P3) a) Recordemos que si $X \sim \text{Geométrica}(p) \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p \quad \forall\, k \geq 1$

$$\mathbb{P}(X=n+k \mid X>n) = \frac{\mathbb{P}(X=n+k \wedge X>n)}{\mathbb{P}(X>n)} = \frac{\mathbb{P}(X=n+k)}{\mathbb{P}(X>n)} \quad (1)$$

Esta última igualdad puesto que si $X=n+k \Rightarrow X>n$ (pues $k \geq 1$)

Pero $\mathbb{P}(X=n+k) = (1-p)^{n+k-1} p \quad (2) \quad \mathbb{P}(X=k)$

$$\mathbb{P}(X>n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p$$

$$= 1 - \frac{p}{(1-p)} \sum_{k=1}^{n} (1-p)^k$$

$$= 1 - \frac{p}{(1-p)} \left[\frac{(1-p)^{n+1} - (1-p)}{(1-p) - 1} \right]$$

$$= \cancel{1} + (1-p)^n - \cancel{1} = (1-p)^n \quad (3)$$

Poniendo (2) y (3) en (1) $\Rightarrow \mathbb{P}(X=n+k \mid X>n) = \dfrac{(1-p)^{n+k-1} p}{(1-p)^n} = (1-p)^{k-1} p = \mathbb{P}(X=k)$

b) $$\mathbb{P}(S=k) = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(S=k \mid N=i) \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

Por ind. y el hecho de que S suma de Bernoulli es Binomial $=$

$$\sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{p^k (1-p)^{i-k} \lambda^i e^{-\lambda}}{k!\,(i-k)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p^k (1-p)^i \lambda^{i+k} e^{-\lambda}}{k!\,(i+k-k)!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-p)^i \lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^i}{i!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}$$

Luego $S \sim \text{Poisson}(\lambda p)$