Rodolfo Núñez | Auxiliar 13 | 28/6/2010

Intro al Álgebra (MA1101)

P1. Sean $1, w_1, w_2, w_3, w_4$ las raíces quintas de la unidad. P.D.Q.

$$(1-w_1)(1-w_2)(1-w_3)(1-w_4) = 5$$

$1, w_1, w_2, w_3, w_4$ son las raíces quintas de la unidad. $\therefore$ tendrán la forma $e^{i\frac{2n\pi}{n}}$ $/ n=5$

$$w_0 = 1 \; ; \; w_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}} \; ; \; w_2 = e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{5}} \; ; \; w_3 = e^{i\frac{2\cdot 3\pi}{5}} \; ; \; w_4 = e^{i\frac{2\cdot 4\pi}{5}}$$

Ahora, desarrollemos el lado izquierdo

NOTA: Cuando hablan de raíces puede ser útil usar notación polar

$$(1-w_1)(1-w_2)(1-w_3)(1-w_4) = (1-w_1-w_2+w_1w_2)(1-w_3-w_4+w_3w_4)$$

Notemos que $w_1w_2 = e^{i\frac{2\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}} = w_3$

$$w_3w_4 = e^{i\frac{6\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{14\pi}{5}} = \underbrace{\cancel{e^{i\frac{2\cdot 5\pi}{5}}}}_{1} \cdot e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{5}} = w_2$$

además, lo pueden ver geométricamente leyendo la página que les postee.

$$= (1-w_2-w_1+w_3)(1-w_3-w_4+w_2) = 1-\cancel{w_3}-w_4+\cancel{w_2}-\cancel{w_2}+w_2w_3$$

Luego calculamos los productos restantes de manera análoga

$$+w_2w_4 - w_2w_2 - w_1 + w_1w_3$$
$$+w_1w_4 - w_1w_2 + \cancel{w_3} - w_3w_3$$
$$-w_3w_4 + w_3w_2$$

Notar que, en general

$$w_n w_m = e^{i\frac{2n\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{2m\pi}{5}} = e^{i\frac{2\pi}{5}(n+m)} = e^{i\frac{2\pi}{5}(n \underset{\text{suma en mod. 5}}{+_5} m)} = w_{(n+_5 m)}$$

ya que cada 5 veces $i\frac{2\pi}{5}$, vale un $e^{i2\pi}$, que tiene módulo 1

$= 1 - \omega_4 - \omega_3 + \cancel{\omega_1} + 1 - \cancel{\omega_4} - \cancel{\omega_1} + 1 + \cancel{\omega_4} - \cancel{\omega_3} + \cancel{\omega_3} - \omega_2 - \omega_1 + 1$

$= 4 \underbrace{- \omega_4 - \omega_3 - \omega_2 - \omega_1}_{=1} = 5$

$=1$ ya que la suma de las raíces de la unidad debe ser cero (visto en clases)

q.e.d.

P2 PDQ. $\forall n \geq 2$

$① = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = -1$

$② = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$

$① = \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$; $② = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

NOTA: Aquí tenemos algo similar a la forma de complejos con sen y cos.

Notemos que $① = -1 \iff \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ ya que $\cos(0) = 1$ ∴ probar

$① = -1$ es lo mismo que probar que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$

Análogamente, como $\operatorname{sen}(0) = 0$, basta probar que $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$

∴ Basta probar $⊛ = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right) = 0$

NOTA: Aquí usé solo equivalencias ($\iff$)

NOTA: Puedo multiplicar por i ya que la suma es 0 ∴ $i \cdot 0 = 0$ no afecta

En efecto, esto es cierto, ya que

$⊛ = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\text{suma de las } n \text{ raíces de la unidad}} = 0 \iff ⊛ = 0 \iff \begin{matrix} \operatorname{Re}(⊛) = 0 \\ \operatorname{Im}(⊛) = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = -1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0 \end{matrix}$

q.e.d.

