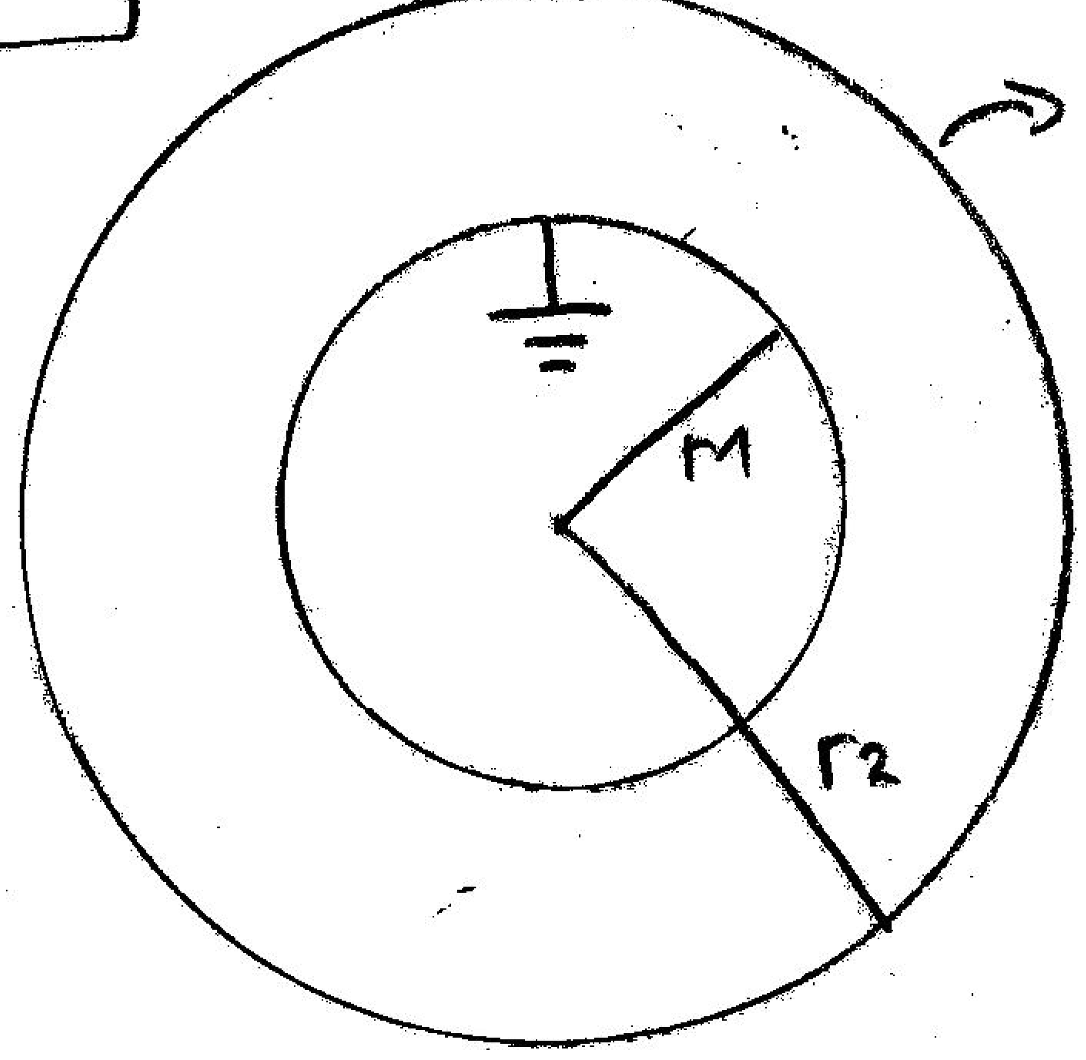



$\rightarrow$ Q total = $q$

1) Det $V(\vec{r})$ en todo el espacio

2) Det $Q_1$ Total $= q_1$ en función de $q$

Sol: Para resolver el problema analizamos las 3 regiones por separado, calculamos primero $V(r)$ para $r<r_1$ y $r>r_2$, y luego con la ecuación de Laplace y las condiciones de borde, obtenidas evaluando las expresiones para $r>r_2$ y $r<r_1$ en los bordes, calculamos $V(r)$ para $r_1<r<r_2$. Notemos que la ecuación de Laplace, y más aun su versión más general la de Poisson, requieren 2°s derivadas, por lo que $V(r)$ debe ser continuo en todo el espacio, lo que valida la obtención antes descrita de las condiciones de borde (C de B).

1) - $r \leq r_1$: Aplicando Gauss $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q\,total}{\varepsilon_0} = 0$, pues no hay carga

Suponemos que la carga está distribuida uniformemente $\Rightarrow$ hay simetría en orientación (en coordenadas esféricas)

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(r)\,\hat{r}$$

$$\Rightarrow 0 = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\,r^2 \operatorname{Sen}\theta\, d\theta\, d\phi = 2\pi r^2 E(r)(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = 0 \Rightarrow \vec{E}(r) = 0$$

Luego calculamos $V(r) = -\int_{ref}^{r} \cancel{\vec{E}(r)\cdot d\vec{\ell}} + V_{ref} = V_{ref} = cte$.

$$\Rightarrow V(r) = Cte = C \text{ , pero tenemos que } V(r=r_1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = 0 \text{ , } r \leq r_1}$$

- $r > r_2$: Nuevamente aplicando Gauss tenemos:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{q+q_1}{\varepsilon_0}$$ (ver cálculo anterior)

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q+q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r) = -\int_{ref}^{r} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} + V_{ref},$$

tomando la referencia nula $V_{ref} = 0$ en $ref = \infty$:

