

## 5.5 Teorema general de la energía. Continuación.

Habíamos obtenido que al integrar la primera ley de la termodinámica en un tubo de flujo, considerando además flujo permanente, propiedades homogéneas en las secciones 1 y 2, el principio de la conservación de la energía queda escrito como

$$G(g(B_2 - B_1) + (u_2 - u_1)) = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW_t}{dt} - \frac{dW_e}{dt} \quad (5.77)$$

donde  $G$  es el gasto,  $B_1$  y  $B_2$  los Bernoulli de la entrada y salida del tubo de flujo, respectivamente,  $\hat{Q}$  es el calor entregado externamente al sistema,  $W$  trabajo mecánico realizado por el sistema sobre el medio externo, el cual descompusimos entre trabajo externo  $W_e$  que se debe a bombas o turbinas, y  $W_t$  el trabajo asociado a los esfuerzos viscosos del fluido.

### 5.5.1 Concepto de las líneas de energía

Consideremos el caso simple para un fluido ideal tal que los esfuerzos viscosos no existen, y además consideramos que  $W_e$  y  $\hat{Q}$  son cero. Es así que la energía interna  $u$  es también cero dado que ni la fricción ni fuentes externas pueden cambiar la temperatura del fluido, y obtenemos:

$$B_1 = B_2 \quad (5.78)$$

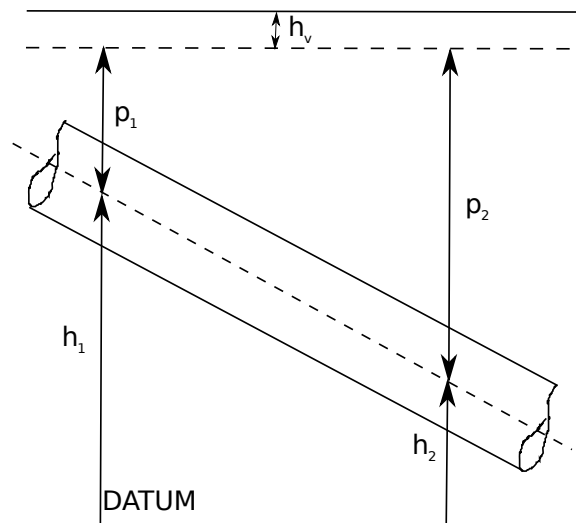
caso que ya vimos con anterioridad, sin embargo, a partir del principio de conservación de la energía extendimos este caso a un tubo de flujo, donde una tubería es, por definición, un tubo de flujo donde podemos analizar este resultado. Dado que relacionamos  $B$  con lo que denominamos alturas de energía (presión, velocidad y geométrica), podemos considerar el caso general de una tubería de diámetro  $D$  **Figura 5.5**. Si el caudal que circula en la tubería es  $Q$ , entonces la altura de velocidad es

$$h_v = \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4} \quad (5.79)$$

entonces, si  $B$  es constante al igual que el diámetro  $D$ , entonces la presión en cada punto de la tubería está determinada por

$$\frac{p}{\gamma} = B - \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4} - h \quad (5.80)$$

donde  $h$  es la altura geométrica del eje de la tubería. Luego, la pregunta es cual es el valor de  $B$ , el cual queda determinado por las condiciones de borde del problema. Por ejemplo, si no hay pérdidas en el sistema y se sabe que el flujo en la tubería es alimentado por un estanque cuya superficie libre se encuentra a una cota  $H$  respecto del Datum, entonces  $B = H$  ya que la velocidad dentro del estanque es cero.



**Figura 5.5:** Líneas de energía

Este resultado para el flujo en tuberías es igualmente válido para el flujo en canales abiertos que cumplan con la ley de hidrostática  $p/\gamma + h = cte$ , donde la altura del Bernoulli queda definida como la altura de la superficie libre, más la altura de velocidad  $h_v$ .

Veamos ahora el caso donde la tasa de trabajo externo no es cero, vale decir,

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = P \quad (5.81)$$

donde  $P > 0$  indica que el trabajo es hecho por el flujo (turbina) donde la energía del flujo es transformada en, por ejemplo, energía eléctrica en el caso de turbinas; mientras que  $P < 0$ , el trabajo es entregado por el medio externo al sistema (bomba). Si el fluido es ideal y el sistema es adiabático, entonces (5.77) queda

$$G (g (B_2 - B_1)) = -P \quad (5.82)$$

Luego, dado que  $G = \rho Q$ , obtenemos

$$B_2 - B_1 = -\frac{P}{\gamma Q} \quad (5.83)$$

- Caso turbina, donde  $P > 0$ , entonces

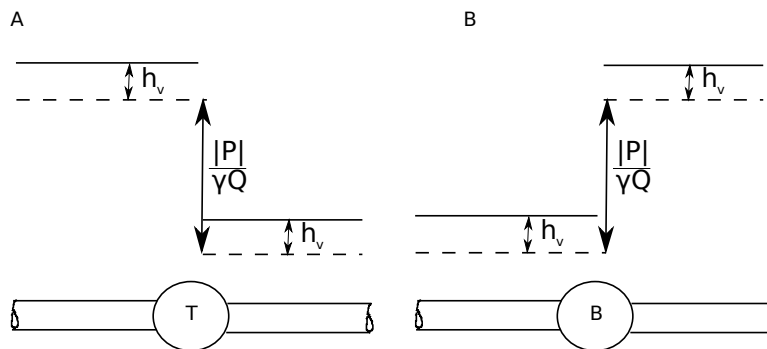
$$B_2 = B_1 - \frac{|P|}{\gamma Q} \quad (5.84)$$

donde  $P$  es la potencia generada, y el  $B_2$  resulta ser menor que  $B_1$ , cosa que se traduce en que  $p_2 < p_1$  para el caso que el diámetro de la tubería sea constante **Figura 5.6A**.

- Caso bomba, donde  $P < 0$ , entonces

$$B_2 = B_1 + \frac{|P|}{\gamma Q} \tag{5.85}$$

donde  $P$  es la potencia entregada, tal que  $B_2 > B_1$ , a igual que  $p_2 - p_1 = \frac{|P|}{Q}$  para el caso que el diámetro de la tubería sea constante **Figura 5.6B**. El término  $\frac{|P|}{\gamma Q}$  suele llamarse como altura de elevación de la bomba.



**Figura 5.6:** Líneas de energía para el caso de una turbina (A) y una bomba (B)

### 5.5.2 Extensión al caso líquidos reales

En fluidos reales, los esfuerzos tangenciales no son nulos, resultando que la condición de borde de no resbalamiento impone gradientes de velocidades en las secciones 1 y 2 del tubo de flujo. En este caso, el supuesto de considerar condiciones homogéneas en  $S_1$  y  $S_2$  no es válido. Además, al considerar esfuerzos viscosos, el trabajo asociado a éstos deja de ser nulo, tal que  $B = cte$  no es válido.

Veamos el caso del flujo caracterizado por un perfil de velocidades, aunque vamos a considerar que la ley hidrostática de presiones es válida, por lo tanto,  $p/\gamma + h = cte$ . Si se recuerdan de la segunda parte de este capítulo, el término que involucra promedios en las secciones de  $S_1$  y  $S_2$  del tubo de flujo es:

$$\int_S (\rho u + \gamma B) (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS \tag{5.86}$$

Entonces, si dejamos de lado la energía interna  $u$ , y consideramos un flujo con líneas de corriente paralelas, el término  $(\vec{v} \cdot \hat{n})$  se reduce a la velocidad puntual del flujo a lo largo de

una línea de corriente,  $v$ , y por lo tanto

$$\int_S \gamma B v dS = \int_S \gamma \left( \frac{v^3}{2g} + \left( \frac{p}{\gamma} + h \right) v \right) dS = \gamma \int_S \frac{v^3}{2g} dS + \int_S \gamma \left( \frac{p}{\gamma} + h \right) v dS \quad (5.87)$$

pero,  $p/\gamma + h = cte$ , y entonces si definimos la velocidad media del flujo  $\bar{v}$  como

$$\bar{v} = \frac{1}{S} \int_S v dS \quad (5.88)$$

podemos definir el Bernoulli medio en la sección  $\bar{B}$  como

$$\bar{B} = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h \quad (5.89)$$

donde  $\alpha$  es el *coeficiente de Coriolis* definido como:

$$\alpha = \frac{1}{S\bar{v}^3} \int_S v^3 dS \quad (5.90)$$

El valor de  $\alpha$  depende del tipo de escurrimiento, aunque si el perfil de velocidad es uniforme, se tiene que  $\alpha = 1$ , para el régimen laminar en una tubería (perfil parabólico),  $\alpha = 2$  (se recomienda que lo demuestre), y para el flujo laminar con superficie libre  $\alpha = 3.86$  (se recomienda que lo demuestre). Sin embargo, en flujos turbulentos  $\alpha \approx 1$  dado que el perfil de velocidad es más cercano al perfil uniforme, y los esfuerzos viscosos se restringen a una zona confinada cercana a la pared.

