

# **INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS FLUJOS BIFASICOS SOLIDO-LIQUIDO**

**Prof. Aldo Tamburrino Tavantzis**

## INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS FLUJOS BIFASICOS SOLIDO - LIQUIDO

### GENERALIDADES

El análisis de los flujos bifásicos sólido-líquido es de una complejidad muchísimo mayor que el de un flujo líquido por cuanto es necesario cuantificar, además de los esfuerzos friccionales o turbulentos del propio fluido, esfuerzos provenientes de la interacción entre el líquido y las partículas sólidas, entre los sólidos entre sí y, eventualmente entre los sólidos y la pared del ducto por el cual se tiene el flujo.

Tradicionalmente, los flujos bifásicos sólido-líquido se han abordado según sea la distribución de concentración en la vertical, clasificándolos básicamente en dos grupos: mezclas homogéneas y heterogéneas. Los flujos de mezclas homogéneas se tratan como el flujo de un fluido reológicamente equivalente, simplificándose enormemente el análisis, por cuánto éste se reduce al análisis de un fluido el que, dependiendo de la concentración de sólidos puede tener un comportamiento no-newtoniano.

Las mezclas heterogéneas han recibido hasta hace muy poco tiempo, fundamentalmente un enfoque empírico, por dos razones: la primera ha sido la necesidad de tener relaciones de cálculo para resolver problemas prácticos inmediatos y la segunda es la ausencia de un teoría cerrada que permita abordar dichos problemas.

El punto de partida de cualquier teoría de flujos de mezclas de sólidos y líquidos lo constituye el concepto de esfuerzo dispersivo de Bagnold, postulado en 1954.

En estos apuntes se plantean las ecuaciones básicas de los flujos bifásicos sólido-líquido, introduciéndose las relaciones que permiten tomar en cuenta las interacciones entre las partículas que constituyen la fase sólida y entre sólidos y líquido. Las ecuaciones aquí presentadas son generales, en el sentido que son válidas para cualquier flujo de una mezcla sólido-líquido, siendo casos particulares el transporte hidráulico de sólidos en tuberías o el flujo de corrientes detríticas (aluviones).

### ECUACIONES DE CONSERVACION (1-D)

Las ecuaciones de conservación se refieren básicamente a las ecuaciones de continuidad y momentum, aplicadas a la fase sólida y a la líquida.

$$\text{Continuidad de la fase sólida} \quad : \quad \frac{\partial}{\partial t} (c\rho_s) + \frac{\partial}{\partial x} (c\rho_s v_s) = 0$$

$$\text{Continuidad de la fase líquida} \quad : \quad \frac{\partial}{\partial t} ((1-c)\rho_l) + \frac{\partial}{\partial x} ((1-c)\rho_l v_l) = 0$$

donde  $c$  es la concentración local en volumen,  $\rho$  es la densidad,  $v$  es la velocidad,  $x$  es la coordenada en la dirección del flujo y  $t$  es el tiempo. Los subíndices S y L denotan a la fase sólido y líquido, respectivamente.

En general, las fases pueden considerarse como incompresibles, excepto en problemas que involucran ondas de presión. Luego, podemos escribir:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c v_s) = 0$$

$$\frac{\partial (1-c)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1-c) v_L] = 0$$

Si las fuerzas másicas se deben sólo a la gravedad, las ecuaciones de momentum para las fases líquidas y sólidas son:

$$\rho_s \left[ \frac{\partial}{\partial t} (c v_s) + v_s \frac{\partial (c v_s)}{\partial x} \right] = - \frac{\partial (c P)}{\partial x} - c \rho_s g \frac{\partial h}{\partial x} + c f_{SL} + c f_{SS} + c f_{sw}$$

$$\rho_L \left[ \frac{\partial}{\partial t} (1-c) v_L + \frac{\partial (1-c) v_L}{\partial x} \right] = - \frac{\partial ((1-c) P)}{\partial x} - (1-c) \rho_L g \frac{\partial h}{\partial x} + (1-c) f_{LS} + (1-c) f_{LL} + (1-c) f_{Lw}$$

En las ecuaciones anteriores  $h$  representa un eje vertical positivo hacia arriba y  $P$  es la presión.  $f_{sl}$ ,  $f_{ss}$  y  $f_{sw}$  corresponde a los esfuerzos generados a la interacción sólidos-líquido, sólidos-sólidos y sólidos-pared, respectivamente. Del mismo modo  $f_{ls}$ ,  $f_{ll}$  y  $f_{lw}$  representan a los esfuerzos resultantes de la interacción líquido-sólidos, líquido-líquido y líquido-pared, respectivamente.

