Resolución de Guía de Problemas 10:
Estructuras Algebraicas

P1 ($\Rightarrow$) Supongamos que f es un isomorfismo, y dados $a, b \in G$ calculamos $f(a^{-1}*b^{-1}) = f(a^{-1})*f(b^{-1})$ por ser f morfismo. Luego, usando la definición de f, sigue que $(a^{-1}*b^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}*(b^{-1})^{-1} = a*b$. Sin embargo, una propiedad vista en cátedra dice que $(a^{-1}*b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}*(a^{-1})^{-1} = b*a$. Concluimos que $a*b = b*a$, con lo que G es Abeliano.

($\Leftarrow$) Probemos primero que f es biyectiva. Por propiedades de grupo (unicidad del inverso) sale que si $f^{-1} = g^{-1}$ entonces $f = g$ (inyectividad). Observen que eso último es unicidad del neutro para f^{-1}, no para f. Veamos la epiyectividad. Dado $a \in G$, queremos encontrar $b \in G$ tal que $f(b) = a$, esto es $b^{-1} = a$. Es fácil notar que basta con tomar $b = a^{-1}$ y se tiene lo buscado. Luego f es inyectiva.

Veamos ahora que f es morfismo. Como dados $a, b \in G$ se tiene $f(a*b) = (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$, usando además que G es Abeliano sigue que $f(a*b) = a^{-1}*b^{-1} = f(a)*f(b)$, y luego f es morfismo.

P2 **(a)** Hay que probar que la composicion de funciones de A es cerrada (da una funcion de A), que es asociativa, que tiene neutro e inversos en A.

- Sean $f, g \in A$. Entonces son isomorfismos de $(G,*)$ en $(G,*)$. Por lo tanto, son funciones biyectivas de G en G, por lo que $f \circ g$ es biyeccion de G en G (ya se sabia).
- Falta probar que la composicion de morfismos es morfismo. Sean $x, y \in G$. Entonces

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x*y) &= f(g(x*y))\\ &= f(g(x)*g(y))\\ &= f(g(x))*f(g(y))\\ &= (f\circ g)(x)*(f\circ g)(y)\end{aligned}$$

  justificandose cada paso por definicion de composicion de funciones, y usando que f y g son morfismos.
- De antes se sabe que la composicion de funciones es asociativa, por lo que la ley en A es asociativa.
- Veamos que el elemento neutro en $(A,\circ)$ (denotado e_A) es la funcion identidad id_G (es claro que es biyeccion de G en G y es morfismo). Para ello recordamos que al componer una funcion cualquiera con la identidad correspondiente (al conjunto en que se toma), se obtiene la misma funcion. Entonces, si $f \in A$, $f \circ id_G = f$, y de la misma forma $id_G \circ f = f$.
- Sea $f \in A$. Entonces, veamos que el inverso de f en $(A,\circ)$ es la funcion inversa f^{-1}. Para ello, vemos que $f^{-1}: G \to G$ existe (pues f es biyectiva), y que es morfismo: Sean $z, w \in G$, y

$x, y \in G$ tales que $f(x) = z$ y $f(y) = w$ (luego $x = f^{-1}(z), y = f^{-1}(w)$). Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(z * w) &= f^{-1}(f(x) * f(y)) \\ &= f^{-1}(f(x * y)) && \text{Por ser } f \text{ morfismo} \\ &= x * y \\ &= f^{-1}(z) * f^{-1}(w) \end{aligned}$$

por lo que $f^{-1} \in A$. Ahora, es claro que $f \circ f^{-1} = id_G = e_A$, y $f^{-1} \circ f = id_G = e_A$, por lo que el inverso de f en $(A, \circ)$ es la funcion inversa f^{-1}.

(b) • Sean $x, y \in G$.

$$\begin{aligned} F_g(x * y) &= g * (x * y) * g^{-1} \\ &= (g * x) * (y * g^{-1}) \\ &= (g * x) * (e) * (y * g^{-1}) \\ &= (g * x) * (g^{-1} * g) * (y * g^{-1}) \\ &= (g * x * g^{-1}) * (g * y * g^{-1}) \\ &= F_g(x) * F_g(y) \end{aligned}$$

• Primero verificar los dominios y codominios (ejercicio para ustedes).
Sea $x \in G$

$$\begin{aligned} F_{g*h}(x) &= (g * h) * x * (g * h)^{-1} \\ &= (g * h) * x * (h^{-1} * g^{-1}) \\ &= g * (h * x * h^{-1}) * g^{-1} \\ &= g * F_h(x) * h^{-1} \\ &= F_g(F_h(x)) \\ &= (F_g * F_h)(x) \end{aligned}$$

• Sea $x \in G$. $F_e(x) = e * x * e^{-1} = x = id_G(x)$, con lo que se tiene la igualdad de funciones (revisar dominios y codominios, ejercicio).

Ya se probo que $F_g : G \to G$ es homomorfismo, falta ver que es biyectiva:

- Inyectividad: Sean $x, y \in G$ tales que $F_g(x) = F_g(y)$. Entonces, por definicion de F_g, $g * x * g^{-1} = g * y * g^{-1}$, y aplicando elementos inversos apropiados por la derecha y por la izquierda, se llega a que $x = y$.
- Epiyectividad: Sea $y \in G$. Hay que encontrar un $x \in G$ tal que $F_g(x) = y$. Resolviendo la ecuacion, se ve que $x = g^{-1} * y * g$ satisface $F_g(x) = g * (g^{-1} * y * g) * g^{-1} = (g * g^{-1}) * y * (g * g^{-1}) = y$.