### 5.5.3 Pérdidas de energía

Consideremos ahora las pérdidas de energía por fricción pero sin considerar trabajo externo. En este caso, (5.77) se expresa como:

$$B_2 - B_1 = -\frac{1}{g} \left( \frac{1}{G} \left( \frac{\partial W_t}{\partial t} - \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right) + (u_2 - u_1) \right) \quad (5.91)$$

Llamando

$$\Lambda = \frac{1}{g} \left( \frac{1}{G} \left( \frac{\partial W_t}{\partial t} - \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right) + (u_2 - u_1) \right) \quad (5.92)$$

tal que

$$B_2 = B_1 - \Lambda \quad (5.93)$$

donde  $\Lambda$  es la pérdida de energía por unidad de peso que existe entre las secciones 1 y 2. Si estas pérdidas friccionales ocurren uniformemente en el tramo comprendido entre 1 y 2,

cosa que ocurre cuando las condiciones del flujo entre ambos puntos son también uniformes, entonces definimos  $J$  como la pérdida de energía por unidad de longitud, tal que

$$B_2 = B_1 - J L \quad (5.94)$$

donde  $L$  es la distancia entre 1 y 2.  $J$  es también conocido como la pendiente del plano de carga o energía, dado que como las condiciones del flujo son uniformes, se cumple que

$$J = -\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (5.95)$$

Para el cálculo de  $J$  es necesario conocer más información relacionada con las condiciones del flujo y del ducto, sin embargo,  $J$  puede ser calculada a partir de la ecuación o ley de Darcy-Weisbach:

$$J = \frac{f v^2}{D 2g} \quad (5.96)$$

donde  $f$  es el factor de fricción. Note que esta ley considera que la tasa de disipación de la energía es proporcional a la altura de velocidad y por lo tanto, a mayor energía cinética del flujo, mayores son las pérdidas por fricción.

Además de las pérdidas friccionales que ocurre uniformemente distribuidas a lo largo de la tubería, existen las denominadas pérdidas singulares asociadas a cambios locales de las condiciones del flujo, en particular, a expansiones bruscas del flujo **Figura 5.7** ya que es usual considerar que la aceleración de flujo no conlleva pérdidas de energía. En este caso, la pérdida de energía asociada a estas pérdidas singulares  $\Lambda_s$  se suele escribir como:

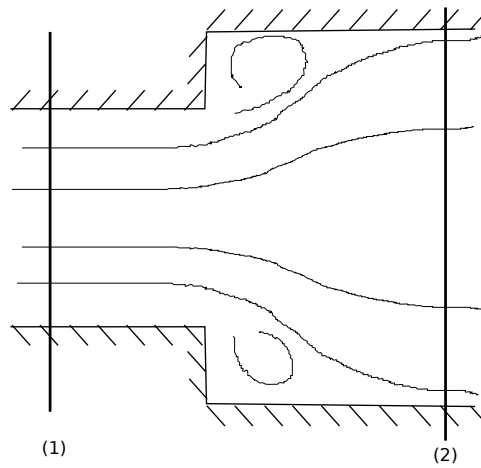
$$\Lambda_s = k_s \frac{v^2}{2g} \quad (5.97)$$

Sin embargo, cabe notar que como hay expansiones bruscas del flujo, la velocidad característica para el cálculo de  $\Lambda_s$  puede ser o bien  $v_1$  o  $v_2$ , y entonces el coeficiente de pérdida singular  $k_s$  varía dependiendo de cuál velocidad haya sido considerada para su determinación.

## 5.6 Teorema de cantidad de movimiento desde el punto de vista integral

Aplicamos la segunda ley de Newton para un volumen de control donde podamos analizarla según el enfoque integral. A partir del Teorema de Transporte de Reynolds, obtenemos que si  $\vec{M}$  es la propiedad extensiva que llamamos momentum, cuya respectiva propiedad intensiva es  $\vec{v}$ , la tasa de cambio de  $\vec{M}$  está dada por

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS \quad (5.98)$$



**Figura 5.7:** Ejemplo de expansión brusca del flujo

y por lo tanto, la segunda ley de Newton queda escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{v} \rho dV + \int_S \vec{v} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = \vec{F}_s + \int_V f_m \rho dV \quad (5.99)$$

Donde  $\vec{F}_s$  denota la resultante de las fuerzas superficiales actuando sobre  $V$ , y  $\vec{f}_m$  las fuerzas másicas por unidad de masa que vimos en el capítulo de estática de fluidos.

Consideremos el caso particular de flujo permanente y definamos un elemento de gasto másico  $dG = \rho(\vec{v} \cdot \hat{n})dS$ . De esta forma, (5.99) queda

$$\int_S \vec{v} dG = \vec{F}_s + \int_V f_m \rho dV \quad (5.100)$$

El paso siguiente es integrar sobre un tubo de flujo, y consideramos condiciones homogéneas en  $S_1$  y  $S_2$ , tal que:

$$\rho Q(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_s + \vec{W} \quad (5.101)$$

donde  $\vec{W}$  es el peso (vector) del volumen de control. Si la distribución de velocidades es ahora no-uniforme, entonces el resultado anterior cambia a:

$$\beta \rho Q(\bar{v}_2 \hat{n}_2 - \bar{v}_1 \hat{n}_1) = \vec{F}_s + \vec{W} \quad (5.102)$$

donde  $\beta$  es el coeficiente de Boussinesq definido como:

$$\beta = \frac{1}{\rho \bar{v}^2 S} \int_S \rho v^2 dS \quad (5.103)$$

el que suele ser considerado cercano a 1. Note que los términos  $\bar{v}_1 \hat{n}_1$  y  $\bar{v}_2 \hat{n}_2$  de (5.102) entregan la característica vectorial de dicha ecuación en los vectores normales a las superficies 1 y 2 ( $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$ , respectivamente).

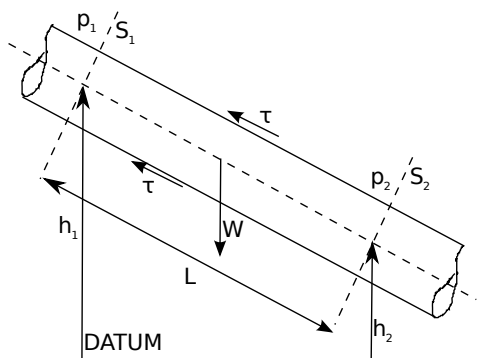
### 5.6.1 Flujo real en tuberías

Consideremos el flujo de un fluido real en la tubería inclinada que se muestra en la **Figura 5.8**. Si  $\tau$  es el esfuerzo de roce entre el fluido y las paredes de la tubería (que se opone al movimiento), entonces el teorema de cantidad de movimiento para un volumen de control definido entre los puntos 1 y 2 de la tubería, queda escrito para la dirección  $x$  como:

$$\beta\rho Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = F_{sx} + W_x \quad (5.104)$$

donde  $F_{sx}$  es la resultante de fuerza externas asociadas al roce y las presiones, y  $W_x$  es la proyección del peso en  $x$ . Asumiremos  $\beta \approx 1$ , y por continuidad obtenemos que  $\bar{v}_2 = \bar{v}_1$ . A continuación, si descomponemos  $F_{sx}$  como  $F_{sx} = F_{px} + F_{tx}$ , donde  $F_{px}$  es la resultante de fuerzas externas asociadas a las fuerzas de presión, y  $F_{tx}$  la resultante asociada a las fuerzas tangenciales, obtenemos:

$$(p_1 - p_2 + \gamma L \sin \alpha) \frac{\pi D^2}{4} - \tau \pi D L = 0 \quad (5.105)$$



**Figura 5.8:** Balance de fuerzas en tubería

$p_1$  y  $p_2$  son las presiones del fluido en los centros de gravedad de las secciones 1 y 2, respectivamente<sup>1</sup>,  $\alpha$  es el ángulo de inclinación de la tubería, y  $L$  la distancia que separa los puntos 1 y 2. Dado que

$$\sin \alpha = \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (5.106)$$

se obtiene que:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{L} = -\frac{4\tau}{\gamma D} \quad (5.107)$$

<sup>1</sup>Nota, fuerza de presión en superficies planas es igual a presión en centro de gravedad de la superficie, por la superficie

y por lo tanto  $J$ , la pendiente del plano de carga, es:

$$J = \frac{4\tau}{\gamma D} \quad (5.108)$$

Además, se verifica que

$$\frac{\bar{v}}{\sqrt{\tau/\rho}} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (5.109)$$

la cual se denomina ley de resistencia.

## 5.6.2 Fuerza sobre una boquilla

Utilicemos el teorema de cantidad de movimiento para estudiar la fuerza que debe resistir una boquilla, para lo cual definimos el volumen de control que se muestra en la **Figura 5.9**. Considerando  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ , y que no existen pérdidas de energía, a partir de igualdad de Benoulli entre 1 y 2 podemos decir que:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad (5.110)$$

donde  $p_2 = 0$  dado que nos encontramos a presión atmosférica. Entonces:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left( \frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4} \right) \quad (5.111)$$

que nos indica que  $p_1 > 0$  dado que  $d < D$ .

