Control 3 MA3403-3, 2010/1

Profesor Servet Martínez, Profesores auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

P1. Sea $(X_n : n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias. Recuerde que $X_n \to 0$ en Probabilidad si y solo si $\forall \epsilon > 0$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n| > \epsilon\right) = 0$. Se probará que $X_n \to 0$ en Probabilidad si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = 0$, donde $g(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ para $x \in \mathbb{R}$.

(i) Pruebe que la restricción $g : \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ es una biyección estrictamente creciente.

(ii) Sea X una v.a. y $\epsilon > 0$.

(ii1) Pruebe que

$$\mathbb{P}(X > \epsilon) = \mathbb{P}(g(X) > g(\epsilon)) \leq g(\epsilon)^{-1}\mathbb{E}(g(X)).$$

(ii2) Pruebe que

$$\mathbb{E}\left(g(X)\mathbf{1}_{|X|\leq\epsilon}\right) \leq g(\epsilon)\mathbb{P}(|X| \leq \epsilon).$$

(ii3) Pruebe que

$$\mathbb{E}\left(g(X)\mathbf{1}_{|X|>\epsilon}\right) \leq \mathbb{P}(|X| > \epsilon).$$

(iii1) Pruebe usando $(ii1)$, que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = 0$ implica $X_n \to 0$ en Probabilidad.

(iii2) Pruebe usando $(ii2)$ y $(ii3)$, que $X_n \to 0$ en Probabilidad implica $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = 0$.

P2. Recuerde que

$$\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-y} y^{v-1} dy \text{ para } v > 0.$$

(i) Sean $v > 0$ y $\lambda > 0$. Diremos que la v.a. positiva X se distribuye según una Gamma(v, λ), escribimos $X \sim$ Gamma(v, λ), si es absolutamente continua y su función de densidad f_X verifica $f_X = f$ donde f es la función de densidad siguiente:

$$f(x) = \frac{\lambda^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-\lambda x} \text{ para } x > 0,$$

y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

Pruebe que la función generadora de momentos de X, $\psi_X(s) = \mathbb{E}\left(e^{-sX}\right)$ para $s \geq 0$ verifica

$$\psi_X(s) = \left(\frac{s}{\lambda} + 1\right)^{-v}.$$

(ii) Pruebe que si $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias positivas independientes tal que $X_i \sim \text{Gamma}(v_i, \lambda)$ para $i = 1, .., n$, entonces $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}\left(\sum_{i=1}^n v_i, \lambda\right)$.

Hint: La función de distribución de una variable aleatoria positiva está determinada por su función generadora de momentos.

(iii) Sea $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Pruebe que $Y^2 \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(iv) Sean $Y_1, ..., Y_n$ variables aleatorias i.i.d. con $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (para $i = 1, .., n$). Entonces $\sum_{i=1}^n Y_i^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Nota: La distribución Gamma $\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ se la denota χ_n^2 y se la llama chi-cuadrado con n grados de libertad.

P3. *(i)* Sea X variables aleatoria con $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Calcule la función generadora de momentos de X, $\psi_X(s) = \mathbb{E}\left(e^{-sX}\right)$, $s \geq 0$.

(ii) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ para $i = 1, 2$. Pruebe que $X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

(iii) Muestre que X condicionada al evento $\{X_1 + X_2 = n\}$ se distribuye según una Binomial(n, α), calcule el valor de α.

Tiempo: 3 horas.

Nota: Los tres problemas tienen el mismo valor (2.0 punto). En el problema 1. las partes (i), $(ii1)$, (ii2),(ii3),(iii1)$e(iii2)$ tiene todas igual valor. En los problema 2. y 3. todas las partes tiene el mismo valor.