FI1002 - SISTEMAS NEWTONIANOS

Apuntes del curso

Elaborado por: Hugo Arellano, René Garreaud,

Diego Mardones, Nicolás Mujica, Alvaro Nuñez, Rodrigo Soto

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

01 Julio 2010

Indice

Parte I

Información General

1.1. Presentación

La física es una disciplina inherentemente vinculada a la experimentación y a la cuantificación de sus resultados. Para esto diseñar sistemas controlados es de suma importancia. Por otra parte, la caracterización y síntesis de los fenómenos físicos mediante las matemáticas formales también ha sido de crucial importancia para poner a prueba el potencial predictivo de las teorías y modelos. En la asignatura de Sistemas Newtonianos (SN) se busca un acercamiento integrado de ambos aspectos, donde coexisten la experimentación, el formalismo y el tratamiento numérico de sistemas mecánicos.

El esquema de trabajo semanal de SN consiste en una sesión de cátedra, una clase auxiliar y una sesión práctica de tres horas de duración.

Las cátedras y clases auxiliares se realizarán en salas estándares. La sesión práctica se realizará en en la Sala Galileo (segundo piso, lado oriente del Departamento de Física), bajo la dirección del profesor de la cátedra y el apoyo de dos profesores auxiliares. Esta sala cuenta con recursos multimediales para la presentación de las materias, la realización de experimentos y de cálculo numérico.

Por lo general, el desarrollo de cada unidad contempla una introducción por parte del profesor de la cátedra, quien presentará el soporte teórico del tema a tratar. Además supervisará la realización de una práctica experimental y/o numérica que culmina con la elaboración de un informe. En la realización de las prácticas, cada sección será estructurada en equipos de trabajo de tres estudiantes, los cuales serán definidos previamente por el profesor.

1.2. Programa

Semana	Unidad	Contenidos
1	0: Introducción, Matlab	Uso de Matlab.
2	1: Métodos Numéricos	Uso de Matlab, solución de problemas algebraicos, solución de ecuaciones diferenciales.
3	2: Métodos Experimentales	Mediciones, promedio, error, desviación estándar, histogramas. Uso del sensor de fuerzas.
4	4A: Estática de Sólidos	Produto cruz, torque y momento angular. Centro de masas. Leyes de la estática. Aplicación de las leyes de estática a sólidos.
5	4B: Dinámica Plana de Sólidos	Momento de Inercia. Teoremas de Steiner Energía. Uso de webcam para medir tiempos
6	4C: Dinámica Plana de Sólidos	Rotación de Sólidos. Momento angular.
7	4D: Dinámica Plana de Sólidos	Rotacion con traslación, movimiento en plano inclinado.
8	5A-B: Oscilaciones	Introducción a tipos de oscilaciones. Definición y medición de periodo, amplitud y fase. Oscilación amortiguada.
9	5C: Oscilaciones	Resonancia
10	6A: Ondas	Introducción a medios continuos, ondas propagativas.
11	6B: Ondas	Modos normales. Resonancia.
12	7A: Fluidos	Presión. Experimento de presión colisional. Identificación microscópica de la presión.
13	7B: Fluidos	Leyes de Pascal y Arquímides.

1.3. Material Docente

Asociado a cada unidad, existe material docente consistente en:

- Material teórico
- Material complementario
- Guía de prácticas
- Guía de ejercicios

Material teórico En él se presenta la materia asociada a la unidad, con las formulaciones teóricas correspondientes, ejemplos y aplicaciones. Este material puede ser escrito por algún profesor del ramo o bien puede ser simplemente una referencia a alguna de las bibliografías del curso.

En la clase de cátedra se expondrán y explicarán estos contenidos y se espera que el material sea leido previamente por los estudiantes de manera de facilitar el desarrollo de la clase. La lectura de este material será evaluada en el Control de Lectura al inicio de cada sesión práctica. Estos controles serán bastante elementales y no se pretende que los estudiantes dominen la materia, sino que solamente que la hayan leido con cierta detención. Al final de cada unidad se dan ejemplos de estas preguntas en las secciones "Preguntas Conceptuales" o al interior del texto.

Material complementario Este material complementa el Material Teórico con lecturas más avanzadas, material específico de algunos temas o guías de problemas propuestos.

Guía de prácticas Esta guía describe las actividades prácticas (laboratorios y/o cálculos numéricos) que se van a realizar en la clase.

La lectura de este material también será evaluada en el Control de Lectura al inicio de cada sesión práctica.

Guía de ejercicios Es una guía de problemas asociada a cada unidad, indicando el nivel y tipo de problemas que serán evaluados en el Ejercicio Semanal. Este ejercicio será tomado al inicio de las clase auxiliar que se realice inmediatamente después a la cátedra respectiva.

Advertencia Es importante recalcar que NO toda la materia del curso se encuenta en estos apuntes. Los alumnos deberán complementar estos apuntes con las lecturas recomendas (textos tales como el Tipler o Serway) donde la materia se expone en muchos casos con mayor profundidad y detalle.

1.4. Asistencia

- La asistencia a las sesiones prácticas es obligatoria. Una inasistencia mayor al 30 % es causal de reprobación del curso.
- Las inasistencias a controles y exámenes deben ser justificadas en Bienestar Estudiantil a fin de validar su recuperación.
- La inasistencia a una sesión práctica conlleva la nota mínima en el informe respectivo.
- El inicio de las sesiones está programada para las 08:30 hrs en la mañana, y 14:30 en la tarde. El acceso al recinto se cierra a esta hora, permitiéndose la entrada 20 minutos después. Posterior a ello no se permitirá el acceso al recinto de clases.

1.5. Informes de Prácticas

Los informes constituyen una síntesis del trabajo en equipo realizado en la sesión práctica. Un buen informe se caracteriza por la claridad y precisión de sus ideas y lo conciso con que son expuestas. Para efectos de esta asignatura, los informes se han estructurado en cuatro secciones:

Resumen Se describe en forma concisa los objetivos de la experiencia, el trabajo realizado y sus conclusiones principales.

Criterio de evaluación: Un resumen correcto permite formarse una idea general de la experiencia.

Descripción Se describe en algún detalle los pasos y protocolos seguidos y las elecciones de parámetros o valores tomados.

Criterio de evaluación: Una correcta exposición le permitiría reproducir el experimento a cualquier persona.

