Universidad de Chile	Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Control 2, 17 de Octubre de 2005

PROFESOR: SERVET MARTÍNEZ
AUXILIARES: BOLÍVAR DÍAZ L., FRANCISCO SILVA A.

P1.- a) Sea X un v.a. uniformemente distribuída en $(0,1)$. Muestre que la función de densidad de la variable aleatoria $Y = \tan(\pi X)$ es

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}, \quad -\infty < y < \infty .$$

b) Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = cx(y-x)\exp(-y) \text{ para } 0 \le x \le y < \infty,$$

siendo $c > 0$ la constante (únicamente definida) tal que f_{XY} es una densidad de probabilidad (continua).

b) Calcule las funciones de densidad condicionales, $f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)$ y $f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x)$.

P2.- Sea Y v.a. a valores en $\mathbb{N}^* = \{1,2,...\}$ con densidad discreta de probabilidad,

$$\mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{(e-1)\,j!} \text{ para } j \in \mathbb{N}^*. \qquad (\star)$$

Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una secuencia de variables aleatorias uniforme distribuídas en $[0,1]$ independientes entre sí e independientes de Y. Sea $M = \text{máx}\{U_1, U_2, \ldots, U_Y\}$.

a) Muestre que $(\star)$ efectivamente define una densidad de probabilidad en $\mathbb{N}^*$.

b) Muestre que M tiene funcion de densidad de probabilidad dada por

$$f_M(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

P3.- a) Sea X una v.a. definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ cuya función de distribucion F_X es continua estrictamente creciente. Considere ahora la v.a $Z = F_X(X)$ definida sobre el mismo espacio de probabilidad. Pruebe que la distribución de Z es uniforme en $[0,1]$.

b) Fije un entero positivo n. Sea X una v.a discreta uniformemente distribuída en el conjunto $H = \{k/n : k = 0,1,....,n\}$, esto es $\mathbb{P}(X = k/n) = 1/(n+1)$. Asuma que se hacen N lanzamientos independientes de una moneda con probabilidad de cara igual a X. Sea Y la v.a. que indica el numero de caras de estos N lanzamientos. Calcule $\mathbb{P}(X = k/n\,|\,Y = m)$

P4.- Sea $(X_i : i \ge 1)$ una secuencia de variables aleatorias independientes distribuídas según Bernoulli(p), donde $p \in (0,1)$. Fije $n \ge 2$. Considere laa variables aleatorias $Z_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$ para $j = 1,..,n$.

a) Calcule la densidad (discreta)

$$p_{Z_1,...,Z_{n-1},Z_n}(k_1,...,k_{n-1},k_n),$$

para los distintos valores $k_1,...,k_{n-1},k_n$ donde esta no se anule.

b) Encuentre la densidad condicional (discreta)

$$p_{Z_3,...,Z_{n-1},Z_n\,|\,Z_1+Z_2}(k_3,...,k_{n-1},k_n\,|\,m)$$

para los valores $k_3,...,k_{n-1},k_n,m$ donde la densidad este definida y no se anule.

P5.- Considere $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ el grupo donde el conjunto $\mathbb{Z}_n = \{0,1,....,n-1\}$ está dotado de la operación $+_n$ que es la suma módulo n. Sea X una v.a. discreta a valores en $\mathbb{Z}_n$ uniformemente distribuída, esto es $\mathbb{P}(X=k) = 1/n$ para todo $k \in \mathbb{Z}_n$, y sea Y una v.a. a valores en $\mathbb{Z}_n$ independiente de X. Muestre que la v.a. $X +_n Y$ es una v.a. uniformemente distribuida en $\mathbb{Z}_n$.

Tiempo: 2:30 horas. **Nota:** Todas las preguntas tienen igual valor.