p.d.q. $L(p \cdot q) = L(p) \cdot q + p \cdot L(q)$

Pasos iniciales

Vamos a llamar n al grado más alto entre q y p, y al de grado menor lo rellenaremos con ceros. De este modo los polinomios quedan:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad\qquad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

Así, los valores de $L(p)$ y $L(q)$ son:

$$L(p)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \qquad\qquad L(q)(x) = \sum_{i=1}^{n} i b_i x^{i-1}$$

Podemos ver además, que cuando $k = 0$ o cuando $i = 0$ el término al interior de la sumatoria vale 0. Por lo tanto, se puede agregar ese término a L:

$$L(p)(x) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} \qquad\qquad L(q)(x) = \sum_{i=0}^{n} i b_i x^{i-1}$$

Demostremos esta cuestión

$$\begin{aligned}
(L(p) \cdot q)(x) &= (\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}) \cdot \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \quad \text{(La primera sumatoria es constante para la segunda)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}) \cdot b_i x^i \quad \text{(Entra a la sumatoria)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} b_i x^i) \quad \text{(b_i y x^i entran a la otra sumatoria)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} (k a_k b_i) x^{i+k-1} \quad \text{(Reordenando)}
\end{aligned}$$

Acá viene el paso más trágico de toda la demostración.

Como que tenemos dos sumas una dentro de la otra.... Vemos que x está elevado a $k + i - 1$... y como tanto i como k van desde 0 a n, entonces tenemos el x siendo elevado desde el $0(-1)$ hasta el $2 \cdot n(-1)$...

Llamemos j al índice que llevará la sumatoria desde 0 a $2n$, que representará un $i + k$. La cosa es... qué es lo que se está sumando cada una de esas $2n$ veces ? Llamémoslo C_j

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} (k a_k b_i) x^{i+k-1} = \sum_{j=0}^{2n} (C_j) x^{j-1}$$

Resulta que para cada uno de esos j's tenemos muchos términos... pues son todos los k's e i's que sumados dan j.

Por lo tanto, cada término de la sumatoria, será nuevamente una sumatoria... sólo que una sumatoria especial, que no va desde un índice inicial a uno final, sino que una sumatoria con dos sub-índices, que cumplen la propiedad de que ambos sumados dan j.

Ese término al interior es:

$$C_j = \sum_{\substack{k+i=j \\ k\geq 0, i\geq 0}} (ka_k b_i)$$

Sin embargo... dos términos positivos, que sumados dan j es lo mismo que tener un sólo término que va creciendo entre 0 y j, y el otro número es simplemente lo que le falta para llegar a j... Entonces a i llamémoslo $j-k$.

De este modo, queda:

$$C_j = \sum_{k=0}^{j} (ka_k b_{j-k})$$

Entonces, llegamos al resultado para $(L(p) \cdot q)(x)$:

$$(L(p) \cdot q)(x) = \sum_{j=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^{j} ka_k b_{j-k} \right) x^{j-1}$$

Del mismo modo, para $(p \cdot L(q))(x)$ tenemos:

$$(p \cdot L(q))(x) = \sum_{j=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^{j} (j-k) a_k b_{j-k} \right) x^{j-1}$$

(Lo único que cambia es que dentro de la sumatoria, hay un $(j-k)$ en vez de un k)

Con esto, llegamos a que:

$$\begin{aligned}
(L(p) \cdot q)(x) + (p \cdot L(q))(x) &= \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=0}^{j} (ka_k b_{j-k}) x^{j-1} + \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=0}^{j} ((j-k) a_k b_{j-k}) x^{j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^{j} ((ka_k b_{j-k}) x^{j-1} + ((j-k) a_k b_{j-k}) x^{j-1}) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^{j} (k + (j-k))(a_k b_{j-k}) x^{j-1} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^{j} j (a_k b_{j-k}) x^{j-1} \right) \\
(L(p) \cdot q)(x) + (p \cdot L(q))(x) &= \sum_{j=0}^{2n} j \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right) x^{j-1} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ahora miremos qué pasa con $L(p \cdot q)$

En el apunte sale (con otros nombres de variables) que

$$(p \cdot q)(x) = \sum_{j=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^{j} a_m b_{j-k} \right) x^j$$

Tenemos escrito ese polinomio de la forma necesaria para aplicar L. Entonces:

$$
\begin{aligned}
L(p \cdot q) &= L\left(\sum_{j=0}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right) x^j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{2n} j\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right) x^{j-1}
\end{aligned}
$$

Pero igual como vimos antes con la sumatoria con k, el caso para $j = 0$ vale 0, por lo tanto podemos agregarlo a la sumatoria. Con esto,

$$
L(p \cdot q) = \sum_{j=0}^{2n} j\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right) x^{j-1}
$$

Que es exactamente a lo que habíamos llegado para $(L(p) \cdot q)(x) + (p \cdot L(q))(x)$ en la ecuación (1)