A continuación apliquemos el teorema de cantidad de movimiento para calcular la fuerza que debe resistir la boquilla  $F_x$ , de donde se obtiene que:

$$\rho Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = -F_x + p_1 \frac{\pi D^2}{4} \quad (5.112)$$

donde  $F_x$  es la fuerza neta que debe resistir la boquilla. Entonces,

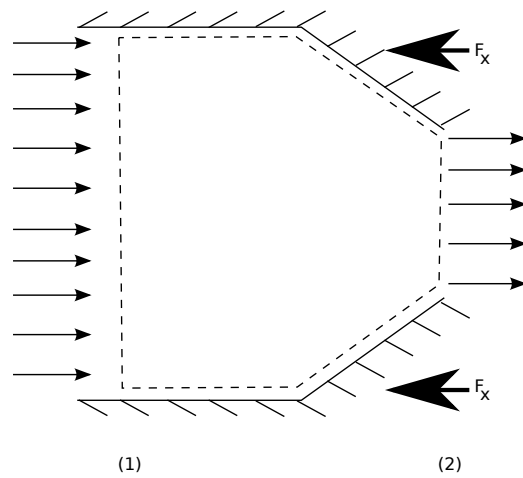
$$8\rho \frac{Q^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{D^2} \right) = -F_x + p_1 \frac{\pi D^2}{4} \quad (5.113)$$

y por lo tanto:

$$F_x = p_1 \frac{\pi D^2}{4} - 8\rho \frac{Q^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{1}{D^2} \right) \quad (5.114)$$

que resulta ser menor que la fuerza de presiones asociada a  $p_1$ , cosa que se debe a la aceleración del flujo entre 1 y 2.





**Figura 5.9:** Fuerzas sobre una boquilla

# Capítulo 6

## Escurrimiento en tuberías

En el capítulo anterior obtuvimos que al integrar la primer ley de la termodinámica en un tubo de flujo se obtiene que para el régimen permanente, la siguiente ecuación permite ligar la dinámica entre dos secciones (1 y 2) ubicadas en los extremos del tubo de flujo

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_2 + \Lambda_f + \Lambda_s \pm \frac{|P|}{\gamma Q} \quad (6.1)$$

donde  $\bar{B}$  es el Bernoulli promedio de la sección,  $\Lambda_f$  denota las pérdidas singulares que expresamos como:

$$\Lambda_f = J L = \frac{f \bar{v}^2}{D 2g} L \quad (6.2)$$

donde  $J$  es la pendiente del plano de carga,  $L$  la distancia entre los puntos 1 y 2 (siguiendo la línea de corriente),  $D$  el diámetro de la tubería y  $f$  el coeficiente de fricción. Además,  $\Lambda_s$  es la altura de carga perdida por pérdidas singulares, la cual expresamos como:

$$\Lambda_s = k_s \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (6.3)$$

donde  $k_s$  es el coeficiente de pérdida singular. Finalmente,  $|P|$  en (6.1) denota la potencia de la bomba o turbina, tal que el signo  $\pm$  queda determinado si es una bomba (+, tal que  $B_2 > B_1$  en el caso inviscido<sup>1</sup>) o si es una turbina (-, tal que  $B_2 < B_1$  en el caso inviscido).

Tanto  $P$  como  $k_s$  serán estudiados en detalle en el siguiente curso, de manera que en este capítulo nos centraremos en analizar el valor del coeficiente de fricción  $f$ , para lo cual es necesario estudiar las condiciones del flujo que definen el esfuerzo de corte que resulta de la condición de borde de no resbalamiento en el perímetro de la tubería. Como veremos en este capítulo, el valor de esfuerzo de corte depende tanto del régimen de escurrimiento dentro de la tubería (número de Reynolds) como del material del cual está hecho el ducto.

---

<sup>1</sup>inviscido viene de sin viscosidad

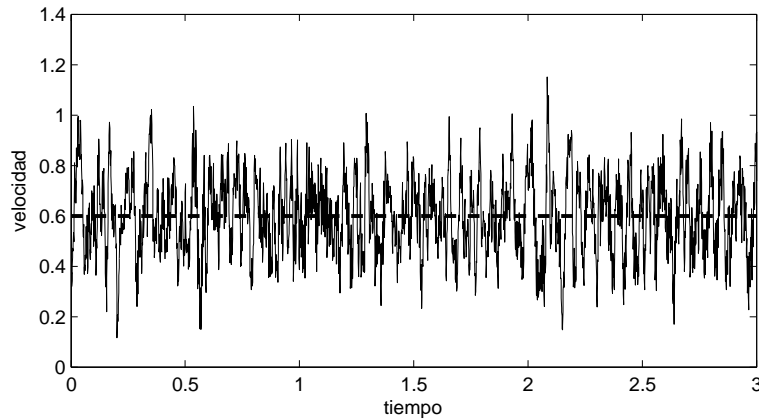
## 6.1 Nociones sobre la teoría de la turbulencia

Como vimos en el capítulo 4, el régimen de escurrimento puede ser laminar, turbulento o de transición laminar-turbulento. Vimos también que a partir del experimento de Reynolds, el número de Reynolds es el parámetro adimensional que determina el régimen de escurrimento, y en particular, se define que si  $Re < 2000$ , el flujo en tuberías es laminar, mientras que si  $Re > 4000$  el régimen es turbulento. El número de Reynolds en tuberías está definido como:

$$Re = \frac{\bar{v}D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi\nu D} \quad (6.4)$$

donde  $D$  es el diámetro de la tubería,  $Q$  el caudal,  $\nu$  la viscosidad y  $\bar{v}$  la velocidad media del flujo.

La principal característica de un flujo turbulento es que si medimos la serie de tiempo de alguna variable del flujo, ésta presentará un patrón aleatorio producto de la turbulencia del flujo (**Figura 6.1**).



**Figura 6.1:** Ejemplo de una serie de tiempo turbulenta. Línea segmentada indica valor medio.

Como se aprecia de esta figura, el supuesto de flujo permanente es difícilmente justificable para la velocidad instantánea del flujo. Sin embargo, la velocidad media es una variable que puede ser permanente en caso que las condiciones de borde del problema (presión motriz, caudal, etc), sean permanentes. Esto nos permite pensar en buscar un sistema de ecuaciones que describan el valor medio de la velocidad y así “olvidarnos” de la turbulencia del flujo. Este análisis lo realizó Reynolds cuando pensaba en dar una explicación a su experimento, y se conoce como promedios de Reynolds sobre la turbulencia, que permiten obtener las ecuaciones promediadas de Reynolds.

Definamos primero la velocidad media de la velocidad  $u$  como:

$$\bar{u} = \int_0^T u dt \quad (6.5)$$

donde  $T$  es la ventana de tiempo para la cual realizaremos el problema. De esta forma, la velocidad instantánea  $u$  la podemos expresar como

$$u = \bar{u} + u' \quad (6.6)$$

donde  $u'$  denota las fluctuaciones turbulentas de la velocidad. Si realizamos lo mismo para  $v$ ,  $w$  y  $p$ , reemplazamos esta descomposición en las ecuaciones de Navier-Stokes, y posteriormente promediamos los resultados en la ventana de tiempo  $T$ , obtenemos:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (6.7)$$

de donde se aprecia que, si bien fue posible obtener un sistema de ecuaciones para los valores medios que descuentan la turbulencia del flujo, ésta no fue posible del todo ser descontada del análisis, cosa que se ve en el término  $\overline{u'_i u'_j}$ . Para obtener la ecuación anterior fue necesario utilizar la ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  para expresar de una manera conveniente el término de la aceleración convectiva.

La primera y más utilizada interpretación de los términos  $\overline{u'_i u'_j}$  es la de considerarlos como esfuerzos de corte, que denominamos esfuerzos de corte de Reynolds o aparentes, de manera que las ecuaciones promediadas de Reynolds quedan escritas como:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij t}}{\partial x_j} \quad (6.8)$$

donde

$$\tau_{ij t} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (6.9)$$

y entonces, diremos que los esfuerzos de corte que actúan en las superficies del volumen de control contienen una parte viscosa y otra turbulenta tal que:

$$\tau_{ij} = \tau_{ij v} + \tau_{ij t} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad (6.10)$$

Es necesario conocer algunas propiedades del flujo turbulento como para representar los términos  $\overline{u'_i u'_j}$ . Para esto recurrimos a un enfoque semiteórico para evaluar estos esfuerzos de corte de Reynolds. Por analogía a los esfuerzos de corte viscosos, la hipótesis de Bousinessq considera la viscosidad de remolinos o viscosidad turbulenta, tal que

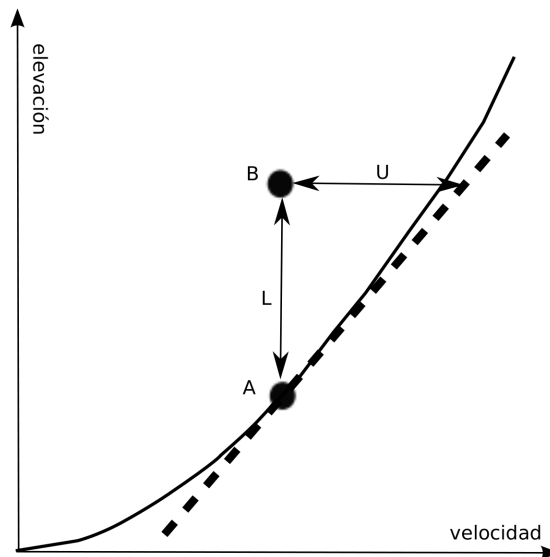
$$\tau_{ij t} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.11)$$

donde  $\mu_t$  es la viscosidad de remolinos o viscosidad turbulenta, la cual, a diferencia de la viscosidad molecular, es una propiedad de flujo, y no del fluido.