Debido al efecto (o condición) de arrastre recíproco, se cumple:

$$(1-c) f_{LS} + c f_{SL} = 0$$

Denotando por  $\langle \rangle$  promedios sobre el área del flujo, se tiene la ecuación de Wallis:

$$\rho_s \frac{Dv_s}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_s g \frac{\partial h}{\partial x} + \langle f_{sl} \rangle + \langle f_{sw} \rangle$$

$$\rho_L \frac{DV_L}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_L g \frac{\partial h}{\partial x} + \langle f_{LS} \rangle + \langle f_{L,w} \rangle$$

donde  $V = \langle v \rangle$  es la velocidad media en la sección.

Generalmente  $\langle \rangle$  se omite de las ecuaciones. En general, las ecuaciones anteriores vienen de una expresión local para la fase k:

$$\rho_k \frac{Dv_k}{Dt} = -\nabla P + \rho_k b + f_k$$

donde  $f_k$  es la fuerza de interacción y  $b$  las fuerzas másicas.

Para flujo homogéneo,  $V_s = V_i = V$  y  $c$  es independiente de la posición. Llamando  $\tau_w$  al esfuerzo de corte actuando sobre las paredes, la ecuación de momentum aplicada a una tubería circular de diámetro  $D$  se reduce a:

$$\rho_m \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4\tau_w}{D} = 0$$

donde:

$$\frac{4\tau_w}{D} = -\frac{1}{A} \int_A [c f_{sw} + (1-c) f_{L,w}] dA$$

## FUERZA DE ARRASTRE EN SISTEMAS MULTIPARTICULADOS

En suspensiones diluidas, es difícil lograr una distribución homogénea y las partículas tienden a conglomerarse. Estos conglomerados se comportan como partículas más grandes y sedimentan mucho más rápido que las partículas individuales. Para concentraciones mayores al 5-10% (en volumen), el efecto del conglomerado en la fuerza de arrastre se hace cada vez más importante. Esto requiere que la ecuación de la fuerza de arrastre se vea modificada.

Para una partícula sola, la fuerza de arrastre está dada por:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_L C_D (\vec{V}_L - \vec{V}_S) (v_L - v_S) A_p$$

donde  $C_D$  es el coeficiente de arrastre y  $A_p$  el área de la partícula proyectada en la dirección del flujo. Para un conglomerado de partículas, la ecuación anterior se

modifica de la siguiente manera:

$$F_D = \frac{\rho_L C_{DS} (\vec{V}_L - \vec{V}_S) (v_L - v_s) A_p}{2 (1-c)^{1,7}}$$

donde  $C_{DS}$  es un coeficiente de arrastre modificado por el efecto de la concentración, dado por:

$$C_{DS} = \frac{24}{Re_s} \quad , \quad Re_s < 0,2$$

$$C_{DS} = \frac{24}{Re_s} (1 + 0,15 Re_s^{0,687}) \quad , \quad 0,2 \leq Re_s \leq 1000$$

$$C_{DS} = 0,44 \quad , \quad 1000 < Re_s$$

$$Re_s = \frac{d(1-c) (v_L - v_s) \rho_L}{\mu_L}$$

donde  $d$  es el tamaño de la partícula.

Para flujos unidimensionales, la fuerza de arrastre por unidad de volumen actuando sobre cada partícula es:

$$f_{SL} = \frac{3C_{DS} \rho_L (v_L - v_s) |v_L - v_s|}{4d (1-c)^{1,7}}$$

La fuerza del fluido sobre las partículas se expresa en término del factor de fricción interfacial  $C_{Lb}$ :

