
(iii) Caracterice los elementos invertibles para Δ y calcule el inverso de a con respecto a Δ

Se tiene que Δ es asociativa, pues para $x, y, z \in S$:

$$\begin{aligned} (x \Delta y) \Delta z &= (x * a * y) \Delta z \\ &= (x * a * y) * a * z \\ &= x * a * (y * a * z) \\ &= x \Delta (y \Delta z) \end{aligned}$$

por la asociatividad de $*$.
Además, se tiene que Δ tiene neutro y éste es a^{-1}, pues dado $x \in S$:

$$x\Delta a^{-1} = x * a * a^{-1} = x \quad \wedge \quad a^{-1}\Delta x = a^{-1} * a * x = x$$

Finalmente, para x tenga inverso para Δ, se tiene que x debe de tener inverso para $*$, y viceversa. Esto caracteriza los elementos invertibles de x. En efecto:
Si x es invertible para $*$, se denota su inverso como x^{-1}. Se tiene que $a^{-1} * x^{-1} * a^{-1}$ es el inverso de x para Δ, como se ve según:

$$x\Delta(a^{-1} * x^{-1} * a^{-1} = x * a * a^{-1} * x^{-1} * a^{-1} = a^{-1}$$

y según:

$$(a^{-1} * x^{-1} * a^{-1}\Delta x = a^{-1} * x^{-1} * a^{-1} * a * x = a^{-1}$$

Por otro lado, si x es invertible para Δ, se denota su inverso como x'. Se tiene que $a * x' * a$ es el inverso de x para $*$. En efecto:

$$x * a * x' * a = (x\Delta x') * a = a^{-1} * a = e$$

y además

$$a * x' * a * x = a * (x'\Delta x) = a * a^{-1} = e$$