Entonces, cómo estimar  $\mu_t$ ? Prandtl (1933), para un flujo unidireccional como el de canales o tuberías, propuso la teoría de longitud de mezcla tal que:

$$\mu_t = L^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (6.12)$$

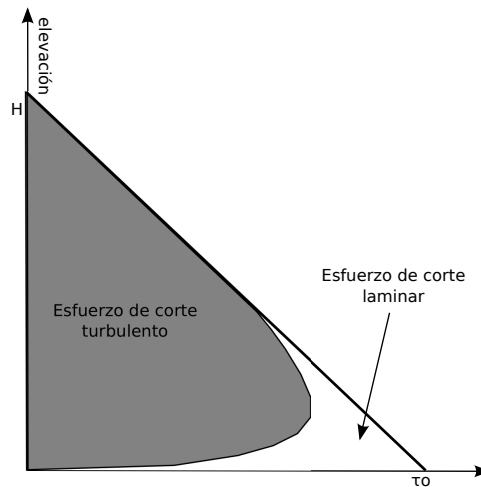
donde  $z$  es la componente perpendicular al flujo, y  $L$  es la longitud de mezcla, la cual es necesaria de conocer. El argumento para justificar (6.12) radica en expresar  $\mu_t = L U$ , donde  $U$  es una escala característica de las fluctuaciones turbulentas del flujo, de esta forma, si existe un perfil  $\bar{u}(z)$  (**Figura 6.2**), y vemos que si un volumen de control salta verticalmente una distancia  $L$  producto de la turbulencia del flujo, podemos decir que la velocidad característica de la turbulencia es  $U = L \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ , y entonces obtenemos (6.12).



**Figura 6.2:** Ejemplo de cierre de longitud de mezcla de Prandtl, considerando que producto de la turbulencia, ocurre un salto de longitud  $L$  desde  $A$  a  $B$ , se ve que la disminución instantánea de la velocidad en el punto  $B$  sería  $U$

Para analizar el valor de  $L$  es necesario estudiar con mayor detalle cómo es la razón entre los esfuerzos viscosos y turbulentos. Sabemos que para el flujo en un canal inclinado en régimen permanente y uniforme en  $x$ , el esfuerzo de corte balancea el peso de la columna de agua en todo  $z$  (**Figura 6.3**), y por lo tanto decrece desde un valor máximo  $\tau_0$  en  $z = 0$  hasta llegar a  $\tau = 0$  en  $z = h$ , donde  $h$  es la altura de escurrimento dentro del

canal. A continuación, podemos decir que en zonas alejadas de la pared, el esfuerzo de corte es predominantemente turbulento, mientras que al acercarnos a ella, la velocidad del flujo tiende a cero y los esfuerzos viscosos adquieren mayor relevancia.



**Figura 6.3:** Distribución de esfuerzos de corte en canal inclinado.

Esta última zona donde predominan los esfuerzos de corte viscosos se conoce como subcapa viscosa, cuyo espesor es muy pequeño tal que podemos decir que el esfuerzo de corte es constante en  $z$ . Además, se cumple que  $\tau \approx \tau_v$ , y por lo tanto

$$\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \approx \rho u_*^2 \quad (6.13)$$

donde  $u_* = \sqrt{\tau_v/\rho}$  es la denominada velocidad de corte. Al integrar y considerar la condición de borde  $\bar{u} = 0$  en  $z = 0$ , obtenemos un perfil lineal de  $\bar{u}$ :

$$\bar{u} = \frac{u_*^2}{\nu} z \quad (6.14)$$

Luego, re ordenamos la ecuación anterior y obtenemos

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = z \frac{u_*}{\nu} \Rightarrow u^+ = z^+ \quad (6.15)$$

la que es conocida como ley de la pared, donde  $z^+ = z \frac{u_*}{\nu}$  es conocido como unidades de la pared. Experimentalmente se ha demostrado que la subcapa viscosa es válida para  $z^+ < 5$ .

Consideremos ahora el caso en que nos encontramos lo suficientemente alejados de la pared tal que  $\tau_v \ll \tau_t$ , pero a la vez lo suficientemente cerca como para que  $\tau \approx \tau_0$ .

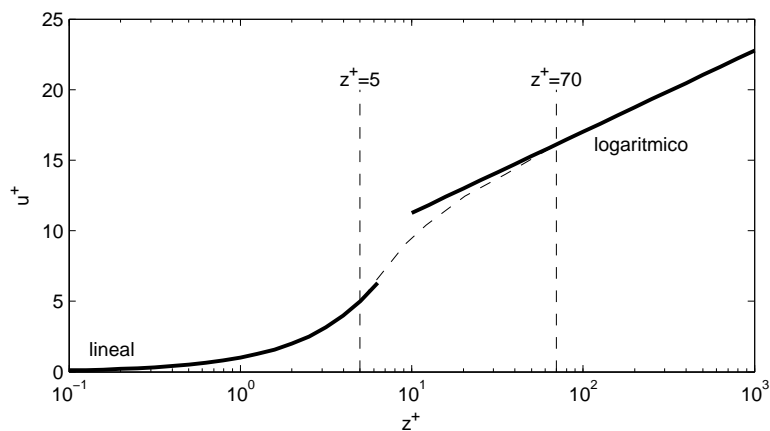
Entonces se cumple que:

$$\tau \approx l^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \approx u_*^2 \tag{6.16}$$

Supongamos además que  $l \propto z$ , lo cual nos dice que el tamaño de los vórtices turbulentos es restringida por la pared, y entonces obtenemos el perfil logarítmico de velocidades

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln z + C \tag{6.17}$$

donde  $\kappa$  es la constante de von Karman igual a 0.4 y  $C$  una constante de integración que es aproximadamente igual a 5.5 en el caso de tuberías. Además, experimentalmente se ha demostrado que este perfil logarítmico es válido para  $z^+ > 70$ . El flujo entre  $5 < z^+ < 70$  es una transición paulatina entre el perfil lineal y el perfil logarítmico como se muestra en la **Figura 6.4**.



**Figura 6.4:** Perfil de velocidad.

## 6.2 Factores de fricción

Utilicemos los resultados anteriores para calcular los factores de fricción  $f$  en tuberías. A partir del teorema de cantidad de movimiento vimos que en una tubería de diámetro  $D$  se cumple que:

$$J = \frac{4\tau_0}{\gamma D} \tag{6.18}$$

Además, de Darcy-Weisbach sabemos que

$$J = \frac{f U^2}{D 2g} \tag{6.19}$$

donde  $U$  es la velocidad media en la tubería. Entonces,

$$\frac{U}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (6.20)$$

la cual llamamos ley de resistencia.

Es así que si conocemos cómo es el flujo dentro de la tubería podemos calcular directamente  $f$  como:

$$f = \frac{8}{(U/u_*)^2} \quad (6.21)$$

lo que permite obtener que

$$f = \frac{64}{Re} \quad (6.22)$$

para flujos laminares, donde  $Re = UD\nu^{-1}$ .

Por otro lado, si consideramos que el flujo dentro de una tubería es turbulento, podemos calcular la velocidad media dentro de la tubería, y obtener:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{Du_*}{2\nu} \right) + B \quad (6.23)$$

donde  $B \approx 1.5$ . Entonces, si multiplicamos y dividimos por  $U$  el argumento del logaritmo, se obtiene que:

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( Re \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f}{8}} \right) + B \quad (6.24)$$

de manera que:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = C_1 \ln \left( Re \sqrt{f} \right) + C_2 \quad (6.25)$$

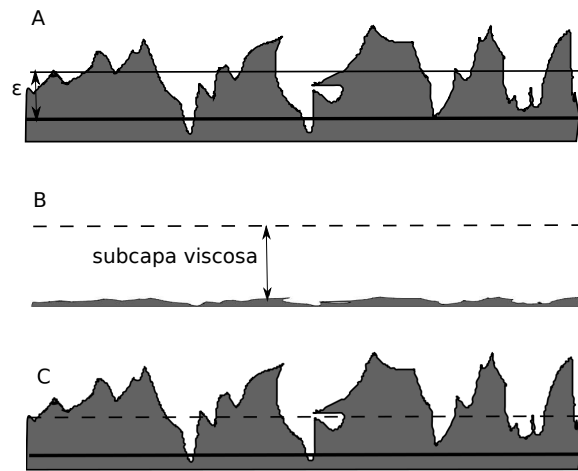
donde  $C_1 = 0.88$  y  $C_2 = -0.8$ .

En el resultado de (6.25) consideramos que la superficie de la pared es perfectamente lisa y uniforme, supuesto que no es del todo válido ya que en rigor, toda las paredes tiene un cierto grado de rugosidad. Consideremos ahora el caso en que la rugosidad de la tubería existe, y caracterizaremos a partir de  $\epsilon$  (**Figura 6.5A**), que es la altura típica de la aspereza de la tubería. En analogía con el flujo en la subcapa viscosa, definimos entonces  $\epsilon^+ = \epsilon \frac{u_*}{\nu}$ , y podemos definir tres diferentes condiciones dependiendo del valor de  $\epsilon^+$  (**Figura 6.5**).

