Universidad de Chile **Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**

Guía de Variables Aleatorias- MA34A
Primavera del 2006

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Bolivar Díaz, Francisco Silva

P1. Sea X una variable aleatoria continua con densidad $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$

a) Haga un bosquejo de la función de distribución de X.

b) Encuentre la probabilidad de los siguientes eventos:
b.1)$\{|X| \leq 2\}$
b.2)$\{|X| \leq 2 \text{ ó } X \geq 0\}$
b.3)$\{|X| \leq 2 \text{ y } X \geq -1\}$
b.4)$\{|X| + |X-3| \leq 3\}$
b.5)$\{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0\}$
b.6)$\{e^{\sin \pi X} \geq 1\}$
b.7)$\{X \text{ es irracional }\}$

P2. Considere una secuencia de 5 lanzamientos de una moneda cuya probabilidad de cara vale $p \in (0,1)$. Sea X la variable aleatoria que indica el número de veces en que una cara es seguida inmediatamente por un sello. Encuentre la distribución de X.

P3. Sea X_1 una variable aleatoria continua con densidad:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sea $X_2 = X_1^2$. Encuentre la distribución y densidad de X_2.

P4. Sea X_1 una variable aleatoria distribuída uniformemente en 0 y 2π. Sea $X_2 = \sin X_1$. Encuentre la densidad de X_2.-

P5. Sea X_1 una variable aleatoria continua con densidad:

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Definimos

$$X_2 = \begin{cases} X_1, & \text{si } X_1 \leq 1 \\ \frac{1}{X_1}, & \text{si } X_1 > 1 \end{cases}$$

Encuentre la densidad de X_2.

P6. Sea X_1 una variable aleatoria continua con una distribución uniforme entre -1 y 1. Haga un bosquejo de la función de distribución y de la densidad de $X_2 = e^{-X_1}$.

P7. Sea X_1 una v.a continua con densidad

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \\ 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Definimos

$$X_2(x) = \begin{cases} 2X_1, & \text{si } X_1 \leq 2 \\ X_1^2, & \text{si } X_1 > 2 \end{cases}$$

Encuentre la densidad de X_2.

P8. Sea X_1 como en el problema 7 y defina

$$X_2(x) = \begin{cases} 2X_1, & \text{si } X_1 \leq 2 \\ 5, & \text{si } X_1 > 2 \end{cases}$$

Haga un bosquejo de la función distribución de X_2. ¿Es X_2 una v.a continua?

P9. Sea X_1 una v.a continua con función distribución F_1 y sea $X_2 = F(X_1)$. Pruebe que X_2 es una v.a uniforme entre 0 y 1.

P10. Sea X_1 un número escogido aleatoriamente entre 0 y 1 con densidad f_1. Sea X_2 el segundo dígito en la expansión decimal de X_1 (Para evitar ambigüedad escriba $0,299...$ como $0,30$). Pruebe que $X_2 = k$ si y sólo si $i + 10^{-1}k < 10X_1 < I + 10^{-1}(k+1)$ para algún $i = 0, 1, ..., 9$. Encuentre la distribución de X_2 en función de la densidad f_1.

P11. Un proyectil es lanzado con rapidez inicial v_0 en un ángulo θ distribuido uniformemente entre 0 y $\pi/2$. Si X es la distancia alcanzada por el proyectil al caer nuevamente a tierra, encuentre la densidad de X. (Considere sólo el efecto de la gravedad)

P12. Sean X_1 y X_2 v.a independientes. Asuma que X_1 sigue una distribución binomial de parámetros n y p con $0 < p < 1$. Suponga que X_2 sigue una distribución binomial de parámetros m y p (el mismo p que antes). Calcule $\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_1 + X_2 = k)$ e interprete el resultado intuitivamente.(Le puede servir que $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$).

P13. Sean X, Y v.a independientes donde cada una sigue una distribución geométrica de parámetro p. Pruebe que si $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \quad m < n$, entonces

$\mathbb{P}(X=m|\ X+Y=n)=\frac{1}{n-1}$.

P14. Sean X_1, X_2 v.a continuas independientes donde cada una sigue una distribución uniforme entre 0 y a, con $a\in\mathbb{R}^+$. Sea $Y=min\{X_1,X_2\}$. Calcule la distribución de Y.

P15. Sea $a\in\mathbb{R}$ y

$$A=\begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{n}(Y-i)+a & aY \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

Calcule la probabilidad de que A sea invertible cuando Y sigue una distribución geométrica de parámetro p. Calcule la misma probabilidad asumiendo que Y es una v.a continua con densidad f.

P16. Una urna contiene t_1 bolas de color C_1, t_2 de color C_2,..., t_k de color C_K. Se extraen n bolas sin reemplazo. Calcule la probabilidad de extraer n_1 bolas de color C_1, n_2 bolas de color C_2,.., n_k bolas de color C_k. $(n=n_1+...+n_k)$.

P17.i)En este problema generalizaremos la distribución binomial a una distribución conocida como multinomial. Supongamos que tenemos n experimentos independientes donde cada uno de ellos puede dar k resultados distintos, llamémoslos b_1, b_2,...,b_k. Suponga que en cada experimento la probabilidad de que el resultado sea b_i es p_i ($\sum_{i=1}^{k}p_i=1$). Pruebe que la probabilidad de obterner n_1 resultados b_1, n_2 resultados b_2,..., n_k resultados b_k $(n_1+n_2+...+n_k=n)$ es $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$. Note que cuando $b_1=0$, $b_2=1$, la descripción del problema corresponde a el cálculo de la distribución binomial.(**Indicación**: Razone análogamente a el cálculo de la distribución de una v.a binomial y simplifique los coeficientes binomiales)

ii) Se sabe que de las 100 personas que viven en la villa Nueva, 50 siempre dicen la verdad, 30 siempre mienten y 20 siempre se niegan a responder. Una muestra de 30 personas es extraída sin reemplazo.
a)Encuentre la probabilidad de que la muestra contenga 10 personas de cada categoría.
b)Encuentre la probabilidad de que en la muestra se encuentren exactamente 12 mentirosos.

P18. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias discretas que siguen distribuciones binomiales de parámetros n y p_n. Suponga que se cumple que $np_n\to\lambda\in\mathbb{R}$. Pruebe que la funciones de probabilidad de X_n tienden puntualmente a la función de probabilidad de una variable aleatoria Poisson de parámetro λ.

P19. En este problema estudiaremos la propiedad que se conoce como "pérdida de memoria de la exponencial". Pruebe que una v.a T sigue una distribución exponencial si y sólo si cumple la siguiente propiedad:

$$\mathbb{P}(T > s + t | T > s) = \mathbb{P}(T > t) \ \forall t, s \geq 0$$

P20. Sean S y T v.a exponenciales independientes de parámetros α y β respectivamente. Calcule la distribución de $Y = min\{S, T\}$.

P21. Sean $\{T_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de v.a exponenciales independientes de parámetros q_k, donde los q_k satisfacen $\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k < \infty$. Defina la variable aleatoria T :=inf $\{T_k \backslash\ k \in \mathbb{N}\}$. Sea K la v.a que indica el entero en que el ínfimo anterior se alcanza.(si el ínfimo no se alcanza defina $K = \infty$). Pruebe que K y T son independientes, que T sigue una distribución exponencial de paramétro $q := \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k$ y que $\mathbb{P}(K = k) = \frac{q_k}{q}$.