$$V(r) = -\left(\frac{q+q_1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\int_{\infty}^{r} r^{-2}\,dr = -\left(\frac{q+q_1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\cdot\left(-r^{-1}\right)\Big|_{\infty}^{r} = \boxed{\frac{q+q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = V(r),\ r > r_2}$$

Evaluando en $r = r_2$ tenemos la C de B. faltante: $\boxed{V_2 \equiv V(r=r_2) = \frac{q+q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2}}$

- $r_1 < r < r_2$: Aplicando la ecuación de Laplace: $\nabla^2 V = 0$;

Por simetría: $V = V(r)$, luego el Laplaciano en coordenadas esféricas es:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow r^2\frac{dV}{dr} = cte \equiv A \Rightarrow \frac{dV}{\partial r} = \frac{A}{r^2}$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{A}{r} + B$$ Aplicando las C de B:

- $\underline{V(r=r_1) = 0} \Rightarrow -\frac{A}{r_1} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{A}{r_1} \Rightarrow V(r) = A\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)$

- $\underline{V(r=r_2) = V_2} \Rightarrow V_2 = A\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = A\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}\right) \Rightarrow A = \frac{V_2\cdot r_2\cdot r_1}{r_2 - r_1}$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{V_2\cdot r_2\cdot r_1}{r_2 - r_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = \frac{V_2 r_2}{r}\left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right) = V(r)$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{V_2 r_2}{r_2 - r_1}\left(1 - \frac{r_1}{r}\right)$$ Reemplazando $V_2$:

$$\boxed{V(r) = \frac{q+q_1}{4\pi\varepsilon_0(r_2 - r_1)}\left(1 - \frac{r_1}{r}\right),\ r_1 < r < r_2}$$

2) Calculamos la diferencia de potencial entre los casquetes con Gauss, e imponemos que sea igual a la resta de los potenciales:

$$\Delta V = V(r=r_2) - V(r=r_1) = V_2 = \left[-\int_{ref}^{r_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}\right] - \left[-\int_{ref}^{r_1} \vec{E}\cdot d\vec{r}\right] = \int_{r_2}^{r_1} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