$$f_{SL} = \frac{C_{Lb} \rho_L (v_L - v_s) |v_L - v_s|}{d}$$

donde:  $C_{Lb} = 1,75 + \frac{150 \mu_L c}{d \rho_L |v_L - v_s| (1-c)}$

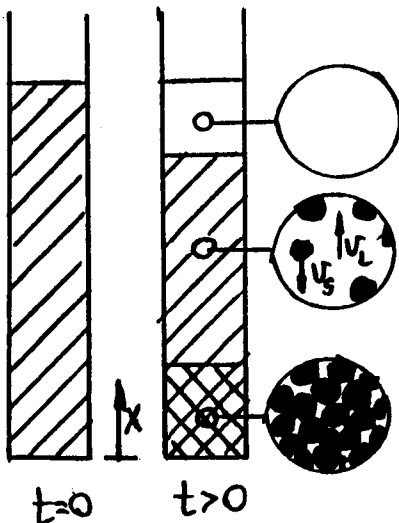
Si no es posible definir un diámetro medio efectivo de la partícula, se utiliza la ley de Darcy:

$$f_{LS} = -\mu_L \frac{(v_L - v_s)(1-c)}{k}$$

donde  $k$  es la permeabilidad del medio ( $m^2$ )

### SEDIMENTACION DE SUSPENSIONES FORMADAS POR PARTICULAS QUE NO SE CONGLOMERAN Y DE CARACTERISTICAS UNICAS

Consideremos que las partículas están sedimentando con velocidades  $v_s$ . Supongamos además que la concentración en la región de sedimentación (///) es independiente del tiempo y la posición. De las ecuaciones de continuidad para ambas fases resulta que  $v_s$  y  $v_L$  también deben ser constantes en esta región, por lo que las fuerzas de inercia en las ecuaciones de momentum, pueden despreciarse. Si se considera que el efecto de pared es despreciable ( $f_{sw} = f_{Lw} = 0$ ), que no hay interacción entre partículas ( $f_{ps} = 0$ ) y que el efecto de fricción del líquido es despreciable ( $f_{Ll} = 0$ ), las ecuaciones de momentum quedan:



$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_s g \frac{\partial h}{\partial x} + f_{SL}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_L g \frac{\partial h}{\partial x} + f_{LS}$$

Restando:  $0 = (-\rho_s + \rho_L) g \frac{\partial h}{\partial x} + f_{SL} - f_{LS}$

La condición de arrastre recíproco dice:  $(1-c) f_{LS} + c f_{SL} = 0$

o sea:

$$f_{LS} = -\frac{c}{1-c} f_{SL}$$

$$0 = (-\rho_s + \rho_L) g \frac{\partial h}{\partial x} + f_{SL} \left( 1 + \frac{c}{1-c} \right)$$

Considerando el sistema coordenado de la figura  $\frac{\partial h}{\partial x} = 1$ , por lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$0 = (-\rho_s + \rho_L) g + f_{SL} \left( \frac{1-c+c}{1-c} \right)$$

de donde se despeja la fuerza por unidad de volumen de los sólidos sobre el líquido.

$$\frac{f_{SL}}{1-c} = (\rho_s - \rho_L) g$$

En una mezcla que está sedimentando, el flujo volumétrico neto es nulo en cualquier sección.

$$Q_s + Q_L = 0$$

$$\int_A (v_s c + v_L (1-c)) dA = 0$$

$c > 0$ ,  $(1-c) > 0$ ,  $dA > 0$ ,  $v_L > 0$ ,  $v_s < 0$ . Como la integral anterior es válida para cualquier área de integración, se cumple que:

$$v_s c + v_L (1-c) = 0$$

en cualquier sección. Usando la expresión para la fuerza de arrastre por unidad de volumen

$$f_{sL} = \frac{3}{4} \frac{C_{DS} \rho_L (v_L - v_s) |v_L - v_s|}{d (1-c)^{1.7}}$$

y las expresiones para  $C_{ns}$  podemos obtener una expresión para la velocidad de sedimentación.

