Control 2 MA3403-3, 2010/1

Profesor Servet Martínez, Profesores auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

Consideraremos $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad fijo.

P1 *(i)* Sea X v.a. tal que $X \sim$ Binomial(n, p) con $p \in (0,1)$. Pruebe

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.$$

(ii) Sea X v.a. tal que $X \sim$ Exponencial(λ) (con $\lambda > 0$). Pruebe (si quiere por inducción) que

$$\forall n \geq 1 : \quad \mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}\,.$$

P2 Sean $(X_i : i \geq 1)$ y $(Y_j : j \geq 1)$ dos familias de variables aleatorias independientes, que además son independientes entre sí. Supondremos que $X_i \sim$Bernoulli(p) e $Y_j \sim$Bernoulli(q) para todos i, j, donde $0 < p, q < 1$. Recuerde que para dos funciones reales $g(X_i : i \geq 1)$ y $h(Y_j : j \geq 1)$, estas funciones son variables aleatorias independientes entre sí.

Sea $Z = \inf\{j \geq 1 : Y_j = 1\}$. Considere la variable aleatoria

$$W = \sum_{i=1}^{Z} X_i$$

(es decir para $\omega \in \Omega$ se tiene $W(\omega) = \sum_{i=1}^{Z(\omega)} X_i(\omega)$.)

(i) Para $n \geq 1$ calcule $\mathbb{P}(Z = n)$; y pruebe que $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{q}$

(ii) Para $n \geq k$ calcule la probabilidad condicional $\mathbb{P}(W = k \,|\, Z = n)$.

(iii) Muestre que $\mathbb{P}(W = k) = C\beta^k$ para $C = \frac{q}{1-q}\frac{1}{(1-(1-p)(1-q))}$, $\beta = \frac{p(1-p)(1-q)}{1-(1-p)(1-q)}$.

Hint: Para $\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ se tiene
$\varphi^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-s)^{k+1}}$.

(iv) Calcule $\mathbb{E}(W)$.

P3 *(i)* Sea $U \sim$Uniforme$[0,1]$ y $p \in (0,1)$. Considere la variable aleatoria $Y = \mathbf{1}_{U\leq p}$ (es decir para $\omega \in \Omega$ se tiene $Y(\omega) = \mathbf{1}_{U(\omega)\leq p}$ que es $= 1$ si $U(\omega) \leq p$ y es $= 0$ si $U(\omega) > p$). Pruebe que $Y \sim$Bernoulli(p).

(ii) Sea X v.a. tal que $X \sim$ Uniforme$[0,1]$. Se tiene que $Y = -\log X$ es v.a. absolutamente continua. Pruebe que $Y \sim$Exponencial(1).

Tiempo: 3 horas.

Nota: Todos los problemas tienen el mismo valor (2.0 punto) y al interior de cada problema las partes tienen igual valor.