(tomando la misma referencia)

Donde el campo eléctrico lo calculamos con Gauss: $4\pi r^2 E(r) = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V_2 = -\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_{r_2}^{r_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Luego imponemos: $\frac{q_1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \overset{!}{=} V_2 = \frac{q+q_1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} r_2}$

$$\Rightarrow q_1\left(\frac{r_1-r_2}{\cancel{r_2}\cdot r_1}\right) = \frac{q+q_1}{\cancel{r_2}} \Rightarrow q_1(r_1-r_2) = (q+q_1)\,r_1$$

$$\Rightarrow q_1(\cancel{r_1} - r_2 - \cancel{r_1}) = q\cdot r_1 \Rightarrow \boxed{q_1 = \frac{-r_1\cdot q}{r_2}}$$

(Notar que $q$ y $q_1$ tienen distinto signo)

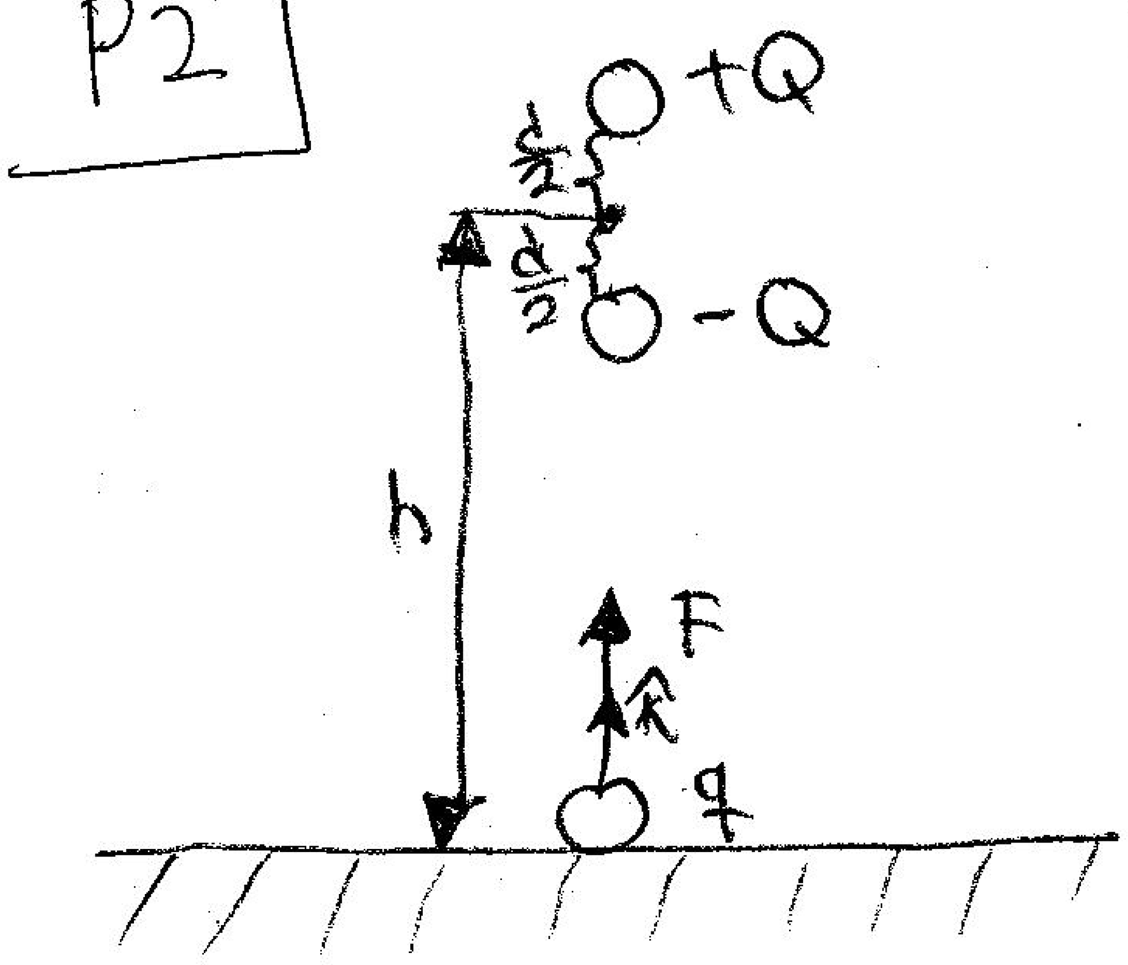
Con lo que finalmente:

$$V(r) = \begin{cases} 0 \,, & r \le r_1 \\ \dfrac{q\left(\frac{\cancel{r_2-r_1}}{r_2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{(r_2-r_1)}}\left(1-\dfrac{r_1}{r}\right) , & r_1 \le r \le r_2 \\ \dfrac{q\left(\frac{r_2-r_1}{r_2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r} \,, & r \ge r_2 \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{V(r) = \begin{cases} 0 \,, & r \le r_1 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\left(1-\dfrac{r_1}{r}\right) , & r_1 \le r \le r_2 \\ \dfrac{q\,(r_2-r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_2\cdot r} \,, & r \ge r_2 \end{cases}}$$

P2

FI2002 Aux 2




a) ¿ $\vec{E}(z=0)$ ? , ¿ $V(z)$ ?

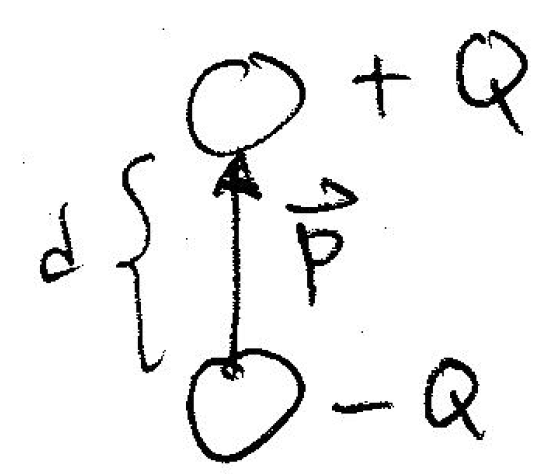
b) ¿ $W_q(h/2)$ ?

Datos: $F$, $q$, $h$, $d$

Sol: a) $\vec{E}(z=0) = \dfrac{\vec{F}(z=0)}{q} = \boxed{\dfrac{F\hat{k}}{q} = \vec{E}(z=0)}$

Usamos la aproximación dipolar:

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$$, Calculamos:




, $\vec{p} = Qd\cdot\hat{k}$

Usando: $\vec{r} = z\hat{k}$, $\vec{r}\,' = h\hat{k}$ $\Rightarrow$ $V_{dip}(\vec{r}) = V_{dip}(z) = \dfrac{Qd(z-h)\cancelto{1}{\hat{k}\cdot\hat{k}}}{4\pi\varepsilon_0(z-h)^3}$

$\Rightarrow V_{dip}(z) = \dfrac{Qd}{4\pi\varepsilon_0(z-h)^2}$, Calculamos Q: (Conocemos F) $\vec{E} = -\nabla V$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{Qd\cdot\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot -2(z-h)^{-3} = \frac{Qd\cdot\hat{k}}{2\pi\varepsilon_0(z-h)^3}$$

Evaluando en $z=0$: $\vec{E}(z=0) = -\dfrac{Qd\hat{k}}{2\pi\varepsilon_0 h^3} \overset{!}{=} \dfrac{F}{q}\hat{k}$

$$\Rightarrow Q = -\frac{2\pi\varepsilon_0 F h^3}{d\cdot q} \Rightarrow V_{dip}(z) = -\frac{2\cancel{\pi}\cancel{\varepsilon_0} F h^3\cdot\cancel{d}}{4\cancel{\pi}\cancel{\varepsilon_0}(z-h)^2\cdot\cancel{d}q}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{dip}(z) = -\frac{F h^3}{2q(z-h)^2}}$$

b) El potencial es Energía potencial por unidad de carga: $V = \frac{U}{q}$

Luego la diferencia de potencial es diferencia de Energía Potencial por unidad de carga: $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$. Y como $W = \Delta U$, tenemos: $W = \Delta V \cdot q$