Resultados, análisis y discusión Se presenta los datos obtenidos y los graficos respectivos. Se realiza además un análisis respecto a los posibles errores y la consistencia con la teoría. Se plantaen posibles caminos para corregir las falencias, se refutan o corrigen supuestos, etc.

Criterio de evaluación: Una correcta presentación de resultados indica los valores de las medidas y sus desviaciones estándar o errores. Los gráficos deben indicar los ejes y unidades y deben estar en las escalas adecuadas (ver sección Guía sobre Gráficos). Por último, un buen análisis y discusión de los resultados permitiría comprender si se han cumplido los objetivos de la experiencia, si los resultados son consistente y si hay alguna dificultad propia a la actividad.

Conclusiones Se presentan de manera concisa las conclusiones de la experiencia de acuerdo a los objetivos de ésta y los resultados de las mediciones y análisis.

Criterio de evaluación: Una correcta presentación de las conclusiones permitría determinar cuál es el aprendizaje de la experiencia. Se debe notar que no hay buenas o malas conclusiones a priori, solamente que éstas deben ser consistentes con los resultados obtenidos.

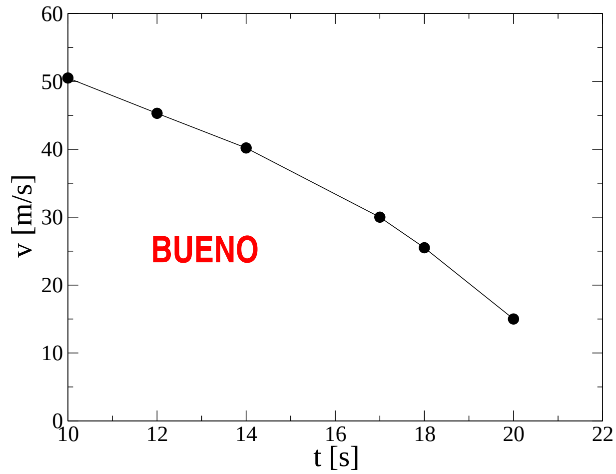
Durante el semestre se modificará en forma progresiva la estructura de los informes, siendo al comienzo más simples (por ejemplo sin Resumen), pero pronto éstos incluirán todas las secciones aquí descritas.

1.6. Gráficos

Los gráficos, para que éstos sean útiles para representar información física, deben tener cierta estructura mínima.

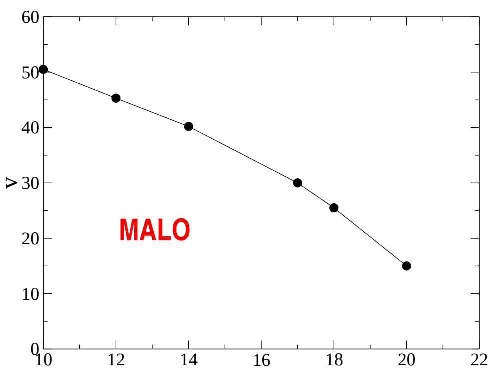
Los gráficos deben indicar claramente las magnitudes que se están graficando (las etiquetas de los ejes) y las unidades en las que están medidas. Además los ejes deben estar en una escala que permita leer e interpretar correctamente los datos.

Para ilustrar lo anterior, a continuación se presenta un gráfico con toda la información relevante:

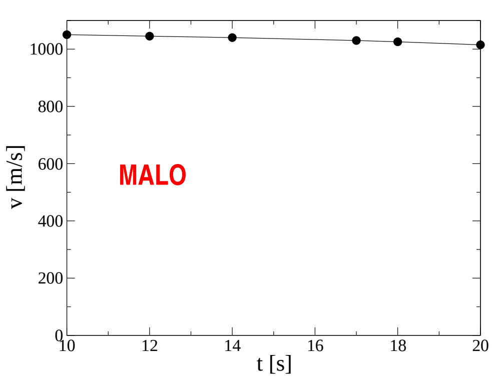


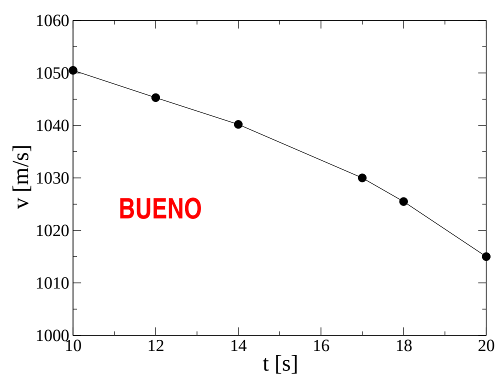
donde se indica que se grafica la velocidad (en metros por segundo) en función del tiempo (en segundos). Los puntos indican las mediciones hechas y la línea es simplemente una guía visual para leer mejor el gráfico.

A continuación se presentan algunos gráficos con algunas deficiencias que se deben evitar:



Se indica que se grafica la velocidad pero no se se nalan las unidades. Tampoco se indica en función de qué se está graficando (posicion?, tiempo?).