Notar que el efecto boyante surge en forma natural de las ecuaciones de mometum. En efectos, si en las ecuaciones de momentum introducimos la expresión para  $f_{sL} = (1-c) (\rho_s - \rho_L) g$ , se obtiene:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_s g + (1-c) (\rho_s - \rho_L) g$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = [\rho_s c + \rho_L (1-c)] g$$

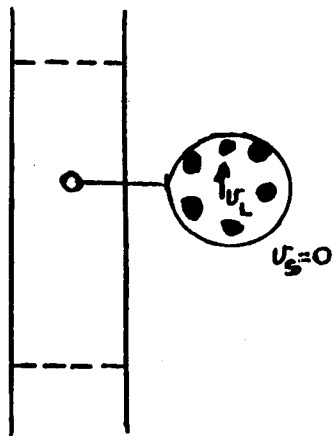
En término en paréntesis cuadrado de la expresión anterior corresponde a la densidad de la mezcla,  $\rho_m$ . De este modo, podemos escribir.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_m g$$

De donde se ve que la densidad de la mezcla determina el gradiente de presión.

Las relaciones anteriores no son válidas en la región donde se tiene el lecho sedimentado (~~XXX~~) porque en esta región no es válida la suposición  $f_{sL} = 0$ .



**FLUDIZACION:**

Corresponde a la condición límite en la que las partículas sólidas están a punto de iniciar el movimiento en una tubería vertical, en un lecho sedimentado:

Consideremos que inicialmente no hay flujo y la velocidad comienza a aumentarse lentamente. Cuando el fluido está quieto,  $f_{i,s} = f_{i,w} = 0$  y  $f_{s,i} = 0$ .

Luego, el gradiente de presiones en el fluido del lecho depende sólo de la densidad del fluido.

Considerando  $f_{i,w}$  pequeño cuando empezamos a aumentar la velocidad, los mismo que  $f_{s,s}$  y  $f_{i,i}$ , tenemos que las ecuaciones de momento para las distintas fases son:

$$\text{Fase sólida} : 0 = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_s g + f_{sL} + f_{sw}$$

$$\text{Fase líquida} : 0 = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_L g + f_{LS}$$

$$\text{Reciprocidad del arrastre: } (1-c) f_{LS} + c f_{sL} = 0$$

Restando las ecuaciones de momento y utilizando la condición de reciprocidad de arrastre se obtiene:

$$0 = (\rho_s - \rho_L) g - \frac{c}{1-c} f_{sL} - f_{sL} - f_{sw}$$

de donde es posible obtener una expresión para la fuerza de interacción entre los sólidos y la pared:

$$f_{sw} = (\rho_s - \rho_L) g - \frac{f_{sL}}{1-c}$$

Esta fuerza es positiva, disminuyendo a medida que la velocidad del fluido (y  $f_{sl}$ ) aumenta. Eventualmente se llega a la situación  $f_{sw}=0$ . Si se sigue aumentando la velocidad, las partículas sólidas comienzan a moverse y el lecho comienza a expandirse, disminuyendo la concentración y manteniéndose la relación

$$\frac{f_{SL}}{1-C} = (\rho_s - \rho_L) g$$

deducida anteriormente. Si no hay movimiento de partículas, la velocidad media  $V$  está dada por  $V=v_L(1-c^*)$ , donde  $c^*$  es la concentración del lecho (sedimentado).

### SISTEMAS DE MULTIESPECIES

Denotando por  $i$  a cada especie de sólidos, la densidad media de la mezcla es:

$$\rho_m = \rho_L(1-C) + \sum \rho_{si} c_i$$

donde  $c_i$  es la fracción volumétrica de la especie  $i$  y  $C$  es la concentración total de sólidos  $C = \sum c_i$ .

En los sistemas de multiespecies, se aplican las ecuaciones para  $f_{sl}$  y  $C_{ns}$ , reemplazando  $c$  por  $C$ .

Si los efectos de inercia y fuerzas de la pared son despreciables, entonces la fuerza de arrastre se equilibra con el peso y las de presión:

Para la especie  $i$ :  $f_{SLi} = (\rho_{si} - \rho_m) g$  (recordar que los  $f$  son fuerzas por unidad de volumen):

Luego:

$$\frac{18\mu_L (v_L - v_{si}) (1 + 0,15 Re_{si}^{0,687})}{d_i^2 (1-C)^{2,7}} = (\rho_{si} - \rho_m) g$$

o sea:

$$v_{si} = v_L - (\rho_{si} - \rho_m) \frac{gd_i^2}{18\mu_L} \frac{(1-C)^{2,7}}{1 + 0,15 Re_{si}^{0,687}}$$

Esta ecuación muestra que partículas más densas que el líquido pueden moverse hacia arriba si son lo suficientemente finas, aunque la mezcla en su conjunto esté sedimentando ( $v_{s1} > 0$  indica flujo ascendente).