- Si  $\epsilon^+ < 5$ , se cumple que la altura típica de la aspereza es menor que el espesor de la subcapa viscosa y decimos que la pared es hidrodinámicamente lisa **Figura 6.5B**.
- Si  $\epsilon^+ > 70$  se tiene que las asperezas impiden la formación de la subcapa viscosa, y entonces hablamos de una pared hidrodinámicamente rugosa **Figura 6.5C**.



- Si  $5 < \epsilon^+ < 70$  se tiene que las asperezas destruyen parcialmente la subcapa viscosa, pero no cubren totalmente la zona donde los esfuerzos viscosos son importantes. Entonces hablamos de pared hidrodinámicamente en transición lisa-rugosa.



**Figura 6.5:** Relación aspereza de tubería y espesor subcapa viscosa.

Considerando estos tres posibles regímenes de escurrimento, se tiene que el factor de fricción en tuberías se calcula como:

- Tuberías de pared hidrodinámicamente lisa.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} (Re \sqrt{f}) - 0.8 = 2 \log_{10} \left( \frac{Re \sqrt{f}}{2.51} \right) \quad (6.26)$$

- Tubería de pared hidrodinámicamente rugosa.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left( 3.7 \frac{D}{\epsilon} \right) \quad (6.27)$$

- Tubería de pared hidrodinámicamente en transición lisa-rugosa.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (6.28)$$

Nota que de acuerdo con esta definición, el coeficiente de fricción  $f$  resulta ser sólo función del número de Reynolds en caso de la tubería hidrodinámicamente lisa, mientras que si la tubería es hidrodinámicamente rugosa,  $f$  es sólo función de la *aspereza relativa*,

$\epsilon/D$ . La ecuación que describe el flujo en la pared en transición cumple con ambos límites en caso que  $Re$  tienda a infinito para recuperar el límite rugoso, o en caso que la aspereza sea cero para recuperar el límite liso.

En el caso particular que sea necesario calcular el caudal que circula en una tubería, es necesario realizar un proceso iterativo tal de definir un valor inicial de  $f$ , y posteriormente calcular el caudal que circula y recalculer el valor de  $f$  ya que depende del número de Reynolds. Este proceso iterativo se realizaba mediante el demoninado abaco de Moody de la **Figura 6.6**, sin embargo, actualmente es fácilmente programable en cualquier calculadora científica.

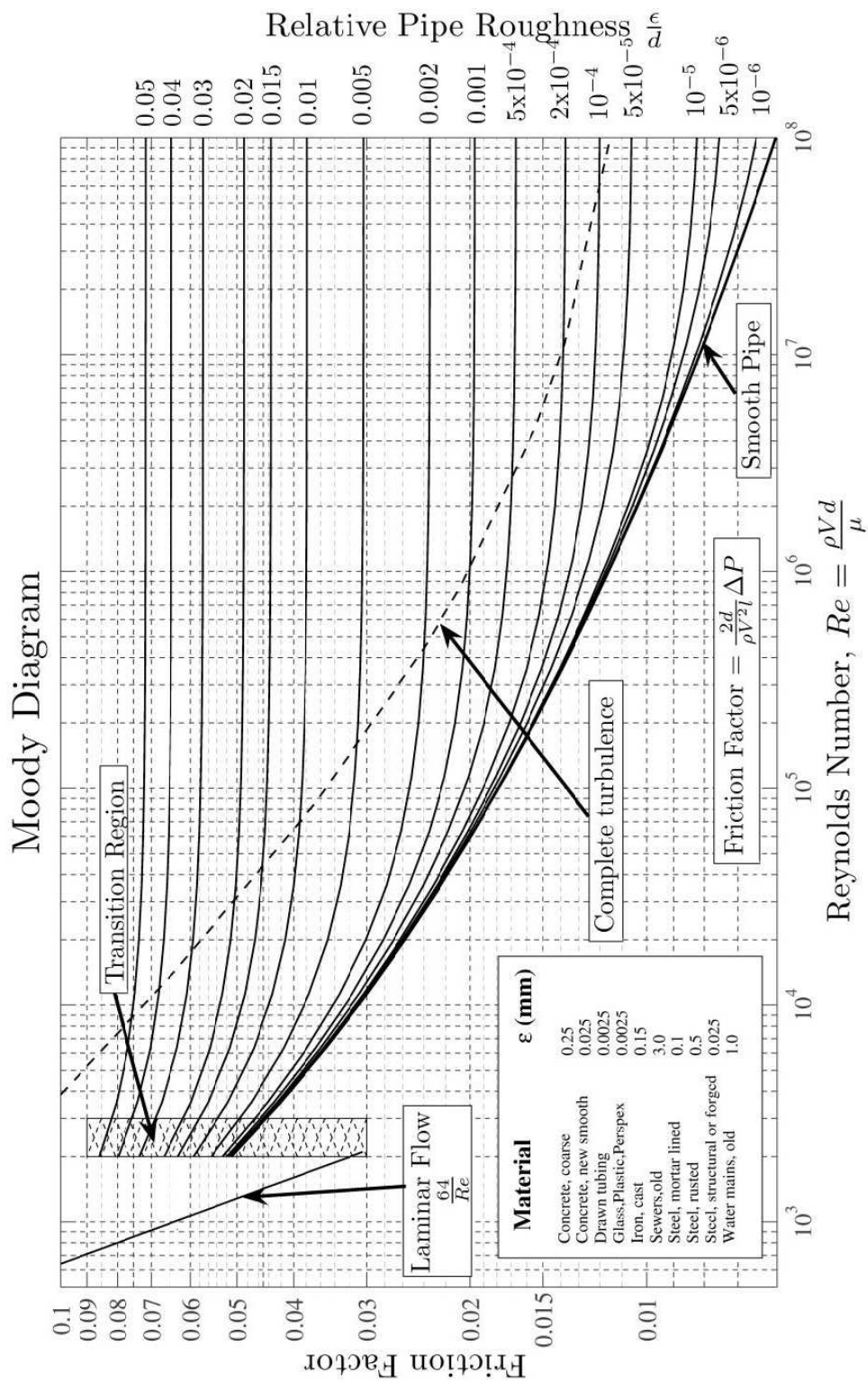


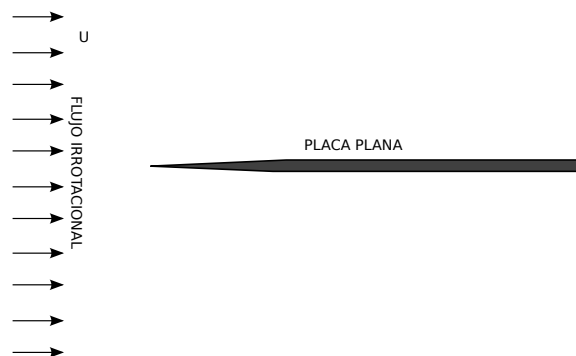
Figura 6.6: Abaco de Moody. Fuente wikipedia.

## 6.3 Concepto de capa límite

En capítulos anteriores vimos que las pérdidas de energía en tuberías pueden ser descompuestas entre pérdidas singulares y pérdidas friccionales. Durante la primera parte de este capítulo vimos algunos conceptos básicos de turbulencia que nos entregaron las herramientas necesarias para definir diferentes leyes de resistencias para el cálculo de las pérdidas friccionales. En esta segunda mitad del capítulo discutiremos acerca del concepto de capa límite que nos permite entender parcialmente las pérdidas singulares. Se insiste en que entenderemos parcialmente las pérdidas singulares ya que, como veremos a continuación, éstas dependen de la singularidad en particular, y por lo tanto es muy difícil encontrar una relación general que nos permita conocer el coeficiente de pérdida singular.

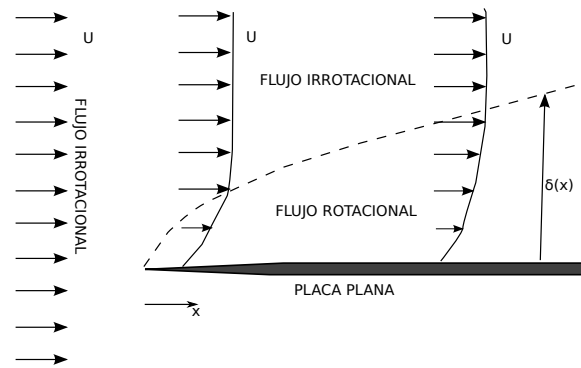
### 6.3.1 Placa plana

Consideremos el flujo de un fluido real ( $\mu \neq 0$ ) en un espacio infinito, el que además sea irrotacional tal que no existen gradientes de velocidad. De esta forma podemos decir que  $\vec{v} = U\hat{i}$  con  $U$  la velocidad del flujo, constante. Consideremos ahora que en un cierto punto se instala una placa paralela a la dirección del flujo como se muestra en la **Figura 6.7**.



