Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra 08-1

Examen

P1. (4,0 ptos.) Considere $p \neq 1$ un número natural impar fijo. Demuestre usando inducción que

$$(p^{2^n} - 1) \text{ es divisible por } 2^{n+2} \quad \forall n \geq 1.$$

Indicación: Puede serle útil usar que $\cancel{2}\,p^{2^{n+1}} = (\cancel{2}\,p^{2^n})^2$.

P2. Sea $E \neq \phi$ un conjunto y ρ una relación sobre E refleja y transitiva. Se define una nueva relación $\mathcal{R}$ sobre E como

$$a \, \mathcal{R} \, b \Leftrightarrow a \, \rho \, b \ \wedge \ b \, \rho \, a.$$

(i) (2,5 ptos.) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) (2,5 ptos.) Se define la relación Ω sobre $E/\mathcal{R}$ (conjunto cuociente de E según $\mathcal{R}$) por

$$[a]_{\mathcal{R}} \ \Omega \ [b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow a \, \rho \, b.$$

Pruabe que Ω es una relación de orden sobre $E/\mathcal{R}$.

P3. Sean $(A, *)$ y $(B, \triangle)$ dos estructuras algebraicas y $f : A \to B$ un morfismo.

(i) (1,0 ptos.) Pruebe que $\triangle$ es ley de composición interna en $f(A)$, es decir, $f(A)$ es cerrado para $\triangle$.

(ii) (3,0 ptos.) Pruebe que si $(A, *)$ es grupo, entonces $(f(A), \triangle)$ es grupo.

P4. (i) Sean $z, w \in \mathcal{C}$ tales que $|z + w| = |z - w|$, con $w \neq 0$.

i.1) (2,0 ptos.) Demuestre que $\text{Re}(z\,\bar{w}) = 0$.

i.2) (1,0 ptos.) Demuestre que $\text{Re}(\frac{z}{w}) = 0$.

(ii) (2,0 ptos.) Considere la función $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ que a cada polinomio $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ le asocia

$$F(p(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

es decir, a cada polinomio le asocia la suma de sus coeficientes.

Estudie si F es una función inyectiva y epiyectiva. Justifique.

7 de julio de 2008
Sin consultas
Tiempo: 3:00 hrs.