Universidad de Chile **Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**

Control 2- MA34A

Lunes 2 de Octubre, 2006

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Bolivar Díaz, Francisco Silva

P1. Sea $p \in (0,1)$, considere $\{X_i : i \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes Bernoulli(p).
a) Para $r \geq 1$ sea N_r la variable aleatoria que indica el índice en el cual se alcanza el r-ésimo 1, es decir, $N_r(\omega) = \inf\{k \geq 1 : \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega) = r\}$ (por ejemplo si $r = 2$, en la realización $(X_i(\omega) : i \geq 1) = 001001001...$, se tiene $N_2(\omega) = 6$). Pruebe que

$$\mathbb{P}(N_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad \forall\ k = r, r+1, ...$$

b) Sean $T_1 = N_1 = \inf\{i \geq 1 : X_i = 1\}$ y $T_2 = N_2 - T_1$. Pruebe $\mathbb{P}(T_1 = j, T_2 = k) = p^2(1-p)^{j+k-2}$. Usando esto pruebe que T_1 y T_2 son variables aleatorias independientes y que cada una sigue una distribución Geométrica(p).

P2. a) Sea X_1 una variable aleatoria continua distribuída uniformemente en $[0,1]$. Defina la variable aleatoria X_2 como $X_2 := \sqrt{X_1}$. Encuentre la densidad de X_2.
b) Sean S_1 y S_2 dos variables aleatorias exponenciales independientes de parámetros $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ respectivamente. Calcule $\mathbb{P}(S_1 \geq S_2)$.

P3. a) Sea X una variable aleatoria Geométrica(p), con $p \in (0,1)$. Pruebe que $P(X = n + k \mid X > n) = P(X = k)\ \ \forall\ n \geq 0,\ k \geq 1$.
b) Sea $\{X_i : i \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes Bernoulli(p) con $p \in (0,1)$. Sea $N : \Omega \to \mathbb{N}$ una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson de parámetro λ. Defina la variable aleatoria S como

$$S(\omega) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega), & \text{si } N(\omega) \geq 1 \\ 0, & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

Pruebe que S sigue una distribución de Poisson de parámetro λp.

Recuerdo Le recordamos que para $p \in (0,1)$ una variable aleatoria X verifica: $X \sim$ Bernoulli (p) si $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$ y $X \sim$ Géometrica (p) si $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p\ \ \forall k \geq 1$.

Nota Todos los problemas valen lo mismo, y dentro de cada problema cada parte vale lo mismo. **Tiempo**: 2 horas.