**Figura 6.7:** Formulación del problema de capa límite en placa plana.

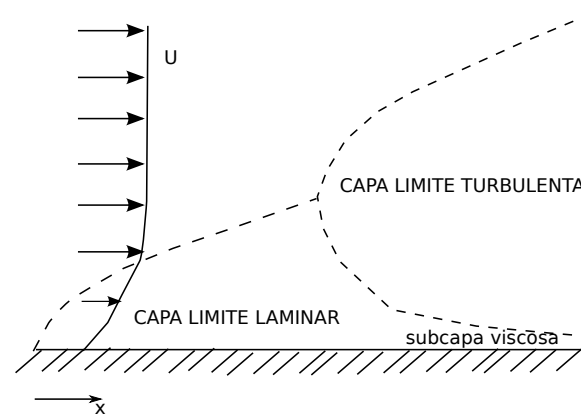
Debido a la condición de no resbalamiento que impone la placa plana, sabemos que la velocidad del flujo debe ser nulo en ésta. Por otro lado, sabemos que en una distancia lo suficientemente alejada de la placa, el flujo no percibe su presencia, y por lo tanto el flujo sigue siendo irrotacional. Es así que existe una zona intermedia entre el flujo irrotacional y la placa, donde existen gradientes de velocidad necesarios para satisfacer las condiciones de borde de no resbalamiento  $u = 0$  en  $y = 0$ , y  $u = U$  en  $y = \infty$  (**Figura 6.8**). Esta zona de transición se conoce como capa límite, cuyo espesor  $\delta$  aumenta en  $x$  ya que en  $x = 0$  se cumple que el flujo es rotacional, o bien  $\delta = 0$ .



**Figura 6.8:** Compatibilización de condiciones de borde para problema de capa límite.

En términos de vorticidad del flujo, en la zona externa de la capa límite, el flujo es irrotacional y por lo tanto la vorticidad es nula, de manera que no existen esfuerzos de corte. Por el contrario, dentro de la capa límite el flujo es rotacional, y entonces existen esfuerzos de corte los cuales difunden en  $y$  la condición de borde de no resbalamiento impuesta por la pared.

Respecto de la variación longitudinal del flujo, la condición que se impone en  $x = 0$  nos dice que el espesor  $\delta$  es pequeño y dado que la velocidad es también pequeña cerca de la pared, el flujo es laminar. A medida que nos alejamos de  $x = 0$ , el espesor de la capa límite aumenta y por lo tanto el número de Reynolds también ya que  $\delta$  es la longitud característica del flujo para el cálculo de  $Re$ , y el flujo eventualmente puede ser turbulento. De esta forma se obtiene la estructura de la capa límite que se muestra en la **Figura 6.9**.



**Figura 6.9:** Estructura de capa límite por placa plana.

Por otro lado, al resolver las ecuaciones de movimiento considerando que el flujo puede ser laminar o turbulento, y definiendo  $\delta$  como la distancia a la que  $u = 0.99U$ , se obtiene que el espesor de la capa límite crece con:

- $\sqrt{x}$  si la capa límite es laminar, tal que

$$\delta(x) \approx 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (6.29)$$

- $x^{4/5}$  si la capa límite es turbulenta, tal que

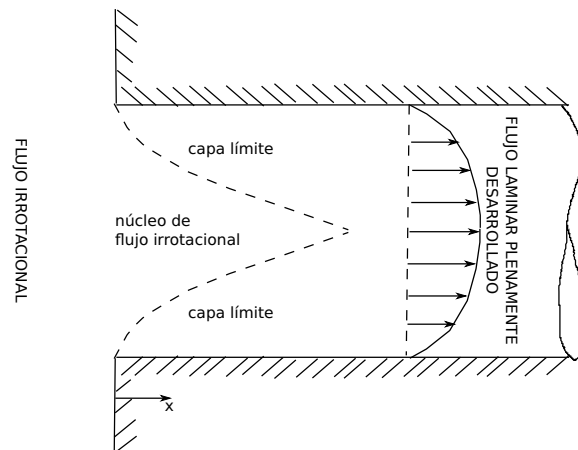
$$\delta(x) \approx 0.37x \left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5} \quad (6.30)$$

### 6.3.2 Tuberías

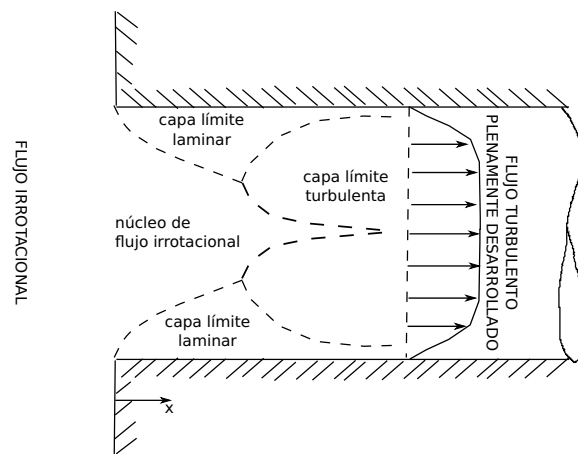
En caso del desarrollo de capas límites en tuberías, consideremos el caso en que un flujo plano de ancho infinito, ingresa por una tubería de diámetro  $D$ . Para este problema, se hace la distinción entre una capa límite laminar o una turbulenta.

- Caso de flujo laminar en tuberías. En este caso el flujo es siempre laminar, y por lo tanto el espesor de la subcapa viscosa debiera crecer indefinidamente. Sin embargo, como la tubería es un conducto cerrado, el crecimiento de la capa límite queda confinado en  $D$ , obteniéndose una estructura en  $x$  como se muestra en la **Figura 6.10**. Es así que a partir de la distancia  $L^*$ , el flujo es uniforme, y decimos que la capa límite está totalmente desarrollada, y el perfil de velocidades se calcula directamente de las ecuación de Navier-Stokes.
- En el caso de un flujo turbulento, se sabe que existe una cierta distancia donde ocurre la transición entre una capa límite laminar a una turbulenta, y de igual forma que para el caso del desarrollo de la capa límite laminar, se identifica una distancia  $L^*$  a partir de la cual la capa límite está plenamente desarrollada, y el flujo es uniforme en  $x$  (**Figura 6.11**).

Usualmente, la distancia  $L^*$  es pequeña en comparación con el largo de las tuberías, y por lo tanto, desde el punto de vista de pérdidas de energías, podemos decir que el desarrollo de las capas límites ocurre localmente, y por lo tanto, la dinámica asociada al desarrollo de éstas se suele englobar en las denominadas pérdidas singulares de energía que se caracterizan por el coeficiente  $k_s$ .



**Figura 6.10:** Desarrollo de capa límite en tubería con flujo laminar.



**Figura 6.11:** Desarrollo de capa límite en tubería con flujo turbulento.

# Capítulo 7

## Flujo potencial

### 7.1 Función potencial

En el capítulo anterior vimos que cercano a las condición de borde de no resbalamiento existe una zona conocida como capa límite, donde los esfuerzos de corte gobiernan el flujo y producen gradientes de la velocidad de escurrimiento. Vimos también que fuera de la capa límite, el flujo puede ser irrotacional, tal que el sistema de ecuaciones para el flujo permanente queda reducido a:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (7.1)$$

y

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad (7.2)$$

representando la ecuación de continuidad e irrotacionalidad, respectivamente. Es fácil ver que si la condición de irrotacionalidad se cumple, entonces podemos definir una función potencial  $\phi$  tal que

$$\vec{v} = -\nabla\phi \quad (7.3)$$

Entonces, el que el flujo sea irrotacional nos dice que:

$$\nabla \times \nabla\phi = 0 \quad (7.4)$$

cosa que es verdadero dado que el operador  $\nabla$  es siempre paralelo a  $\nabla\phi$ . Luego, por continuidad:

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (7.5)$$

que es conocida como la ecuación de Laplace que describe el flujo potencial que resulta de analizar el caso de un flujo irrotacional permanente incompresible. En coordenadas cartesianas, la ecuación de Laplace se escribe como:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7.6)$$



mientras que en coordenadas cilíndricas se escribe como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7.7)$$

Utilizando la definición de (7.3), vemos que:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (7.8)$$

Por lo tanto, si conocemos  $\phi$  conocemos todo el campo de flujo. Para esto es necesario resolver  $\nabla^2 \phi = 0$ , donde  $\phi(x, y, z)$ , sujeto a las condiciones de borde del problema. El plano descrito por  $\phi = cte$  se conoce como superficie equipotencial, y se cumple además que el campo de velocidad  $\vec{v} = -\nabla \phi$  es perpendicular a estas superficies  $\phi = cte$ , y se cumple que si  $\vec{v} > 0$ , el campo de velocidad va desde zonas de mayor potencial a zonas de menor potencial.