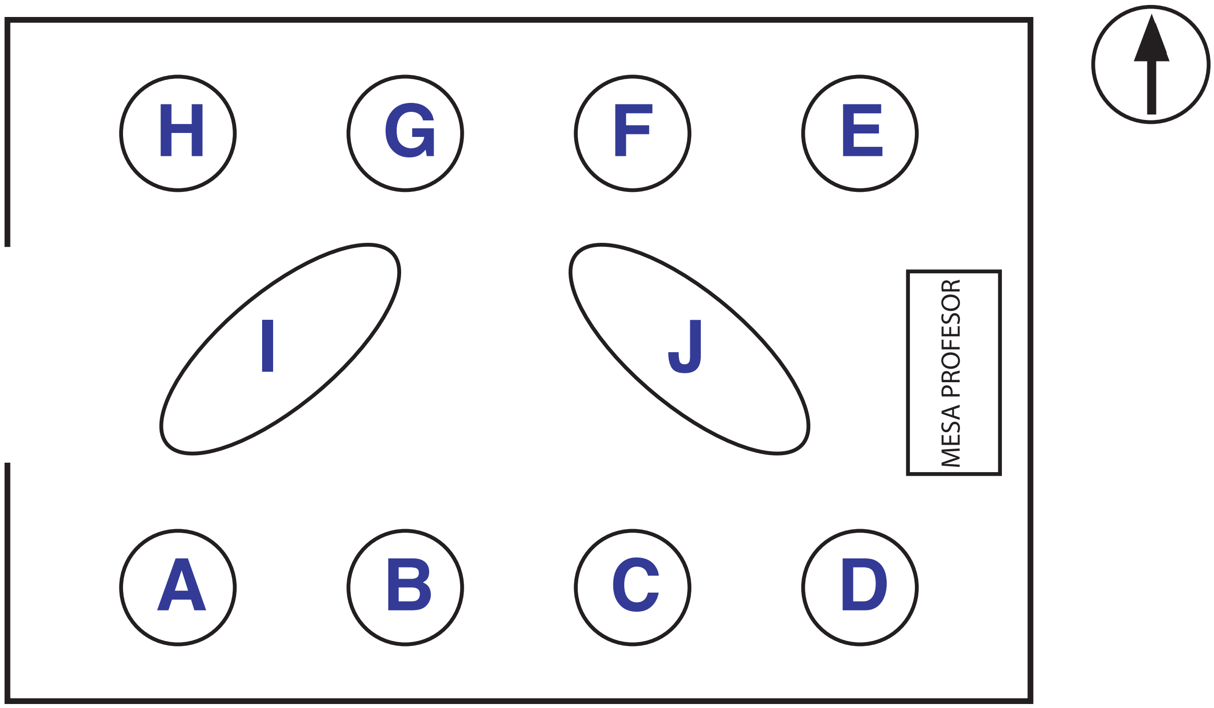




En el caso de la izquierda la escala vertical no es adecuada pues no permite determinar los valores que toma la velocidad. Lo más adecuado es hacer un gráfico como en la derecha.

1.7. Sala Galileo

La distribución de grupos es de acuerdo al siguiente mapa



Parte II

Material Docente

Unidad 1: Métodos Numéricos

1.1. Introducción

En la descripción cuantitativa de los fenómenos físicos, no siempre es posible resolver análiticamente el modelo que lo describe e, incluso en algunos casos en que esto es posible, la solución analítica no siempre es fácil de interpretar y visualizar.

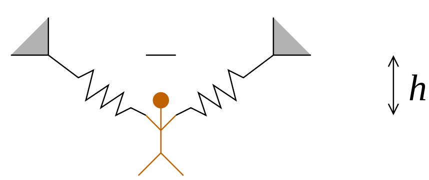
Como una herramienta complementaria a las técnicas analíticas, es usual en la física utilizar las herramientas numéricas, que con la ayuda de un computador permiten resolver, analizar y graficar diversos modelos físicos.

En esta unidad se ilustrará cómo se utiliza el computador, mediante el programa `Matlab` con estos fines.

1.2. Cálculos complejos

Un primer uso de los métodos numéricos consiste en realizar cálculos complejos, para los cuales no existe una solución analítica o ésta es muy difícil de analizar.

Ejemplo:
Consideremos el ejemplo de una persona parada sobre una tarima. La persona está sujeta a dos resortes de largo natural L, cada uno de los cuales está amarrado a la misma altura de la persona en direcciones opuestas y que inicialmente no están elongados y en posición horizontal.
En cierto momento la personal se suelta de la tarima y cae debido a la fuerza de gravedad. Se desea encontrar la profundidad hasta la que cae.



Si consideramos el nivel cero de la energía potencial gravitatoria en la altura inicial, entonces la energía inicial de la persona es nula.

$$E = 0$$

Una vez que la persona se lanza, adquiere energía potencial gravitatoria, elástica y cinética. En la elongación máxima la energía cinética se anula y su energía es:

$$E = -mgh + k(\sqrt{h^2 + L^2} - L)^2$$

donde h es la profundidad a la que cae.

Si no hay roce se puede obtener h igualando la energía inicial y final, lo que da

$$-mgh + k(\sqrt{h^2 + L^2} - L)^2 = 0$$

Si esta expresión se expandiera daría lugar a una ecuación de tercer grado lo que no permite realizar un análisis simple de la solución.

Sin embargo, si se dan valores numéricos es posible obtener el valor de h pedido. Por ejemplo, si $m = 80$kg, $L = 10$m, $k = 10$N/m y $g = 9{,}8$ m/s^2, en `Matlab` se hace:

```
>> m = 80  % Se asignan valores sin unidades
>> L=10
>> k=10
>> g=9.8
>> % Se define la ecuacion que se quiere resolver
>> ec=@(h) -m*g*h + k*(sqrt(h^2+L^2)-L)^2
>>
>> % Se resuelve usando la funcion fzero(ecuacion,adivinanza)
>> hsol= fzero(ec,1.0) % Se resuelve para h
```

La respuesta es $hsol = 96{,}4$m.

Noten que la sintaxis de la definición de funciones es

```
 funcion = @(variable) definicion
```

Como la ecuación es no lineal, ésta puede tener muchas soluciones. Para escoger la que uno desea debe darse una adivinanza inicial. `Matlab` va a buscar la solución más cercana a la adivinanza inicial, de manera que es conveniente usar una buena adivinanza.

También se podría preguntar como depende h de la masa m, manteniendo los otros valores fijos. Para eso, lo mejor es hacer un gráfico de la forma:

```
>> L = 10  % Se asignan los valores fijos
>> k=10
>> g=9.8
>> masas=10:1:80; % Se genera un arreglo que parte en 10, incremento 1
>>               % y el ultimo valor es 80
>> hsol=zeros(1,length(masas)); % Se genera un arreglo de igual largo que masas
                                % con ceros
```

```
>> % Se puso punto y coma (;) para que no despliegue los resultados:
>> % las masas y hasol son arreglos y pueden ocupar mucha pantalla

>> for i=1:length(masas)
>>   m=masas(i);  % Se escoge cada valor de masa
>>   % Se define la ecuacion para cada valor de masa
>>   ec=@(h) h^3-(m*g/k)*h^2+(m*g/2/k)^2*h-2*m*g*L^2/k
>>
>>   % Se resuelve y se asigna la solucion encontrada al arreglo hsol
>>   hsol(i)= fzero(ec,1.0)
>> end
>> % Se grafica las soluciones en funcion de las masas
>> plot(masas,hsol)
```

Tarea: Ejecute este programa y analice si los resultados obtenidos son razonables.

1.3. Análisis de las leyes de Newton

Las leyes de Newton en una dimensión tienen tipicamente la forma

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$$

donde F es la fuerza, la cual puede depender de la posición x y la velocidad $\dot{x}$.