Ahora, probemos que la funcion inversa de F_g es $F_{g^{-1}}$. Para ello, usamos el punto 2 y el punto 3 de esta parte, entonces $F_{g^{-1}} \circ F_g = F_{g^{-1} * g} = F_e = id_G$ y $F_g \circ F_{g^{-1}} = F_{g * g^{-1}} = F_e = id_G$.

(c) Sean $f, h \in B$, usamos la caracterizacion de subgrupo: hay que probar que $f \circ h^{-1} \in B$

Como $f, h \in B$, existen $g_f, g_h \in G$ tal que $f = F_{g_f}$ y $h = F_{g_h}$. Entonces

$$f \circ h^{-1} = F_{g_f} \circ (F_{g_h})^{-1} = F_{g_f} \circ F_{(g_h)^{-1}} = F_{g_f * (g_h)^{-1}}$$

donde todas las igualdades son por las propiedades de la parte anterior. Por lo tanto, $f \circ h^{-1}$ tiene la forma de los elementos de B, pues $g_f * (g_h)^{-1} \in G$.

P3 Por la indicación, calculamos $(a * b) * (b * a) = a * (b * b) * a$ por asociatividad. Pero $b * b = e$, luego lo anterior es $a * e * a = a * a = e$ por la propiedad de este grupo. Luego $(a * b)^{-1} = b * a$. Sin embargo, este grupo tiene la propiedad de que todo elemento es su propio inverso, o sea que $(a * b)^{-1} = a * b$. Concluimos que $b * a = a * b$ y entonces G es Abeliano.

P4 Probaremos que $a * b = e$. Supongamos que no. Entonces, supongamos que $a * b = a$, entonces aplicando el inverso de a por la izquierda queda que $b = e$, lo que no puede ser (estamos suponiendo que e, a y b son distintos). Suponiendo ahora que $a * b = b$ se llega a algo similar, por lo que no queda otra que $a * b = e$. Luego, por unicidad del inverso, se tiene que $a^{-1} = b$.

P5 **(a)** Todas y cada una de las propiedades de grupo para $(G \times H, \Delta)$ se heredan de las propiedades de grupo para $(G, *)$ y $(H, \circ)$. Esto es, Δ es lci en $G \times H$ ya que $*$ y $\circ$ son lci en G y H respectivamente. La asociatividad para Δ se tiene de la asociatividad de $*$ y $\circ$. En efecto, dados $(a, b), (c, d), (e, f) \in G \times H$, se tiene $((a, b)\Delta(c, d))\Delta(e, f) = (a * c, b \circ d)\Delta(e, f) = ((a * c) * e, (b \circ d) \circ e) = (a * (c * e), b \circ (d \circ e))$, y devolviéndose se tiene lo pedido. La existencia de neutros e_G, e_H en G y H respectivamente garantiza la existencia de neutro (e_G, e_H) en $G \times H$. En efecto $(a, b)\Delta(e_G, e_H) = (a * e_g, b \circ e_H) = (a, b)$. Finalmente, como cada elemento $a \in G$, $b \in H$ tiene neutro a^{-1} y b^{-1} respectivamente, sigue que (a^{-1}, b^{-1}) es el inverso de (a, b). Verificarlo se deja propuesto

(b) Veremos el caso de φ. El caso de ψ es idéntico. Dados $(a, b),\ (c, d) \in G \times H$, se tiene $\varphi((a, b)\Delta(c, d)) = \varphi((a*c, b \circ d)) = a*c =$. Pero $varphi(a, b) = a,\ \varphi(c, d) = c$, luego se concluye que $\varphi((a, b)\Delta(c, d)) = \varphi((a, b)) * \varphi((c, d))$, con lo que φ es morfismo.

Dado ahora $a \in G$, basta con considerar (a, e_H), y se tiene que $\varphi((a, e_H)) = a$, con lo que además φ es sobreyectivo. Se concliye lo pedido.

(c) Definamos la función (e es el neutro en G)

$$\begin{array}{rcl} f_e : G & \to & G \\ a & \mapsto & f_e(a) = f((a, e)) = (a * e)^{-1} = a^{-1} \end{array}$$

Es fácil verificar que f es un homomorfismo $\Leftrightarrow$ f_e es un isomorfismo (la biyectividad de f_e sale por propiedades de grupo como en el $P1$). Veámos la implicancia difícil ($\Leftarrow$): Si f_e es un isomorfismo, sabemos por el $P1$ que G es Abeliano y luego $f((a, b)\Delta(c, d)) = f((a*c, b*d)) = (a*c*b*d)^{-1} = (a * b * c * d)^{-1} = (c * d)^{-1} * (a * b)^{-1} = (a * b)^{-1} * (c * d)^{-1} = f(a, b) * f(c, d)$ y entonces f es homomorfismo.

Luego, por el resultado del $P1$, se concluye que f es un homomorfismo $\Leftrightarrow$ G es abeliano

$\square$