## 7.2 Función de corriente

Si consideramos un flujo bidimensional solo en el plano  $x - y$ , podemos definir la función escalar de corriente  $\psi(x, y, z)$  como:

$$d\psi = \nabla \psi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (7.9)$$

Entonces, si definimos

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.10)$$

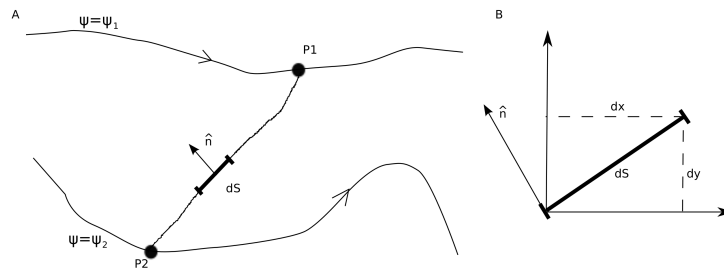
vemos que los elementos  $d\psi$  son cero y entonces  $\psi$  es constante a lo largo de una línea de corriente. La función  $\psi(x, y)$  se conoce como función de corriente, y su utilidad radica en que su definición cumple automáticamente con la ecuación de continuidad en flujos planos donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (7.11)$$

Por otro lado, podemos calcular  $\nabla \times \vec{v}$ , lo que permite obtener que si el flujo es irrotacional, entonces la función de corriente también satisface la ecuación de Laplace en dos direcciones:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.12)$$

A partir de la definición de función de corriente, es posible demostrar que está asociada con el caudal. Consideremos dos funciones de corriente  $\psi = \psi_1 = cte_1$  y  $\psi = \psi_2 = cte_2$



**Figura 7.1:** Cálculo de caudal entre dos funciones de corriente.

(**Figura 7.1A**). Si tomamos un elemento de superficie  $dS$  de la línea que une los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , entonces el vector normal a dicho elemento de superficie es  $\hat{n} = -\frac{dy}{dS}\hat{i} + \frac{dx}{dS}\hat{j}$  (**Figura 7.1B**), y por lo tanto un elemento de caudal que cruza  $dS$  es

$$dq = \vec{v} \cdot \hat{n}dS = -u dy + v dx \quad (7.13)$$

Luego, si utilizamos la definición de (7.10) se obtiene que:

$$dq = \vec{v} \cdot \hat{n}dS = \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = d\psi \quad (7.14)$$

Entonces, el caudal  $q$  entre las líneas 1 y 2 es:

$$q = \psi_2 - \psi_1 \quad (7.15)$$

### 7.3 Concepto de red de flujo

Dado que cada línea de corriente está descrita por un cierto valor de  $\psi = cte$ , y además que cada superficie equipotencial está descrita por  $\phi = cte$ , vemos entonces que, como la velocidad del flujo es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales, líneas de corriente y equipotenciales son siempre perpendiculares entre sí, resultando que gráficamente es posible describir el flujo como una red de flujo como el que se muestra en la **Figura 7.2**.

De esta forma, si  $\phi$  y  $\psi$  son ortogonales, y además satisfacen la ecuación de Laplace, entonces se obtienen las condiciones de Cauchy-Riemann que dice que:

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} ; \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (7.16)$$

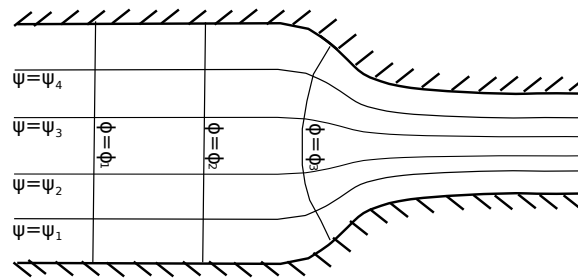


Figura 7.2: Ejemplo de red de flujo.

## 7.4 Ejemplos de aplicación

### 7.4.1 Flujo plano

Este flujo está descrito por la existencia de una velocidad  $U$ , constante en  $y$ , y por lo tanto, las funciones potencial y de corriente están descritas por (Figura 7.3):

$$\phi = -Ux \tag{7.17}$$

y

$$\psi = -Uy \tag{7.18}$$

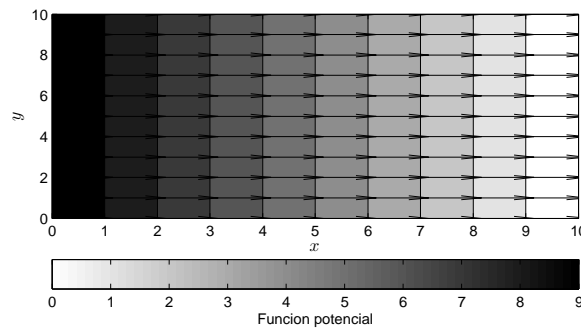


Figura 7.3: Red de flujo para un flujo plano. Escala horizontal colores define valor de equipotenciales.

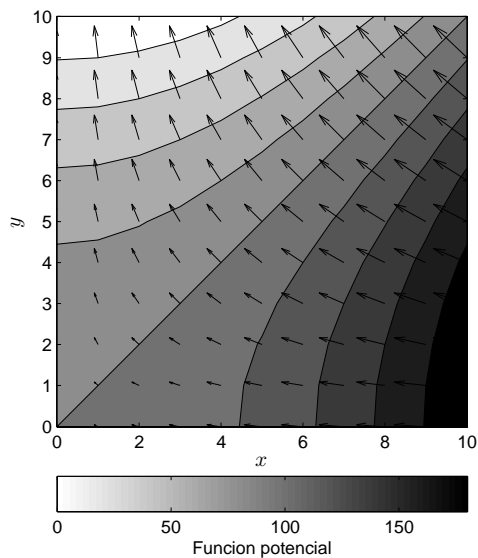
## 7.4.2 Flujo alrededor de una esquina

Este flujo está descrito por (ver además **Figura 7.4**)

$$\phi = (x^2 - y^2) \quad (7.19)$$

y

$$\psi = 2xy \quad (7.20)$$



**Figura 7.4:** Red de flujo para un flujo alrededor de una esquina. Escala horizontal colores define valor de equipotenciales. Unidades de  $x$  e  $y$  son arbitrarias.

# Capítulo 8

## Teoría de modelos y análisis dimensional

### 8.1 Análisis dimensional

Hemos visto a través del curso que los fenómenos asociados a la mecánica de fluidos pueden ser modelados mediante ecuaciones que describen los principios básicos de la termodinámica, conservación de la materia y la segunda ley de Newton. Una propiedad básica que deben tener cada una de estas ecuaciones es que deben ser dimensionalmente homogéneas, vale decir, tanto el lado derecho de las ecuaciones como el izquierdo, deben tener las mismas unidades, cosa que debe ocurrir independientemente del sistema de coordenadas o de unidades que se utilice.

Durante el curso hemos también visto que el número de problemas que en la práctica pueden ser resueltos analíticamente, es bajo, y por lo tanto es necesario contar con una herramienta que nos permita identificar preliminarmente, cómo se relacionan las variables que determinan el fenómeno en estudio. Esta herramienta es el conocida como análisis dimensional que comienza de la base que cualquier fenómeno físico se describe a partir entidades físicas (variables), cada una de las cuales tiene asociada una unidad de medidas (aceleración, fuerza, presión, etc).

Como discutimos en el comienzo de curso, alguna de las unidades de medidas se catalogan como unidades independientes o fundamentales, de manera tal que el resto de las unidades involucradas en el problema se expresan como una combinación de las unidades fundamentales. Vimos también que la elección de las unidades fundamentales es arbitraria, aunque discutimos la existencia de dos sistemas: sistema físico y el sistema técnico, donde el primero utiliza como una de las unidades fundamentales a la masa, mientras que el segundo utiliza la fuerza.

**Tabla 1:** Ejemplo

| Variable    | Símbolo | Sistema físico                   | Sistema técnico                  |
|-------------|---------|----------------------------------|----------------------------------|
| longitud    | L       | L                                | L                                |
| tiempo      | T       | T                                | T                                |
| masa        | M       | M                                | F L <sup>-1</sup> T <sup>2</sup> |
| fuerza      | F       | MLT <sup>-2</sup>                | F                                |
| velocidad   | V       | LT <sup>-1</sup>                 | LT <sup>-1</sup>                 |
| aceleración | a       | LT <sup>-2</sup>                 | LT <sup>-2</sup>                 |
| área        | S,Ω     | L <sup>2</sup>                   | L <sup>2</sup>                   |
| volumen     | V       | L <sup>3</sup>                   | L <sup>3</sup>                   |
| caudal      | Q       | L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>   | L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>   |
| presión     | p       | ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup> | FL <sup>-2</sup>                 |

De esta forma, si consideramos una base de  $r$  unidades arbitrariamente elegidas  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ , las unidades de cualquier variable  $A$  la podemos expresar como:

$$[A] = [x_1]^a [x_2]^b \dots [x_r]^k \quad (8.1)$$

donde  $a, b$ , etc, son coeficientes por determinar. Por ejemplo, la **Tabla 1** muestra un grupo de variables tradicionales en mecánica de fluidos.

### 8.1.1 Teorema $\Pi$ o de Buckingham

Este teorema dice: “El número de parámetros adimensionales que pueden ser empleados para describir un fenómeno condicionado a  $n$  variables o parámetros característicos, es igual a  $(n - r)$ , siendo  $r$  el número de dimensiones fundamentales que componen las variables del fenómeno.”