Si F es una expresión complicada, la ecuación de movimiento que resulta (una ecuación diferencial) puede ser imposible o muy difícil de resolver analíticamente. Sin embargo, usando algunas herramientas numéricas es posible obtener su solución.

1.3.1. Discretización temporal

Para poder estudiarla numéricamente, lo primero que debemos revisar es el concepto de *discretización temporal.*

Representar una función $x(t)$ en el computador (y también en los experimentos) es una tarea imposible pues para eso habría que dar los valores de la función para cada instante. En vez de eso, se aprovecha la propiedad de que muchas de las magnitudes físicas y, en particular la posición $x(t)$, son funciones continuas del tiempo. Esto implica que si se conoce x_0 para un instante dado t_0, el valor de x para otros tiempos, cercanos a t_0, estarán muy bien aproximados por x_0. Es decir, para una función continua:

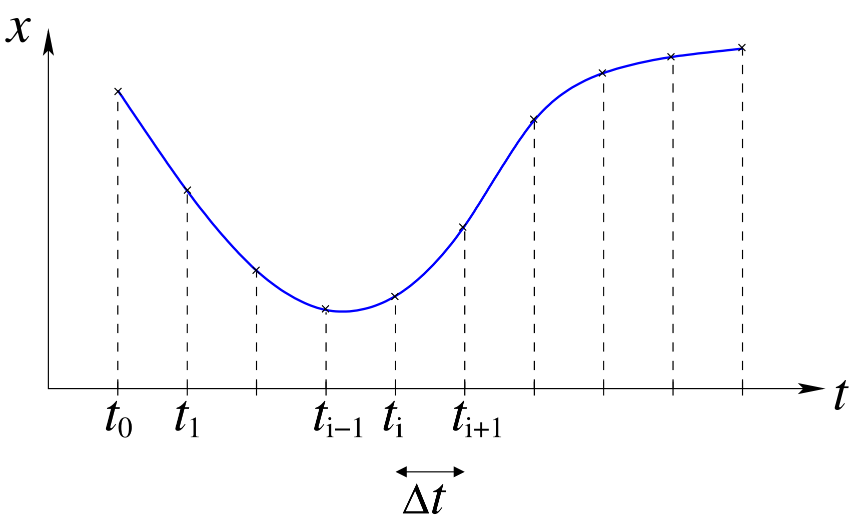
$$\text{Si} \quad t \approx t_0 \Rightarrow x(t) \approx x(t_0)$$

Luego, si se quiere representar una función $x(t)$ en un intervalo $[T_A, T_B]$ lo primero que se hace es *discretizar* el tiempo usando un espaciado peque no Δt, de manera que

$$t_i = T_A + i \times \Delta t \quad ; \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Luego, la función $x(t)$ se representa de manera discreta, dando los valores de ésta sólo en los instantes discretos

$$x_i = x(t_i)$$



Entonces, cuando se quiera resolver la ecuación de Newton en el computador, en vez de buscar la función completa $x(t)$, vamos a buscar los valores de $x_i = x(t_i)$ para un Δt dado. Es importante destacar que mientras más peque no sea el valor de Δt, más fiel será la representación de la función; pero de todos modos no es necesario exagerar pues las funciones son continuas.

Hay que notar que esta representación discreta de las funciones es lo que usualmente se hace cuando se miden magnitudes físicas que varían en el tiempo o el espacio. Así, por ejemplo, la temperatura en Santiago se mide una vez cada minuto y no de manera continua. Lo mismo con la posición de un objeto móvil que al filmarlo con una cámara se tiene un muestreo cada cierta fracción de segundos solamente.

1.3.2. Derivadas discretas

Teniendo la función representada en tiempos discretos, es posible calcular de manera aproximada las derivadas de ésta en los tiempos de medición. Analizaremos la primera y segunda derivada que son las que se usan en la física newtoniana.

Se sabe que la primera derivada de $x(t)$ es

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

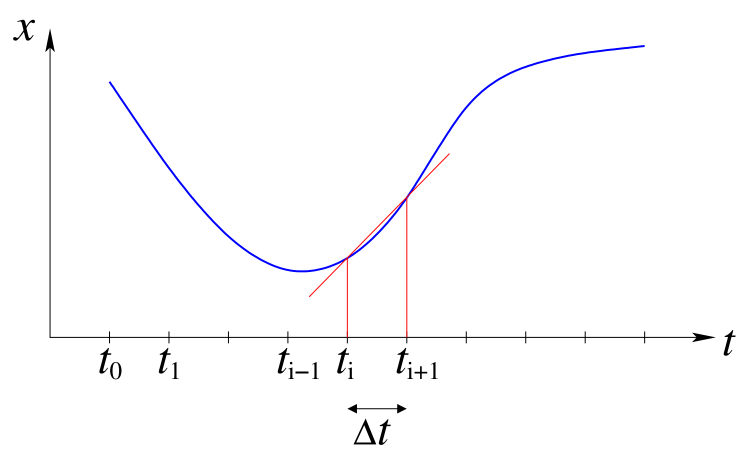
Luego, si Δt es chico, como muy buena aproximación se puede evaluar como

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

que si se evalúa en uno de los puntos de la discretización da

$$\begin{aligned}\dot{x}(t_i) &\approx \frac{x(t_i+\Delta t) - x(t_i)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \qquad (1.1)\end{aligned}$$

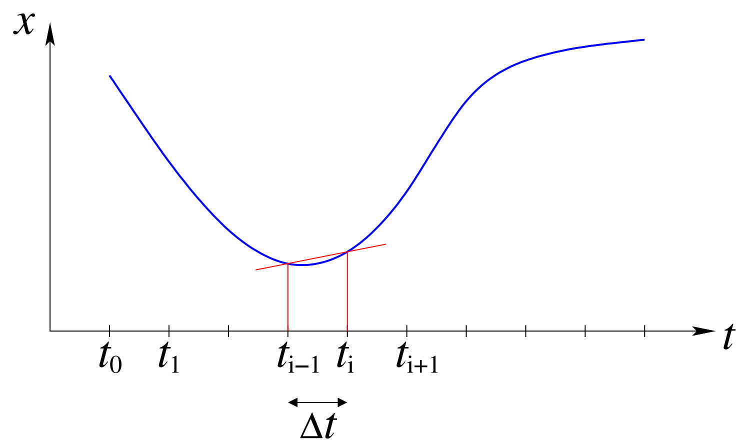
que se llama derivada *hacia adelante* pues usa el valor de la función en un instante y en otro más adelante en el tiempo.