La velocidad de sedimentación de una partícula en una mezcla se determina usando la ecuación anterior y el hecho que no existe un flujo neto en cualquier sección del tubo de sedimentación:  $v_L(1-C) + \sum C_i v_{s1} = 0$

### INTERACCION PARTICULA - PARTICULA

Recordemos la ecuación de momentum para flujo monofásico:

$$\rho_L \frac{DV_L}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_L g \frac{\partial h}{\partial x} + f_{Lw}$$

$v_L$  es la velocidad instantánea.

$f_{Lw}$  es la fuerza de origen viscoso que se debe a la presencia de la pared y que se transmite a través del fluido (también podría denotarse como  $f_{L1}$ ).

En general, en la dirección  $x$  esta fuerza (por unidad de volumen) es:

$$f_{LL} = -\left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

En flujos bifásicos, se tienen fuerzas en las dos fases que surgen por la presencia de la pared:

Según  $x$ :

$$f_{sw} = -\frac{1}{C} \left( \frac{\partial \tau_{sxx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{syx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{szx}}{\partial z} \right)$$

$$f_{Lw} = -\frac{1}{1-C} \left( \frac{\partial \tau_{Lxx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{Lyx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{Lzx}}{\partial z} \right)$$

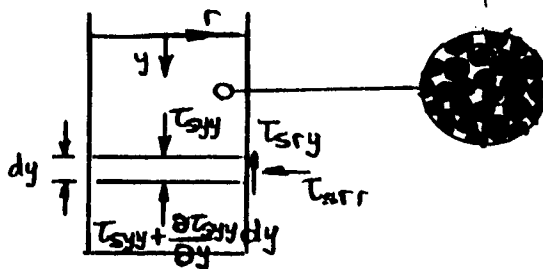
Requerimos evaluar los distintos componentes de las ecuaciones anteriores.

Consideremos primero un par de casos simples:

## 1) TUBO VERTICAL CON UNA MEZCLA SIN MOVIMIENTO

$$\frac{Dv}{Dt} = 0 \quad (\text{no hay flujo})$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -1 \quad (\text{tubo vertical})$$



Teníamos que las ecuaciones del movimiento son:

Fase sólida:

$$\rho_p \frac{Dv_p}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_p g \frac{\partial h}{\partial x} + f_{sl} + f_{sw} \quad (1)$$

Fase líquida:

$$\rho_L \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_L g \frac{\partial h}{\partial x} + f_{LS} + f_{LW} \quad (2)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho_s g + f_{sl} - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \tau_{syy}}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{sry}) \right) \quad (3)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho_L g + f_{LS} - \frac{1}{1-c} \left( \frac{\partial}{\partial y} \tau_{Lyy} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{Lry}) \right) \quad (4)$$

como  $v_s = v_L = 0$  se tiene que  $f_{LS} = f_{SL} = 0$ . Además  $v_L = 0$  implica  $\tau_L = 0$

Luego, Ec (3) - Ec (4):

$$0 = g(\rho_s - \rho_L) - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial y} \tau_{syy} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{sry}) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \tau_{syy} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{sry}) = cg (\rho_s - \rho_L) \quad (5)$$

Integremos (5) en una sección transversal del tubo:

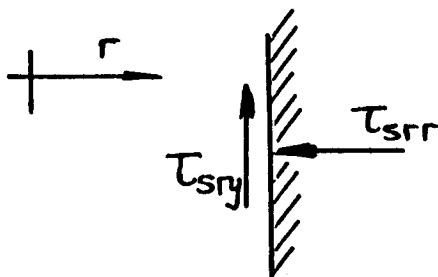
$$2\pi \int_0^{D/2} \text{Ec. 5 } r dr \quad (6)$$

$$2\pi \int_0^{D/2} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{syy} r dr = \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial}{\partial y} \langle \tau_{syy} \rangle \quad (7a)$$

donde  $\langle \rangle$  denota el promedio en la sección transversal

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{D/2} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{sry}) r dr &= 2\pi \int_0^{D/2} d(r \tau_{sry}) = 2\pi (r \tau_{sry}) \Big|_0^{D/2} \\ &= \pi D \tau_{sry} \Big|_{\text{PARED}} \end{aligned} \quad (7b)$$