Este enunciado del teorema  $\Pi$  nos indica que si se tiene un fenómeno caracterizado por  $n$  variables  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ , podemos decir que existe una relación  $f$  tal que:

$$f(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0 \quad (8.2)$$

donde

$$\begin{aligned} [A_1] &= [x_1]^{a_1} [x_2]^{b_1} \dots [x_r]^{k_1} \\ [A_2] &= [x_1]^{a_2} [x_2]^{b_2} \dots [x_r]^{k_2} \\ &\vdots \\ [A_n] &= [x_1]^{a_n} [x_2]^{b_n} \dots [x_r]^{k_n} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Entonces, de acuerdo al teorema de Buckingham, podemos definir  $(n - r)$  números adimensionales  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}$  (con  $[\Pi] = 1$ ), tal que existe una relación  $\phi$  que cumple con:

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0 \quad (8.4)$$

## 8.1.2 Ejemplo

Veamos el problema del desarrollo de la capa límite que discutimos en el capítulo 6. Para este problema, el grupo de variables queda definido por  $U, \nu, x$  y  $\delta$  ( $n = 4$ ), y entonces podemos decir que existe una relación  $f$  tal que:

$$f(U, \nu, x, \delta) = 0 \quad (8.5)$$

A continuación, si vemos las unidades de estas variables, obtenemos que son dos las unidades fundamentales del problema ( $r = 2, L$  y  $T$ ), y entonces podemos construir dos números adimensionales  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , e intentar encontrar una relación

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2) = 0 \quad (8.6)$$

Para definir los números adimensionales necesitamos definir, arbitrariamente, una base  $e$  de  $r$  variables que contengan cada una de las unidades fundamentales del problema, y considerando además que la variable en estudio no puede pertenecer a la base. En este caso, la variable en estudio es  $\delta$ . Entonces, definimos arbitrariamente la base  $e = (U_o, x)^1$ . Luego, para definir los números adimensionales, debemos considerar que cada uno está relacionado con cada una de las variables del problema que no se encuentran en la base ( $\delta$  y  $\nu$ ), de manera que diremos que  $\Pi_1$  está asociado a  $\delta$ , y  $\Pi_2$  está asociado a  $\nu$ .

Para el cálculo de  $\Pi_1$ , expresamos

$$[\Pi_1] = 1 = [\delta]^a [U_o]^b [x]^c = L^a \left(\frac{L}{T}\right)^b L^c \quad (8.7)$$

y por lo tanto, del análisis de  $T$  obtenemos:

$$b = 0 \quad (8.8)$$

mientras que del análisis de  $L$  obtenemos

$$a + c = 0 \quad (8.9)$$

---

<sup>1</sup>Aunque sabemos que bien podríamos haber escogido  $e = (U_o, \nu)$ , o  $e = (x, \nu)$

Definimos arbitrariamente  $c = -1$ , y entonces

$$\Pi_1 = \frac{\delta}{x} \quad (8.10)$$

Análogamente para  $\Pi_2$ :

$$[\Pi_2] = 1 = [\nu]^a [U_o]^b [x]^c = \left(\frac{L^2}{T}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b L^c \quad (8.11)$$

y por lo tanto, del análisis de  $T$  obtenemos:

$$-a - b = 0 \quad (8.12)$$

mientras que del análisis de  $L$  obtenemos

$$2a + b + c = 0 \quad (8.13)$$

Definimos arbitrariamente  $a = -1$ , y entonces

$$\Pi_2 = \frac{U_o x}{\nu} \quad (8.14)$$

Por lo tanto, obtenemos que debiéramos buscar una función

$$\phi\left(\frac{\delta}{x}, \frac{U_o x}{\nu}\right) = 0 \quad (8.15)$$

El análisis dimensional no llega más allá, es decir, no permite determinar la forma de la función  $\phi$ , cosa que debiera hacerse experimentalmente (en el laboratorio o numéricamente). Sin embargo, la utilidad del análisis dimensional radica en que logramos reducir el rango de parámetros a analizar de 4 a 2, y podemos identificar si se están diseñando experimentos redundantes. Por ejemplo, se podría plantear realizar experimentos para diferentes fluidos ( $\nu$ ) y  $U_o$ , sin considerar que un experimento con  $U_o$  y  $\nu$  pequeños, es equivalente a un experimento con  $U_o$  y  $\nu$  grandes ya que lo que realmente importa es la razón entre ambas variables.

### 8.1.3 Problemas propuestos

- Realice el mismo análisis para  $e = (U_o, \nu)$  y  $e = (x, \nu)$ .
- Discuta acerca de los números adimensionales involucrados en el análisis de los esfuerzos de fricción en tuberías rugosas.



## 8.2 Teoría de modelos

Aún cuando la mecánica de fluidos permite analizar problemas bastante complejos, existen en la práctica problemas los cuales resultan sumamente difíciles de analizar teóricamente. Algunos de estos problemas son sumamente importantes pues involucran la seguridad de obras y personas, y/o grandes inversiones. Por ejemplo, el diseño adecuado del perfil de las alas de los aviones, que incluye el estudio de cómo se desarrolla la capa límite y cómo es la influencia de los alerones.

Es así que conviene estudiar experimentalmente el comportamiento del flujo, para lo cual es útil resolver el problema en una escala reducida mediante modelos físicos los cuales deben ser diseñados. Años atrás, este simple hecho justificaba estudiar esta sección de teoría de modelos en el curso de mecánica de fluidos, sin embargo, dada las capacidades computacionales actuales, podría pensarse que la implementación de modelos físicos es un tanto obsoleta. Pero, las capacidades computacionales actuales están lejos de estar así de avanzadas como para reemplazar modelos físicos o experimentos en laboratorio, lo que significa que los modelos numéricos están también limitados por espacio (memoria RAM) y tiempo de cálculo. Es así que todos los principios que se discutirán a continuación son igualmente válidos tanto para modelos físicos como para modelos numéricos.

### 8.2.1 Concepto de semejanza o similitud

Sea  $a(x, y, z, t)$  el valor de una variable en el prototipo (realidad), y  $a'(x', y', z', t')$  el valor de la misma variable evaluada en un modelo a escala. Se define la escala de  $a$  como:

$$\lambda_a = \frac{a(x, y, z, t)}{a'(x', y', z', t')} \quad (8.16)$$

Definimos entonces que existe semejanza entre el prototipo y el modelo si  $\lambda_a$  es constante en todo el dominio donde definimos  $a$ . De esta forma, es posible definir al menos tres tipos de semejanza:

- Semejanza geométrica. Si se cumple, permite definir la escala de longitud  $\lambda_L$ , la escala de superficie  $\lambda_S = \lambda_L^2$ , y la escala de volumen  $\lambda_V = \lambda_L^3$ . Se definen como *modelos distorsionados* a aquellos en que las escala de longitud en  $x$ ,  $y$  y  $z$  no son iguales entre sí. En particular, es usual encontrar modelos distorsionados en modelos fluviales y/o marítimos, donde la escala vertical  $\lambda_H$  es distinta a la escala de longitud horizontal  $\lambda_L$ .
- Semejanza cinemática o similitud de movimiento. Esta semejanza considera que partículas homólogas, deben ocupar posiciones homólogas en tiempo homólogos. Es así que se

obtiene que la escala de velocidades es:

$$\lambda_v = \frac{\lambda_L}{\lambda_T} \quad (8.17)$$

donde  $\lambda_T$  es la escala de tiempo. De igual forma, la escala de aceleración queda:

$$\lambda_a = \frac{\lambda_L}{\lambda_T^2} \quad (8.18)$$

- Semejanza dinámica. Sobre partículas homólogas actúan fuerzas homólogas, manteniendo una relación constante entre ellas. Se obtiene que la escala de fuerzas es:

$$\lambda_F = \lambda_\rho \frac{\lambda_L^4}{\lambda_T^2} \quad (8.19)$$

Si un fenómeno resulta de la interacción entre varias fuerzas (e.g.  $F_1$  presión,  $F_2$  tensión superficial,  $F_3$  gravedad,  $F_4$  viscosidad), entonces se obtiene que para que exista semejanza dinámica, es necesario que

$$\lambda_{F_1} = \lambda_{F_2} = \lambda_{F_3} = \lambda_{F_4} \quad (8.20)$$

De esta forma, si vemos que la escala de tensión superficial sea igual a la presión, se debiera cumplir condicionado

$$\lambda_{F_1} = \lambda_\sigma \lambda_L = \lambda_{F_2} = \lambda_g \lambda_\rho \lambda_L^3 \quad (8.21)$$

cosa que nos obliga a  $\lambda_L = 1$  lo cual significa tener un modelo igual de grande que la realidad.

De esta forma, no es posible tener un modelo tal que cumpla con semejanza de todas las fuerzas, por lo que es necesario focalizar la atención sólo en las fuerzas de mayor relevancia del problema, y asumir que el resto de las fuerzas no estarán escaladas.

La manera que existe para escalar fuerzas es mediante números adimensionales vistos en la sección anterior, considerando que éstos representan la relación entre fuerzas como se ve en la **Tabla 2**. De esta forma, si se busca semejanza donde dominan las fuerzas gravitatorias, diremos que preservaremos el número de Froude tal que

$$\lambda_{Fr} = \frac{\lambda_v}{\sqrt{\lambda_g \lambda_L}} = 1 \quad (8.22)$$

y por lo tanto,  $\lambda_t = \lambda_L^{1/2}$  ya que la escala de la aceleración de gravedad es usualmente  $\lambda_g = 1$ .

**Tabla 2:** Algunos números adimensionales

| Número adimensional                | Relaciona  |
|------------------------------------|--|
| Froude, $Fr = \frac{u}{\sqrt{gL}}$ | inercia del flujo respecto a fuerza gravitacional          |
| Reynolds, $Re = \frac{uL}{\nu}$    | inercia del flujo respecto a fuerzas viscosas              |
| Euler, $Eu = \frac{p}{\rho u^2}$   | fuerzas de presión respecto a inercia del flujo            |
| Mach, $Ma = \frac{u}{a}$           | inercia respecto de elasticidad ( $a$ veocidad del sonido) |