Cotas inferiores de Complejidad Aleatorizada.

Note Title 10/19/2010

Hay problemas donde

① Un algoritmo aleatorizado es mejor ?
(que un deterministico)
busqueda de moneda, en el caso donde una proporcion constante de cajas contienen moneda.

② No hay ningun algoritmo aleatorizado mejor ?
(que un deterministico)
– busqueda en arreglo ordenado?

Tecniques de Cotas Inferiores

① Adversario → Problematica con Aleatorización

(para más, ver "Interactive Proofs")

② "Information Theory Lower Bound"

↪ Arbol de Decision

⇒ Valido por algoritmos aleatorizados

⇒ $\Omega(\lg n)$ comparaciones en el peor caso, en promedio sobre el aleatorio del algo

⇒ Busqueda ordenada = alea no ayuda (en el modelo de comparacion) igual para ordenar.

Formalizacion

Dado un algoritmo aleatorizado $(A_r)_r$

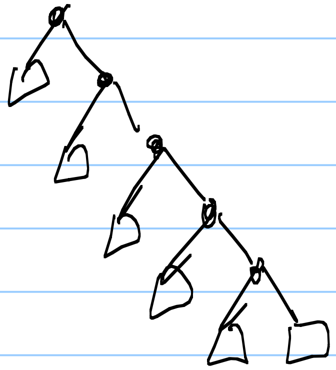
$$C\Big(\underset{\underset{\alpha^T M b}{\parallel}}{(A_r)_r}, I\Big) = \underset{\underset{\text{esperanza}}{\uparrow}}{E_r}\Big(C(A_r, I)\Big)$$

$$C\big((A_r)_r\big) = \max_{I} C\big((A_r)_r, I\big)$$

= "Rendimiento en el peor caso de $(A_r)_r$

Problema "Busqueda de Moneda"

Se puede usar "Arboles de Decision" para mostrar una cota inferior?



Si, pero no da una buena cota inferior

Problema de Interseccion (elementario)

→ Se necessita estrategias más sofisticadas para mostrar cotas inferiores.

Notaciones

$a^T M b$

$$a = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow a \qquad b = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow b$$

complejidad de algoritmo a sobre b

$a^T M \beta = \boxed{\quad ?}$

$\alpha^T M b = \boxed{\quad}$

$$\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

$\alpha^T M \beta$

complejidad en promedio de algoritmo aleatorizado α sobre distribucion β

Th de Min Max

Complejidad aleatorizada

$$\|$$

$$\min_{\alpha} \max_{b} \; \alpha^{T} M b \; = \; \max_{\beta} \min_{\alpha} \; \alpha^{T} M \beta$$

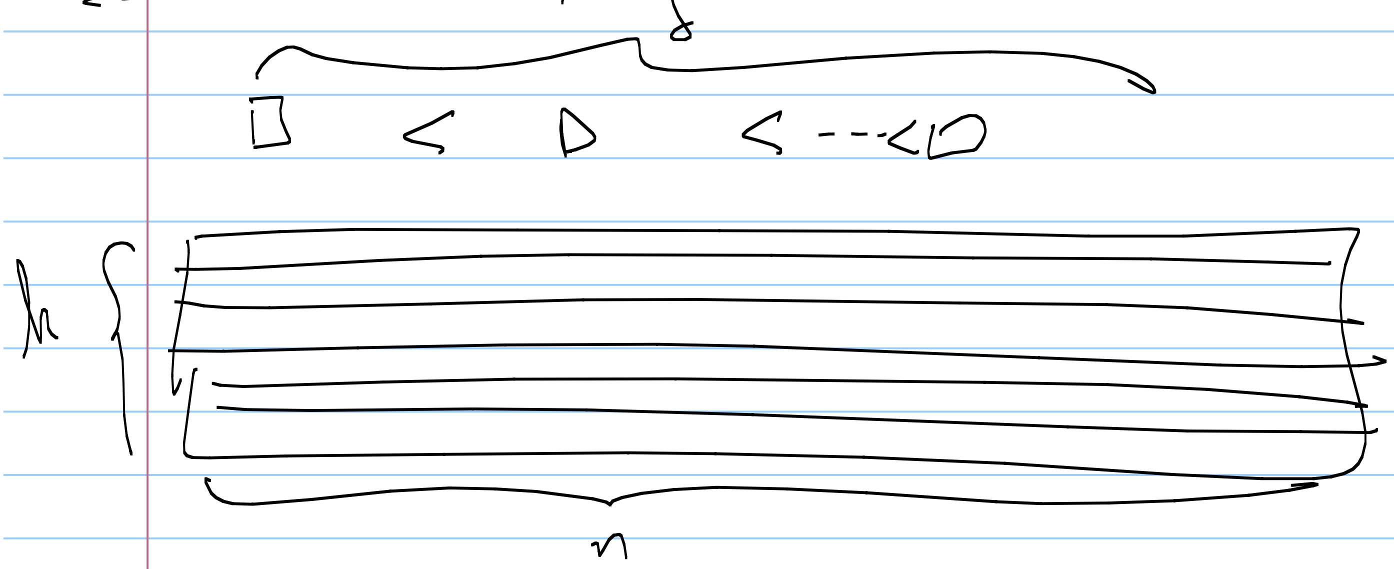
la complejidad del mejor algoritmo aleatorizado en su peor instancia