También, si se usa $h = -\Delta t$ se obtiene

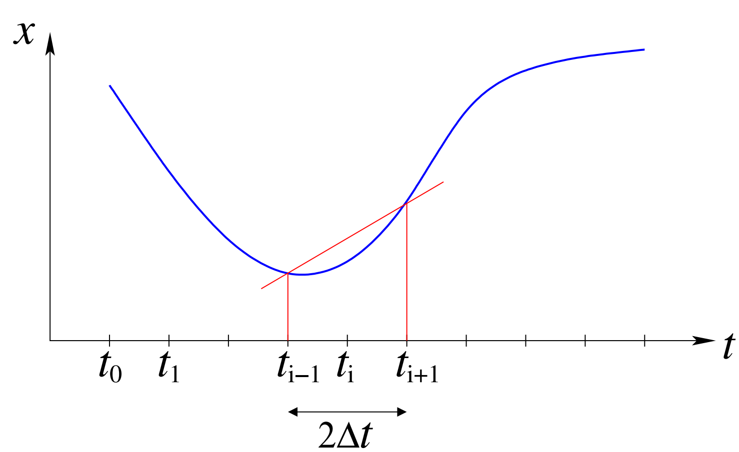
$$\begin{aligned}\dot{x}(t_i) &\approx \frac{x(t_i-\Delta t) - x(t_i)}{-\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_i) - x(t_i-\Delta t)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \qquad (1.2)\end{aligned}$$

que se llama derivada *hacia atrás*.



Promediando las dos expresiones, de la derivada hacia adelante y hacia atrás, se obtiene la llamada *derivada centrada*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_i) &\approx \frac{1}{2}\left[\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}+\frac{x_i-x_{i-1}}{\Delta t}\right] \\ &\approx \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2\Delta t} \qquad (1.3) \\ &\approx \frac{x(t_i+\Delta t)-x(t_i-\Delta t)}{2\Delta t} \qquad (1.4) \end{aligned}$$



De las tres expresiones para la derivada, si Δt está fijo, se puede demostrar que la derivada centrada es más precisa que las otras, pero a veces por comodidad o facilidad de cálculo se usarán las otras dos. Esto se verá con detalle en el curso *Métodos Numéricos*.

Para evaluar la segunda derivada, procedemos considerando que ésta es la derivada de la primera derivada. Así aplicando la expresión para la derivada centrada pero con $\Delta t/2$ se obtiene

$$\ddot{x}(t)=\frac{\dot{x}(t+\Delta t/2)-\dot{x}(t-\Delta t/2)}{\Delta t}$$

A su vez,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t+\Delta t/2) &= \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\\ \dot{x}(t-\Delta t/2) &= \frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}\end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}-\frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}\\ &= \frac{x(t+\Delta t)-2x(t)+x(t-\Delta t)}{\Delta t^2}\end{aligned}$$

Luego, evaluando en un punto de la discretización

$$\ddot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{\Delta t^2} \tag{1.5}$$

que se llama *derivada centrada de segundo orden.*

Tarea: Muestre que si $x(t)=\alpha t+\beta$ (α y β constantes), es decir, una línea recta, entonces la expresión aproximada de la derivada se anula tal como la expresión exacta.

En resumen, se tienen la siguientes expresiones aproximadas para la derivadas

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}(t_i) &\approx \frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t} && (1.6)\\ \dot{x}(t_i) &\approx \frac{x_i-x_{i-1}}{\Delta t} && (1.7)\\ \dot{x}(t_i) &\approx \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2\Delta t} && (1.8)\\ \ddot{x}(t_i) &\approx \frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{\Delta t^2} && (1.9)\end{aligned}}$$

1.4. Solución de la Ecuación de Newton: método de Verlet

Consideremos primero el ejemplo simple de una partícula unida a un resorte:

$$m\ddot{x} = -kx$$

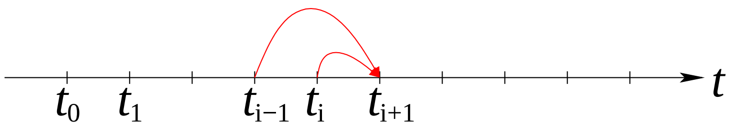
Evaluando la ecuación en t_i y usando la expresión discreta para la segunda derivada (1.9) se tiene

$$m\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{\Delta t^2} = -kx_i$$

de la que se puede despejar x_{i+1} como

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m}x_i\Delta t^2 \tag{1.10}$$

Esta expresión indica que si se conoce la posición en un instante (x_i), en otro previo (x_{i-1}) y el valor de la aceleración en ese instante ($-kx_i/m$), entonces es posible calcular la posición en un instante posterior. Dado lo anterior surge la idea de realizar una *iteración* pues con el nuevo valor obtenido ahora será posible calcular el siguiente y así para adelante.



Como para cada paso de la iteración se necesitan dos valores previos de la posición, surge el problema de cúales deben ser los primeros valores. Como se sabe, en la física newtoniana se debe indicar la posición y velocidad inicial del cuerpo para poder resolver el movimiento. Es decir, se dan x_0 y v_0. Recordando que la velocidad es la primera derivada de la posición y usando la expresión (1.6) se tiene

$$\begin{aligned} v_0 &= \dot{x}(0) \\ &= \frac{x_1 - x_0}{\Delta t} \end{aligned}$$

de la que se despeja

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t \tag{1.11}$$

Se tienen así todos los pasos del llamado algoritmo de Verlet (L. Verlet, Physical Review 1967)

- Dados: x_0, v_0
- Se calcula: $x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$
- Se itera desde $i = 1$ hasta el tiempo final:
  $$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m} x_i \Delta t^2$$

que va entregando sucesivamente los valores de x_2, x_3, ...

Como el paso i entrega el valor de x_{i+1} se debe iterar hasta $N-1$, donde N es el número total de puntos.