En la pared,  $\tau_{sry}$  y  $\tau_{srr}$  están ligados a través de un coeficiente de fricción estáticos (Ley de Coulomb):



$$\tau_{sry} \Big|_{\text{PARED}} = \eta_s \tau_{srr} \Big|_{\text{PARED}} \quad (8)$$

Reemplazando en Ec (6):

$$\frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial}{\partial y} \langle \tau_{syy} \rangle + \pi D \eta_s \tau_{srr} \Big|_{\text{PARED}} = \frac{\pi D^2}{4} cg (\rho_s - \rho_L)$$

$$\frac{d}{dy} \langle \tau_{syy} \rangle + \frac{4\eta_B}{D} \tau_{sxx} |_{\text{PARED}} = c g (\rho_S - \rho_L) \quad (9)$$

Suponiendo:

$$\tau_{sxx} |_{\text{PARED}} = K \langle \tau_{syy} \rangle \quad (10)$$

Resultado:

$$\frac{d}{dy} \langle \tau_{syy} \rangle + \frac{4K\eta_B}{D} \langle \tau_{syy} \rangle = c f (\rho_S - \rho_L) \quad (11)$$

Integrando la Ec (11) con las condiciones de borde  $y=0$ ,  $\langle \tau_{syy} \rangle = 0$ .

resulta:

$$\langle \tau_{syy} \rangle = \frac{(\rho_S - \rho_L) c g D}{4K\eta_B} \left[ 1 - e^{-\frac{4K\eta_B y}{D}} \right] \quad (12)$$

La ecuación anterior corresponde a la ecuación de Janssen para el esfuerzo axial

Expandamos en series:  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

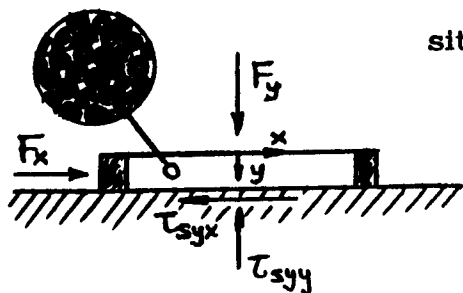
Luego, para distancias pequeñas, la Ecuación de Janssen se reduce a:

$$\langle \tau_{syy} \rangle \approx (\rho_S - \rho_L) c g y$$

Las Ecs. 10 y 12 dan la variación de los esfuerzos axiales y en la pared cuando la mezcla ha sedimentado completamente. (Recordar que para una mezcla completamente fluidizada, el gradiente de presiones está dado por  $\frac{dp}{dx} = -\rho_m g$ ).

## II) ESFUERZOS EN FLUJOS DE GRANOS

La Ley de Coulomb también puede aplicarse a situaciones en que los sólidos están en movimiento:

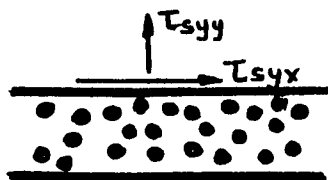


$$\eta_B = \frac{\tau_{syyx}}{\tau_{syy}}$$

$\eta_s$  depende de las partículas y del material de la mesa. En el caso de reemplazar la superficie de la mesa por una capa de granos:  $\eta_s = \text{tg } \phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo de fricción interna.

$$\text{tg } \phi = \frac{\tau_{syx}}{\tau_{syy}}$$

Bagnolds (1954) hizo el siguiente experimento:



Al aplicar un esfuerzo  $T_{syy}$  aparece un normal  $T_{syy}$ . Dependiendo de la tasa de deformación angular, Bagnolds determinó la presencia de dos regímenes "macroviscoso" e "inercial", definidos por el número de Bagnold:

$$B = \frac{\rho_s \lambda^{1/2} d^2}{\mu_L} \dot{\gamma}_s$$

$\dot{\gamma}_s$  es la tasa de deformación de la mezcla y  $\lambda$  es la concentración lineal:

$$\lambda = \left[ \left( \frac{C_{\max}}{C} \right)^{1/3} - 1 \right]^{-1}$$

Si  $B < 40$  se tiene el rango macroviscoso, en el que el esfuerzo de corte está dado por:

$$\tau_{syx} = \mu_L f(\lambda) \dot{\gamma}_{syx}$$

al producto  $\mu_L f(\lambda)$  podemos interpretarlo como una viscosidad equivalente de la mezcla. Existen varias expresiones para  $f(\lambda)$ , por ejemplo:  $f = a \lambda^{3/2}$ ,  $a = 2,25$

