Control 1 – Probabilidades y Estadística – 2010

Iván Rapaport

Pregunta 2. Suponga que se tiene una moneda cuya probabilidad de salir cara es $p \neq \frac{1}{2}$ (es decir, la moneda no es perfecta). Considere el siguiente procedimiento para simular una moneda perfecta. Para $n = 1, 2, \ldots$

Etapa n : Se lanza dos veces la moneda,

- Si primero sale sello y luego cara decimos que salió SELLO.
- Si primero sale cara y luego sello decimos que salió CARA.
- En caso contrario decimos que la etapa queda INDEFINIDA.

a.- (2 puntos) Pruebe que la probabilidad de que salga SELLO en la **Etapa** n es igual a la probabilidad que salga CARA.

b.- (4 puntos) Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcule la probabilidad de que la Etapa m sea la primera que quede DEFINIDA.

Solución

a.- Definimos los siguientes eventos:

$$S_n = \textit{sale SELLO en la Etapa n, según el procedimiento descrito en el enunciado}$$
$$C_n = \textit{sale CARA en la Etapa n, según el procedimiento descrito en el enunciado}$$

Cada Etapa consta de 2 lanzamientos. La probabilidad de que salga cara en un lanzamiento es $p \neq \frac{1}{2}$ por lo que la probabilidad de que salga sello es $(1-p)$.

Luego,

- La probabilidad de que resulte SELLO en la Etapa n corresponde a la probabilidad de que salga sello en el primer lanzamiento y cara en el segundo.

  $$\Rightarrow P(S_n) = (1-p)p$$

- La probabilidad de que resulte SELLO en la Etapa n corresponde a la probabilidad de que salga cara en el primer lanzamiento y sello en el segundo.

  $$\Rightarrow P(C_n) = p(1-p)$$

Con esto se concluye claramente que $P(S_n) = P(C_n) = p(1-p)$.

b.- Sea α la probabilidad de que una Etapa quede DEFINIDA, i.e, α corresponde a la probabilidad de que en una etapa i cualquiera ($i \in \mathbb{N}$) salga CARA o salga SELLO (pues de otro modo, dicha etapa queda INDEFINIDA). Como ambos eventos son disjuntos y dado que en la parte (a) se demostró que $P(S_n) = P(C_n) = p(1-p)$, se obtiene el siguiente valor para α :

$$\alpha = P(S_i \vee C_i) = P(S_n) + P(C_n) = 2p(1-p)$$

Por otro lado, definimos X como la variable aleatoria que representa el número de la etapa que primero queda DEFINIDA (i.e, que resulten ($X-1$) "fracasos" o etapas INDEFINIDAS, antes de obtener el primero "éxito" o etapa DEFINIDA). Claramente, se tiene que $X \sim Geométrica(\alpha)$.

Luego, para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(X = m) &= P(las\ primeras\ m\text{-}1\ etapas\ sean\ INDEFINIDAS\ y\ la\ etapa\ m\ quede\ DEFINIDA) \\ &= (1-\alpha)^{m-1}\alpha \end{aligned}$$

$\therefore P(X = m) = (1-\alpha)^{m-1}\alpha$, con $\alpha = 2p(1-p)$