En Matlab, considerando que $m = 1$kg, $k = 0{,}5$N/m, $x_0 = 5{,}0$m y $v_0 = 2{,}0$m/s, eso se hace de la siguiente forma:

```
>> m=1.0 % Se dan los valores de m y k
>> k=0.5
>> Tfin = 20.0 % Se resuelve hasta 20 segundos
>> dt = 0.1  % Se da el paso de tiempo Deltat
>> % Se dan las condiciones iniciales
>> x0=5.0
>> v0=2.0
```

```
>>
>> % Se define el arreglo de tiempos
>> t=0:dt:Tfin;
>> % Se define el arreglo de posiciones
>> x=zeros(1,length(t));
>> % Se ponen las condiciones iniciales
>> x(1) = x0;
>> x(2) = x0+v0*dt;
>> % Se itera usando el algoritmo de Verlet
>> for i=2:length(x)-1
>>   x(i+1) = 2*x(i)-x(i-1) - k*x(i)*dt^2/m;
>> end
>> plot(t,x)
```

Para el caso de una fuerza cualquiera $F(x)$ es resultado es análogo y el paso de iteración es

$$\boxed{x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F(x_i)\Delta t^2/m \qquad (1.12)}$$

Si el sistema tiene fuerzas que dependen de la velocidad, por ejemplo fuerzas de roce viscosas o turbulentas, $F(x, \dot{x})$, se debe escribir la derivada de manera discreta. Lo más práctico en este caso es usar la derivada hacia atrás. En efecto, en ese caso se puede hacer

$$F(x, \dot{x}) \approx F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)$$

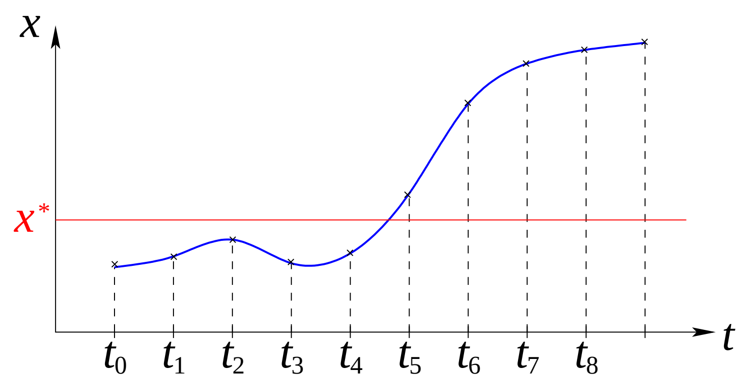
de manera que la iteración es

$$\boxed{x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)\Delta t^2/m \qquad (1.13)}$$

que permite hacer el cálculo numérico pues es *explícita*, es decir, el valor de x_{i+1} sólo depende de valores previos (que ya son conocidos).

1.5. Intersección con algún valor

En muchas aplicaciones interesa determinar cuándo la posición alcanza un valor determinado (por ejemplo, cuándo un proyectil choca con el suelo). Como la solución es discreta, lo más probable es que ninguno de los valores discretos coincida exactamente con el valor pedido.



En el ejemplo de la figura, el valor x^* se alcanza entre t_4 y t_5. Para determinar en qué intervalo ocurre la intersección, notamos que entre t_4 y t_5 la función pasa de estar bajo x^* a estar sobre este valor. En otros casos podría ocurrir justo a la inversa, pero lo importante es que la diferencia $(x - x^*)$ cambia de signo en la intersección. Luego, el criterio que se usa para determinar una intersección es:

$$\boxed{\text{Una intersección ocurre en el intervalo } i \text{ si: } (x_i - x^*) \times (x_{i+1} - x^*) < 0 \qquad (1.14)}$$

Una vez que se sabe en qué intervalo ocurre la intersección, se debe asignar un tiempo. Dado que la función se conoce sólo con una precisión Δt, la respuesta también tendrá esta indeterminación. Así, las siguientes respuestas son igualmente válidas.

$$t^* \approx t_i \tag{1.15}$$
$$t^* \approx t_{i+1} \tag{1.16}$$
$$t^* \approx (t_i + t_{i+1})/2 \tag{1.17}$$

Una mejor estimación se puede obtener haciendo una interpolación lineal, pero esto se dejará para más adelante.

1.6. Preguntas Conceptuales

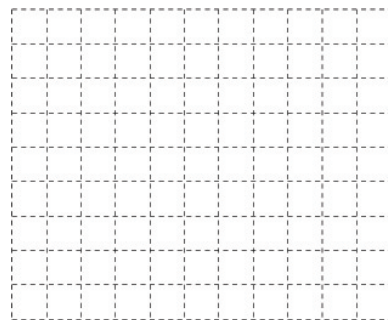
Pregunta 1: Escriba un programa en `Matlab` que calcule el factorial de 100.

Recuerde que el factorial de n es:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Pregunta 2: Se ha medido la posición de un auto en diferentes instantes:

t	x
0.1 s	5 m
0.2 s	10 m
0.3 s	20 m
0.4 s	25 m

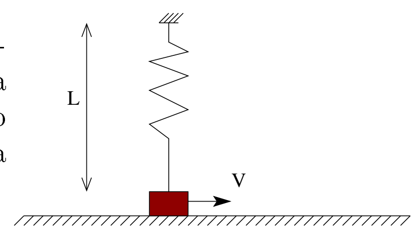


Haga el gráfico de posición versus tiempo del auto. Use la grilla para que el gráfico quede más recto.

Pregunta 3: Si $x(t) = \sin(t)\exp(-0{,}1t)$, escriba las líneas de `Matlab` que permitirían graficar esa función en el intervalo $t \in [0 : 10]$ usando un espaciado $\Delta t = 0{,}1$.

Indicación, debe definir un arreglo para t y otro para x.

Pregunta 4: Una partícula de masa m, apoyada sobre una superficie rugosa horizontal de coeficiente de roce μ, está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural L, cuyo otro extremo está fijo a una altura L. Inicialmente se le da a la partícula una velocidad V hacia la derecha.



Escriba la ecuación de energía que permite determinar el punto donde se detiene la partícula.

Pregunta 5: Si $x(t) = \cos(t)\exp(-2t)$, escriba las líneas de `Matlab` que permitirían graficar esa función en el intervalo $t \in [0 : 4]$ usando un espaciado $\Delta t = 0{,}1$.

Indicación, debe definir un arreglo para t y otro para x.

Pregunta 6: Escriba la expresión para la segunda derivada aproximada de una función en el punto X

Pregunta 7: Suponga que tiene dos arreglos de N elementos, T y X. $T(i)$ indica el tiempo i-ésimo y $X(i)$ la posición de una partícula en dicho instante. Escriba un programa que encuentre el instante aproximado en que la partícula cruza en origen.