Si  $B > 450$  se tiene el rango inercial. Este rango surge como un resultado de los colisiones de las partículas que se mueven en capas a distintas velocidades. El esfuerzo de corte debido a este efecto está dado por:

$$\tau_{syx} = K_1 \rho_s (\lambda d)^2 \dot{\gamma}_{syx} |\dot{\gamma}_{syx}|$$

Existen varias expresiones para  $K_1$ . Por ejemplo para el caso de flujos detríticos  $K_1 = b \operatorname{sen} \phi$ ,  $b \approx 0.042$ . La relación entre  $\tau_{syx}$  y el esfuerzo normal que aparece en un flujo de granos está dada por:

$$\left| \frac{\tau_{syx}}{\tau_{syy}} \right| = \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{si se está en reposo } \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \phi)$$

Jenkins y Savage (1983) obtuvieron analíticamente para la región inercial:

$$\tau_{syx} = -0,2 \kappa_p (2 + \alpha) \dot{\gamma}_{syx}$$

$$\tau_{syy} = \frac{\kappa_p (\pi \Theta_p)^{1/2}}{d}$$

donde  $\alpha$  es un parámetro adimensional en la función distribución de colisiones y  $\kappa_p$  es una conductividad pseudo térmica, la que depende del coeficiente de elasticidad de las partículas,  $e$ , y de la pseudotemperatura  $\Theta_p$ :

$$\Theta_p = \frac{\overline{v^2}}{3}$$

$$\kappa_p = \frac{\rho_s d (1+e) (\Theta_p/\pi)^{1/2} c^2 (2-c)}{(1-c)^3}$$

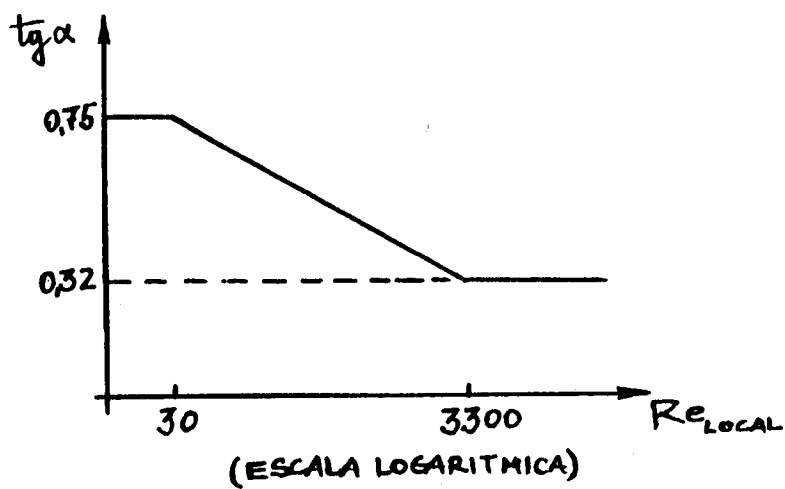
Takahashi (1991) presenta los siguientes resultados de Bagnold:

$$B < 40 \quad : \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,4$$

$$B > 450 \quad : \quad \begin{array}{l} \lambda > 12, \operatorname{tg} \alpha = 0,40 \\ \lambda < 12, \operatorname{tg} \alpha = 0,32 \end{array}$$

$$\text{Bagnold ligó } \operatorname{tg} \alpha \text{ con un Reynolds local: } \operatorname{Re}_{\text{LOCAL}} = \frac{\rho_s d^2 \tau_{syy}}{\lambda \mu_m^2}$$





#### REFERENCIAS

SHOOK, C.A. Y M.C. ROCO (1991) Slurry Flow. Principles and Practice, Butterworth-Heinemann, Stoneham.

TAKAHASHI, T. (1991). Debris Flow, IAHR-AIRH Monograph Series. A.A. Balkema/Rotterdam/Brookfield.