=

la complejidad del mejor algo deterministico en la peor distribucion possible

$$\geq \; \min_{\alpha} \; \alpha^{T} M \beta_0 \quad \forall \beta_0$$

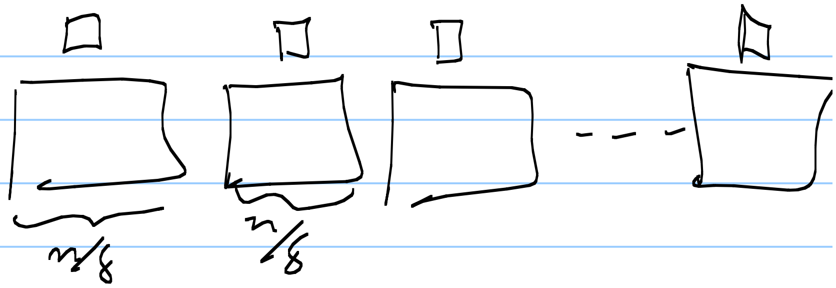
Ejemplo de Aplicación: Problema de Intersección



Cota superior

$2\delta k \lg(n/\delta)$ (por concavidad del lg)

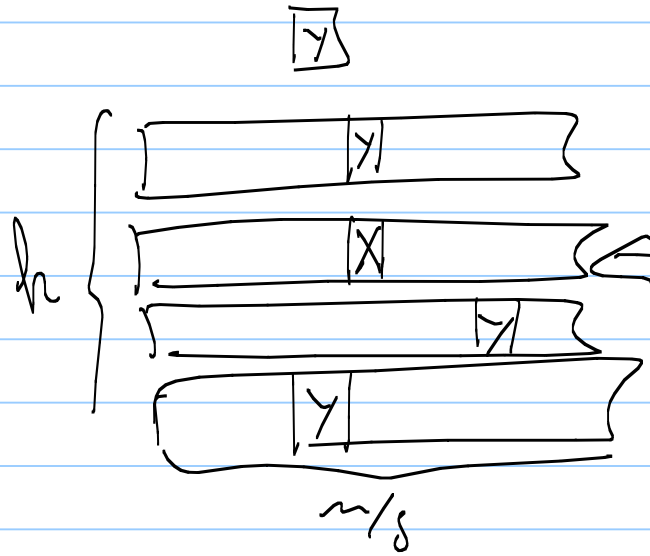
Cota inferior



↓

Reducción al problema de intersección "elementario"

Pb Interseccion elementario



$\Omega(k \lg n/g)$ det

β_0 = distribucion de instancias tal que Y presente en k-1 arreglo en posiciones aleatorizadas

$\Omega(k \lg n/g)$ alea

⇒ Da una cota inferior de $\Omega(\delta k \lg n/\delta)$ para el problema de Interseccion,

⇒ el algoritmo deterministico es OPTIMAL a dentro de todos los algoritmos aleatorizados

¿ La aleatorizacion puede ayudar o no?

Si la cantidad de arreglos que no contienen los δ elementos $\gg 1$

$= n$

Tarea Si $n = k/2$ (para cada elemento de los δ)

cual es la | cota superior?
| cota inferior?

⇒ Si, la aleatorizacion ayuda.