Pregunta 8: Exprese la siguiente ecuación en forma discreta

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

1.7. Ejercicios Semestres Pasados

Ejercicio 1: Considere una partícula que se deja caer verticalmente desde el reposo a una altura H y que sufre roce con el aire de la forma $F_{\text{roce}} = -\gamma v$.

Se busca comparar el tiempo que tarda en caer y la velocidad con la que golpea al suelo con los valores que se obtienen en ausencia de roce: $\sqrt{2H/g}$ y $\sqrt{2gH}$, respectivamente.

Para eso, resuelva numéricamente la ecuación de Newton que resulta con los parámetros $m = 1kg$ y $H = 10m$ con $\gamma = 0$; 0.1 kg/s; 0.2 kg/s; . . .; 0.5 kg/s.

Grafique el tiempo de caida y la velocidad con que llega al suelo en función de γ.

Ejercicio 2: Se desea determinar la altura máxima a la que llega un proyectil cuando es lanzado verticalmente con velocidad V_0 en presencia de roce viscoso, tal como el descrito en el problema anterior.

Busque un método numérico que permita determinar la altura máxima.

Resuelva para m =0.1 kg, V_0=1 m/s y γ =0.1 kg/s. Compare con la predicción sin roce $H = V_0^2/2g$.

Ejercicio 3: Se desea resolver el movimiento de la Tierra en torno al Sol. Se sabe que en ese caso la fuerza es la de gravitación universal:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Con el fin de poder tratarla numéricamente, la fuerza se reescribe de la siguiente manera (considerando el movimiento en el plano $x - y$)

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \\
&= -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \\
&= -\frac{GMm}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j}) \\
&= -\frac{GMm}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\hat{i} + y\hat{j})
\end{aligned}$$

Luego, la ley de Newton $m\vec{a} = \vec{F}$ se escribe por componentes como

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}x \tag{1.18}$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}y \tag{1.19}$$

Use el método de Verlet visto en clases para resolver estas ecuaciones acopladas. Considere los siguientes valores de las constantes: $G = 1$ y $M = 1$. Además considere como condición inicial para la posición $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$ y para la velocidad $v_{x0} = 0$, v_{y0}=0.5, 1.0 y 2.0.

Grafique la trayectoria que resulta (`plot(x,y)`). Compare con los cálculos analíticos que predicen, para los datos del problema, que la velocidad para una órbita circular es $V_{\rm circ} = \sqrt{GM/R} = 1$.

Ejercicio 4: La deducción de métodos numéricos no siempre es simple y a veces algunos métodos pueden resultar inestables. Un ejemplo clásico es el de la ecuación que describe como decrece la velocidad de un cuerpo en presencia de roce viscoso:

$$m\dot{v} = -\gamma v$$

Sustituyendo se puede mostrar que la solución es

$$v(t) = v(0)\exp(-\gamma t/m)$$

es decir, decae en el tiempo.

Una discretización centrada que en principio parece precisa es

$$\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta t} = -\frac{\gamma}{m} v_i$$

Muestre que si resuelve para $m = 1$, $\gamma = 0{,}1$, $\Delta t = 0{,}1$, $T_{\rm final} = 100$ y $V(0) = 1$ el resultado no tiene sentido.

Sin embargo, se puede escribir otra discretización centrada, en que el lado derecho se promedia en dos instantes

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} = -\frac{\gamma}{m}\frac{v_{i+1} + v_i}{2}$$

de la cual se puede despejar v_{i+1} como

$$v_{i+1} = \left(\frac{1 - \gamma\Delta t/2m}{1 + \gamma\Delta t/2m}\right) v_i$$

muestre que esta discretización es estable y entrega resultados sensatos.

Ejercicio 5: Considere el movimiento de una partícula de masa m unida a un resorte de constante k, descrita por la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -kx$$

Resuelva la ecuación de movimiento, es decir calcule $x(t)$, usando el método de Verlet para el siguiente conjunto de valores: $m = 1kg$, $k = 1N/m$, $x_0 = 3m$ y $v_0 = 0$.

Una vez que tenga la solución de la ecuación, estudie si numéricamente la energía mecánica se conserva

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Para eso escriba de alguna manera discreta la velocidad y evalue la energía en función del tiempo. ¿Es constante?

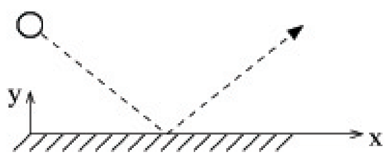
Ejercicio 6: Se desea saber cómo disminuye en el tiempo la energía mecánica de un cuerpo que cae en el aire en presencia de roce turbulento $F_{\text{roce}} = -\gamma|v|v$, donde $|x|$ es el valor absoluto de x.

Para eso, considere que se suelta un cuerpo de masa m desde una altura H del piso y se sigue su evolución hasta que golpea al suelo.

1. Escriba la ecuación de movimiento del cuerpo.
2. A partir de la ecuación de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por Δt.
3. Escriba una expresión discreta para la energía mecánica del cuerpo, que use las posiciones discretas encontradas en el punto anterior.

Ejercicio 7: Se desea modelar un billar donde las bolas se mueven en un plano con roce viscoso sobre la superficie y rebotan contra las paredes de manera elástica (es decir, el ángulo de entrada es igual al ángulo de salida en el rebote).

Para simplificar el ejercicio, se considerá sólo una pared (en vez de 4 que tiene el billar). Esta pared es horizontal y está en $y = 0$.



1. Escriba las ecuaciones de movimiento para x e y.
2. A partir de las ecuaciones de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por Δt.
3. Escriba el algoritmo que permita detectar el choque con la pared y modificar la velocidad cuando el choque ocurra.

Ejercicio 8: Las nuevas micros del TranSantiago dispondrán de GPS, aparato que les entrega la posición de la micro (x, y) cada cierto intervalo de tiempo Δt. Se desea incorporar a las micros un mecanismo de control que, usando los datos del GPS, permita medir la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ en cada instante de manera que suene una alarma si $|\vec{v}| > V_c$ ó $|\vec{a}| > A_c$.

Considere por simplicidad que el movimiento es puramente bidimensional (es decir, Santiago es plano).

