Clase Auxiliar n° 5:Probabilidades y estadística

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

28 de abril del 2010

P1. Sean $(X_i)_{i=1\ldots N}$ variables aleatorias independientes identicamente distribuidas con densidad $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, es decir $\mathbb{P}(X_i = j) = a_j$ para cualquier i. Calcule la probabilidad de que al menos n de estas variables tomen un valor menor o igual a k (k cualquiera)

P2. Sean X, Y v.a i.i.d con densidad $f(x) = 2^{-x}$, con $x = 1, 2, \ldots ...$. Calcule:

a) $\mathbb{P}(\text{mín}(X, Y) \leq x)$

b) $\mathbb{P}(Y > X)$

c) $\mathbb{P}(Y \geq kX)$ con $k \in \mathbb{N}$

d) X divide a Y

P3. La ley de los números pequegnos

a) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias que siguen distribuciones binomiales de parámetros n y p_n, con $p_n = \frac{p}{n}$. Pruebe que $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$, con X con distribución Poisson parámetro p.

Indicación: recuerde que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k!\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{n^k} = 1$

b) En una marca de autos la probabilidad de que un auto salga defectuoso es 0.01. ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de 300 motores haya exactamente 5 autos defectuosos?

P4. Sea F función de distribución; es decir, creciente, continua por la derecha, con límite por la izquierda, $\lim F(x)_{x\to-\infty} = 0, \lim F(x)_{x\to\infty} = 1$.
Definamos $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ F \text{ no es continua en } x\}$. Note que $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x) - f(x^-)| > 0\}$.

a) Sea $A_N = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x) - f(x^-)| > \frac{1}{N}\}$ con $N > 0$ Pruebe que $|A_N| \leq N$

b) Pruebe que $A = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} A_N$

c) Concluya que F tiene a lo más una cantidad numerable de puntos de discontinuidad

d) Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ variable aleatoria, y sea $I = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \mathbb{P}(\omega : X(\omega) = x) > 0\}$. Demuestre que I es a lo más numerable.