Introducción al Álgebra - Control 4

PAUTA

P1 a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ es tal que $\forall x,y\in(0,\infty)$ $f(xy)=f(x)+f(y)$ y $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

a1) Probar que $f(1)=0$ y que $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ $\forall x,y\in(0,\infty)$

(0.5) En efecto, para $x=1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ queda $f(1)=-f(1)\Rightarrow f(1)=0$

(0.5) Para $f\left(\frac{x}{y}\right)$ escribimos $f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)\underset{\text{Propiedad}}{=}f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)\underset{\text{Propiedad}}{=}f(x)-f(y)$

a2) Probar por inducción que $\sum_{k=1}^{n}f(k)=f(n!)$ $\forall n\geq 1$

(0.3) i) Para $n=1$ $\sum_{k=1}^{1}f(k)=f(1!)\iff f(1)=f(1!)\iff 0=0\iff V$

(0.2) ii) Sea $\sum_{k=1}^{n}f(k)=f(n!)$ algún $n\in\mathbb{N}$.

iii) P.d. que: $\sum_{k=1}^{n+1}f(k)=f((n+1)!)$

En efecto $\sum_{k=1}^{n+1}f(k)=\sum_{k=1}^{n}f(k)+f(n+1)\overset{H.I}{=}f(n!)+f(n+1)$

(0.5) $\underset{\text{Propiedad}}{=}f[n!(n+1)]=f((n+1)!)$

a3) $\sum_{k=1}^{n}k\,f\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}k\,f\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}k\,f\left[(k+1)\cdot\frac{1}{k}\right]\overset{\text{según (a1)}}{=}\sum_{k=1}^{n}k\left[f(k+1)-f(k)\right]$

(0.2) Arreglando $=\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)\big(f(k+1)\big)-kf(k)-f(k+1)\right\}=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)f(k+1)-k\cdot f(k)\right]}_{\text{Telescópica}}-\sum_{k=1}^{n}f(k+1)$

(0.5) $=(n+1)f(n+1)-1\cdot\overset{\to 0}{f(1)}-\sum_{k=1}^{n}f(k+1)$

Pero $\sum_{k=1}^{n}f(k+1)=\sum_{k=2}^{n+1}f(k)=\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\overset{\to 0}{f(1)}\overset{\text{según (a2)}}{=}f((n+1)!)$

(0.3) Así $\sum_{k=1}^{n}k\,f\left(1+\frac{1}{k}\right)=(n+1)f(n+1)-f[(n+1)!]$

(1.5) b) Calcular $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{j}{i}\frac{2^{2i}}{3^j}=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\frac{2^{2i}}{3^j}}_{\text{no dependen de }k}\underbrace{\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}}_{\text{binomio}=2^i}=$

(0.5) $=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3^j}\sum_{i=1}^{j}2^{2i}\cdot 2^i\cdot\binom{j}{i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3^j}\underbrace{\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}8^i}_{\text{Binomio}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{9^j-1}{3^j}=\sum_{j=1}^{n}\left[3^j-\left(\frac{1}{3}\right)^j\right]$ Sumas Geométricas

(1.0) $=\sum_{j=1}^{n}3^j-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^j=3\,\frac{1-3^n}{1-3}-\frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-1/3}=\frac{3}{2}\left[3^n-1\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{3^n-1}{3^n}\right]=\frac{3^n-1}{2}\left[3-\frac{1}{3^n}\right]$

2 a) $(A,*)$ es estructura algebraica y $*$ asociativa en A; $a \in A$, fijo
$B = \{x \in A / a*x = x*a\}$

a1) Demostrar que $\forall x,y \in B, (x*y) \in B$

(0.5) Debemos probar que $(x*y)*a = a*(x*y)$ sabiendo que
$a*x = x*a \wedge a*y = y*a$ pues $x,y \in B$.

$$
\begin{aligned}
\text{Entonces } (x*y)*a &= x*(y*a) && \text{Asociatividad.}\\
&= x*(a*y) && \text{pues } y \in B\\
&= (x*a)*y && \text{asociatividad}\\
&= (a*x)*y && \text{pues } x \in B\\
&= a*(x*y) && \text{asociatividad}
\end{aligned}
$$

(1.5)

a2) $e \in A$, e neutro, entonces $e \in B$.

En efecto, como $e \in A$ es neutro, $e*a = a*e = a$

(1.0) Sigue que $e \in B$

a3) Si $x \in B$ tiene inverso $x^{-1} \in A$, entonces $x^{-1} \in B$

Debemos probar que $x^{-1}*a = a*x^{-1}$ sabiendo que $x*a = a*x$

En efecto $x*a = a*x$ / $x^{-1}*$ operando

$(x^{-1}*x)*a = x^{-1}*(a*x)$ Asocial y Neutro

(1.0) $a = e*a = (x^{-1}*a)*x$ / $*x^{-1}$ operando.

$a*x^{-1} = (x^{-1}*a)*(x*x^{-1})$ neutro

$a*x^{-1} = (x^{-1}*a)*e = (x^{-1}*a)$

(1.0) Sigue que $x^{-1} \in B$

b) El conjunto $C = \{(m,n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} / (m+n) \in \mathbb{N}\}$ es infinito

(0.5) Basta fijar, por ejemplo, $m = 0 \in \mathbb{Q}$ y $C_0 = \{(0,n) / n \in \mathbb{Z}, con\ n \in \mathbb{N}\}$

Entonces C es infinito y $C \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ es numerable,

(0.5) Se concluye que C es numerable al ser subconjunto infinito de un numerable.