1. Escriba las expresiones que permiten calcular instantáneamente la velocidad y aceleración, dadas las posiciones entregadas por el GPS.
2. Complete el siguiente programa `Matlab` que hace el control llamando al método `Alarma` que hace sonar la alarma:

```
for i=1:fin
   if(XXXXXXXX)
     Alarma;
   end
end
```

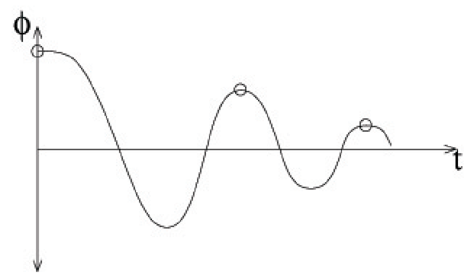
Ejercicio 9: Un péndulo con roce se describe por las ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\sin\phi - \gamma\dot{\phi}$$

donde L es el largo del péndulo y γ el coeficiente de roce.

Como el sistema tiene roce, si el péndulo se suelta del reposo desde un ángulo inicial ϕ_0, los ángulos máximos que alcance (indicados por un círculo en la figura) serán cada vez menores.

Se busca resolver numéricamente la dinámica del sistema para obtener cómo van disminuyendo estos ángulos máximos. Para eso:



1. A partir de la ecuación de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por Δt.
2. Escriba el criterio numérico que permita determinar los instantes en que el péndulo alcanza los ángulos máximos y los valores de estos ángulos.

Ejercicio 10: Se desea calcular el alcance de un proyectil que se lanza, desde el nivel del suelo, en un ángulo α respecto a la horizontal con velocidad V_0. Sobre el proyectil actúa el roce con el aire, que le ejerce una fuerza $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$.

1. Escriba la parte del programa Matlab que permita calcular la trayectoria ($x(t)$ e $y(t)$) del proyectil. No olvide poner las condiciones iniciales.
2. Escriba la parte del programa Matlab que entregue el alcance del proyectil.

Unidad 1: Guía Práctica

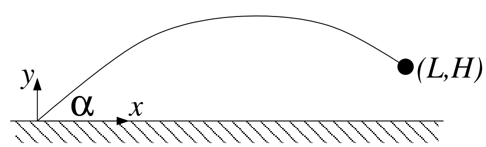
A. Objetivos

1. Conocer las capacidades de los métodos numéricos en la solución y análisis de los sistemas newtonianos.
2. Aprender a usar el método de Verlet para integrar las ecuaciones de Newton.
3. Aprender a usar Matlab con los fines anteriormente descritos.

B. Materiales: Matlab

C. Experimentos Numéricos

Experiencia 1.- Se busca determinar el ángulo α con el que se debe lanzar una partícula de masa m para que impacte a un objetivo que está ubicado a una distancia horizontal $L = 5$m y altura $H = 1$m. La partícula se lanza con una velocidad $V_0 = 10$m/s desde el nivel del suelo, tal como muestra la figura. Se busca además ver visualmente qué sucede con la trayectoria de la partícula si se falla levemente en el ángulo óptimo.



Para lograr estos objetivos siga los siguientes pasos:

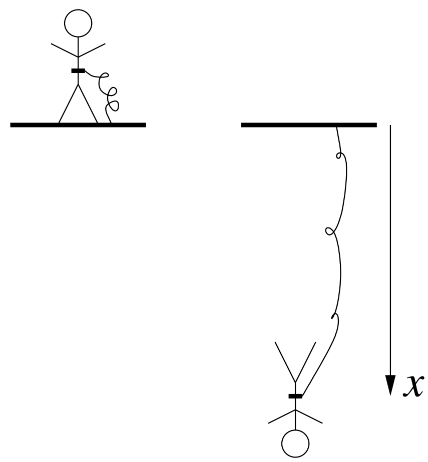
- Encuentre la ecuación que permite determinar α. Para eso escriba primero las ecuaciones de la cinemática para $x(t)$ e $y(t)$ y despeje el tiempo de impacto.

  Escriba la ecuación que permite encontrar α:

- Encuentre numéricamente el valor de α que resuelve la ecuación. Para eso utilice la función `fzero` de MatLab.
- Grafique la trayectoria $x - y$ que resulta al usar el valor α encontrado. Dibuje adicionalmente el punto objetivo para comprobar que efectivamente choca con el punto de coordenadas (L, H). Grafice además las trayectorias que resultan de tomar un valor del ángulo 5 grados mayor y 5 grados menor.

Imprima y adjunte los graficos en el informe.

Experiencia 2.- Se desea describir el movimiento de una persona que salta en *Bungee* desde un puente. Las cuerdas elasticadas que se usan no se pueden describir como resortes ideales. La fuerza de la cuerda, cuando ésta se ha deformado una cantidad δ, es de la forma



$$F = -p\delta^2$$

donde un valor razonable de la constante elástica es $p = 6\mathrm{N}/\mathrm{m}^2$.
Si se usan los ejes coordenados de la figura, la ecuación de movimiento de una persona que salta (considerando que la cuerda tiene un largo natural nulo) es

$$m\ddot{x} = -px^2 + mg$$

Considere que la persona salta desde el reposo.
Escriba la iteración de Verlet ($x_{i+1} = \ldots$) que permite resolver la ecuación de movimiento:

Escriba un programa en MatLab que resuelva la ecuación de movimiento usando el método de Verlet. Usando $\Delta t = 0{,}1\mathrm{s}$ calcule hasta $T = 5\mathrm{s}$ para una persona de $m = 70\mathrm{kg}$. Grafique la trayectoria $x(t)$ obtenida.

Imprima y adjunte los graficos en el informe.

Experiencia 3.- Usando el programa anterior programe la detección del momento en que la persona llega al punto más bajo (máximo de $x(t)$). Con este programa calcule el tiempo de vuelo en función de la masa de la persona (usando 5 valores para m).

Complete la siguiente tabla:

Masa m [kg]	Tiempo de vuelo [s]

D. Conclusiones

Presente de manera concisa al menos dos conclusiones *objetivas* de la sesión en general. Por ejemplo señale cómo afecta la masa en el tiempo de vuelo en el caso del Bungee. Era esperable esta depedencia? Le parece razonable cómo cambia la trayectoria $x-y$ en la Experiencia 1 al aumentar o disminuir levemente α. En la Experiencia 2, analice la trayectoria $x(t)$ obtenida.

E. Lecturas recomendadas

- Cualquier texto de Física (Tipler o Serway) donde se describe la cinemática y las ecuaciones de Newton en 1D.
- Material Teórico sobre Métodos Numéricos
- Clases de Matlab de CC100 puestos en UCursos
- Manual de Matlab