P3. Sea $S \subseteq \mathbb{C}$ / $S = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$ grupo abeliano

(a) P.D.Q. z raíz n-ésima de la unidad ($n \geq 2$) $\wedge$ n / m

$\Longrightarrow$ z es raíz m-ésima de la unidad

Por definición, z es raíz m-ésima de la unidad

$\Longleftrightarrow$ $z^m = 1$ $\therefore$ veamos esto último, que es equivalente

$z^m = z^{n \cdot k}$ ya que $n / m \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, m = n \cdot k$

$\Rightarrow z^m = z^{nk} = (z^n)^k \underset{\uparrow}{=} 1^k = 1$ q.e.d.

z es raíz n-ésima de la unidad

(b) $U = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ z^n = 1\}$

P.D.Q. $(U, \cdot) \leq (S, \cdot)$

notación para decir "subgrupo"

Notemos que $U \neq \emptyset$ ya que al menos $1 \in U$ (ya que $1^n = 1 \ \forall n \geq 2$)

Ahora, sean $x, y \in U$ y veamos que $x \cdot y^{-1} \in U$

$x, y \in U \Longleftrightarrow \exists n_1, n_2 \geq 2 \,/\, x^{n_1} = 1 \wedge y^{n_2} = 1$

P.D.Q. $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \,/\, (x \cdot y^{-1})^n = 1$

Basta tomar $n = n_1 \cdot n_2$ (ya que así elevaremos suficiente a AMBAS raíces)

$$\Rightarrow (x \cdot y^{-1})^{n_1 n_2} = \frac{x^{n_1 n_2}}{y^{n_1 n_2}} = \frac{(x^{n_1})^{n_2}}{(y^{n_2})^{n_1}} = \frac{1^{n_2}}{1^{n_1}} = \frac{1}{1} = 1$$

además, $n = n_1 n_2 \geq 4 \geq 2 \Rightarrow (U, \cdot) \leq (S, \cdot)$ q.e.d.

Ahora haré un punteo de ideas, ya que no es necesario desarrollar tanto (es materia ya vista)

P4. (a) El grado es $n-1$, basta reemplazar el n, que generará el elemento de grado mayor.

(b) La subí a material docente en otro PDF que tenía, en el que considero que está bien detallada.

(c) Inducción es lo mismo de siempre, debería resultarles fácil. El paso importante es:

$$
\begin{aligned}
L(p)(x) &= L\left((x-d)^{n+1}\right) = L\left((x-d)^n (x-d)\right) \\
&= L\left((x-d)^n\right)(x-d) + (x-d)^n L(x-d) \quad (\text{por (b)}) \\
&= n(x-d)^{n-1}(x-d) + (x-d)^n \, 1 \cdot \cancel{(x-d)^{1-1}} \quad (\text{hip. induct.}) \\
&= n(x-d)^n + (x-d) = (n+1)(x-d)^n \quad //
\end{aligned}
$$

P5 (a) Probar que es grupo es fácil. Para no abeliano, basta tomar un ejemplo que no sea abeliano. Prueben con

$p(x) = x+1 \in J_2 \ \wedge \ q(x) = 2x+3 \in J_2$ (hay muchos)

$p(q(x)) = 2x+3+1 = 2x+4$

$q(p(x)) = 2(x+1)+3 = 2x+2+3 = 2x+5 \neq 2x+4 = p(q(x))$

(b) Para ver la sobreyectividad basta ver cómo está construido f

Sea $a_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, tomemos $a_1 x + x^2 \in J_2 \,/\, f(a_1 x + x^2) = a_1$

(aunque, en general, pueden tomar un elemento de la forma $a_1 x + a_2 x^2 \,/\, a_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$)

Para ver que es morfismo, usas definición y ves que cumple propiedades (corto)

(C) Usen la forma abreviada para probar que tienen un subgrupo, sean $p(x), q(x) \in H$

P.D.Q. $p(x) \Delta (q(x))^{-1} \in H$ notar que $(q(x))^{-1}$ es la inversa para Δ

Los polinomios son conmutativos, $\therefore$ al estar formado de polinomios, es conmutativo.

Mucho Éxito

Dudas a:

RODO.NUNEZ.U@GMAIL.COM

Rodolfo Núñez