

Solucion Problema 2 Control 1 Probabilidades

Prof. Servet Martinez

Auxs. Andrés Fielbaum y Tomas Spencer

P2)

Cierta enfermedad se transmite en forma genética de los padres a los hijos, del siguiente modo:

Si sólo el padre presenta la enfermedad,

el hijo tendrá probabilidad β de presentarla $\beta \in (0, 1)$.

Si sólo la madre presenta la enfermedad, el hijo tendrá probabilidad α de presentarla $\alpha \in (0, 1)$.

Si ambos padres la presentan, el hijo la presentará con probabilidad 1.

Además, cada uno de los padres tiene probabilidad p de presentar la enfermedad, en forma independiente entre ellos $p \in (0, 1)$.

a) Si un tipo está enfermo, ¿Cuál es la probabilidad de que la enfermedad le haya sido transmitida sólo por la madre?

b) Si hay dos hermanos, y uno de ellos está enfermo, ¿Cuál es la probabilidad de que el otro hermano también esté enfermo?

Sol:

Definamos primero los siguientes eventos:

M= Corresponde al evento de que solo la madre tiene la enfermedad.

P= Corresponde al evento de que solo el padre tiene la enfermedad.

A= Ambos tienen la enfermedad.

H_i = corresponde a que el hijo i este enfermo.

Luego:

a) Se nos pide $P(M|H_1)$, utilizaremos bayes:

$$P(M|H_1) = \frac{P(H_1|M)P(M)}{P(H_1)}$$

Entonces resolvamos estas 3 probabilidades por separado:

$P(H_1|M) = \alpha$, Esto se tiene por el enunciado.

$P(M) = p(1-p)$, Esto es porque se nos pide la probabilidad de que la madre

este enferma y que el padre NO este enfermo.

Y para obtener $P(H_1)$, utilizaremos probabilidades totales.

$$\begin{aligned} P(H_1) &= P(H_1|M)P(M) + P(H_1|P)P(P) + P(H_1|A)P(A) = \\ &= \alpha * p * (1-p) + \beta * p * (1-p) + 1 * p^2 \end{aligned}$$

Finalmente, juntando todo:

$$P(M|H_1) = \frac{P(H_1|M)P(M)}{P(H_1)} = \frac{\alpha p(1-p)}{\alpha * p * (1-p) + \beta * p * (1-p) + 1 * p^2}$$

b) Usaremos la definición de probabilidad condicional y luego probabilidades totales,

esto es:

$$P(H_1|H_2) = \frac{P(H_1 \cap H_2)}{P(H_2)} = \frac{P(H_1 \cap H_2|M)P(M) + P(H_1 \cap H_2|P)P(P) + P(H_1 \cap H_2|A)P(A)}{\alpha * p * (1-p) + \beta * p * (1-p) + 1 * p^2}$$

El denominador es analogo al de la pregunta anterior.

$$= \frac{\alpha^2 * p * (1-p) + \beta^2 * p * (1-p) + 1 * p^2}{\alpha * p * (1-p) + \beta * p * (1-p) + 1 * p^2}$$

En el numerador se consideró la independencia con la que los hermanos se contagiaban.