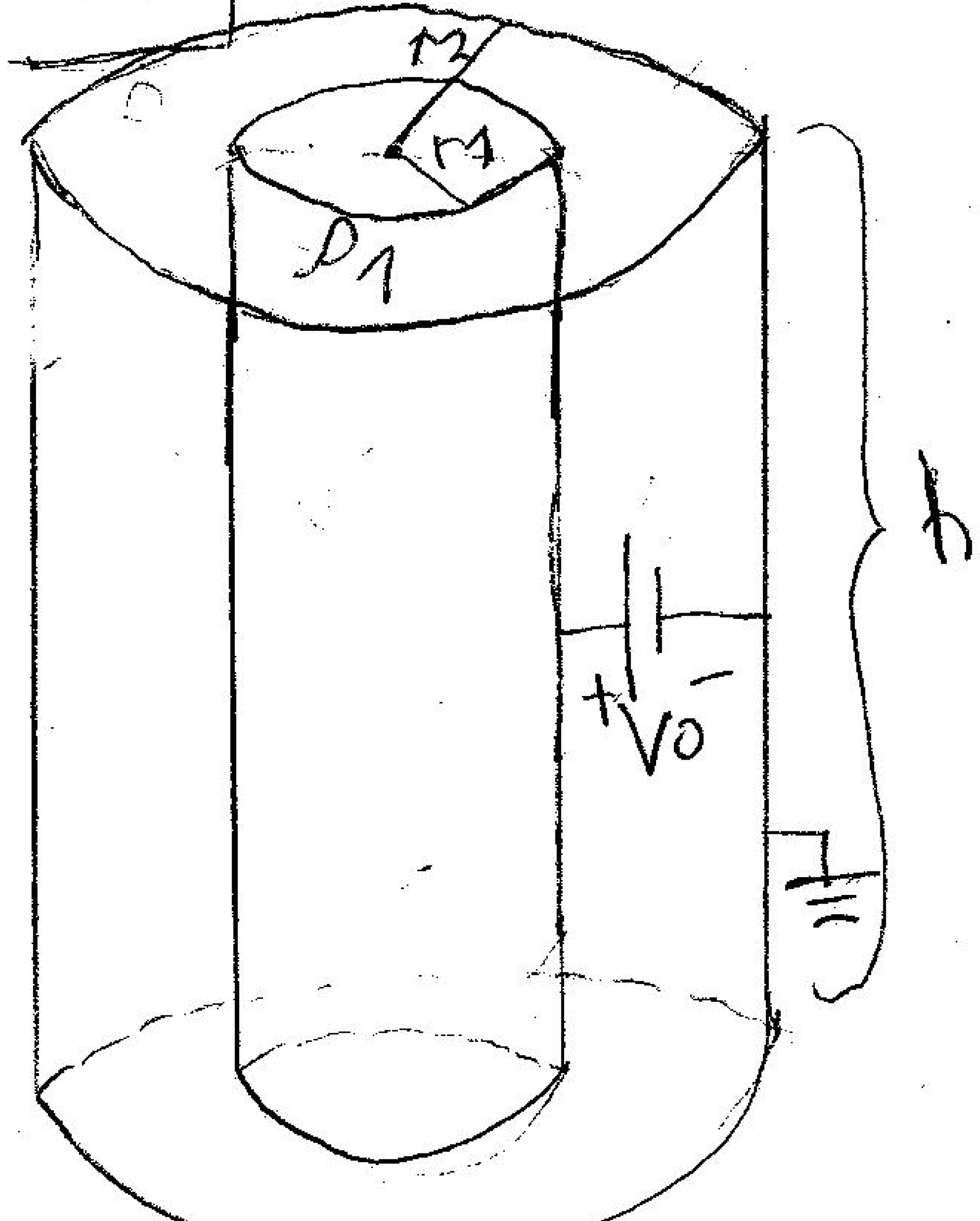
Calculamos $\Delta V = V(z=h/2) - V(z=0) = V_{dip}(h/2) - V_{dip}(0)$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{-Fh^3}{2q\left(\frac{h}{2}-h\right)^2} + \frac{Fh^{\cancel{3}}}{2q\cancel{h^2}} = \frac{+F}{2q}\left[\frac{-h^{\cancel{3}}}{\cancel{h^2}/4} + h\right] = \frac{-F}{2q} \cdot 3h$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{-3hF}{2q} \Rightarrow W = q \cdot \Delta V \Rightarrow \boxed{W = \frac{-3hF}{2}}$$

P3

FI2002 Aux 2




a) ¿$\vec{E}$ para $r<r_1$?

b) ¿ $V(r)$ para $r_1<r<r_2$?

c) ¿$\rho$?

Datos: $r_1$, $r_2$, $V_0$ ($h \gg r_2 > r_1$)

Sol: a) Como $h \gg r_2 > r_1$ podemos despreciar efectos de borde, i.e. consideramos simetría axial y de altura $\Rightarrow \vec{E} = E(r)\hat{r}$. (en coordenadas cilíndricas). Luego podemos usar Gauss:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad , \quad \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^h E(r)\cdot dz\,d\theta + \iint_{tapas} \vec{E}\cdot ds$$

Notar que en las tapas: $d\vec{S}$ va según $\hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{E} = E\cdot\hat{r} \perp d\vec{S} = dS\cdot\hat{k} \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{tapas} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^h rE(r)\,dz\,d\theta = 2\pi h E(r) r$$

Pero $Q = 0 \Rightarrow 2\pi h r E(r) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = 0 \,,\, r<r_1}$

b) Aplicamos la Ec. de Laplace $\nabla V^2 = 0$, por simetría $V = V(r)$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{\partial V}{\partial r} = cte \equiv A \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

$\Rightarrow V(r) = A\ln(r) + B$ Aplicamos ahora las C. de B:

- $\underline{V(r=r_2)=0} \Rightarrow A\ln(r_2) + B = 0 \Rightarrow B = -A\ln(r_2) \Rightarrow V(r) = A\ln(r/r_2)$
- $\underline{V(r=r_1) = V_0} \Rightarrow V(r_1) = A\ln(r_1/r_2) = V_0 \Rightarrow A = \dfrac{V_0}{\ln(r_1/r_2)}$

$$\therefore \boxed{V(r) = \frac{V_0 \ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}}$$

P3 1/2

c) $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ , aplicando Gauss al igual que en la parte a):

$2\pi h r E(r) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ , calculamos $Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} \rho\, r_1\, dz\, d\theta = 2\pi h \rho r_1$

$\Rightarrow \cancel{2\pi h} r E(r) = \dfrac{\cancel{2\pi h} \rho r_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \dfrac{\rho \cdot r_1}{\varepsilon_0 \cdot r}\hat{r}$

$\Rightarrow \Delta V = V(r_1) - \cancel{V(r_2)}^{\,0} = V_0$

Calculamos ahora $V_0$ a partir del $\vec{E}(r)$:

$\Rightarrow V_0 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = \dfrac{\rho r_1}{\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \dfrac{1}{r} dr = \dfrac{\rho r_1}{\varepsilon_0} \ln(r_2/r_1)$

$\Rightarrow V_0 = \dfrac{\rho r_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) \Rightarrow \boxed{\rho = \dfrac{\varepsilon_0 V_0}{r_1 \ln(r_2/r_1)}}$