



**fcfm**

Ingeniería Eléctrica  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



# FI 2002

# ELECTROMAGNETISMO

## Clase 8

## Medios Materiales III

**LUIS S. VARGAS**  
Area de Energía  
Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Chile



# INDICE

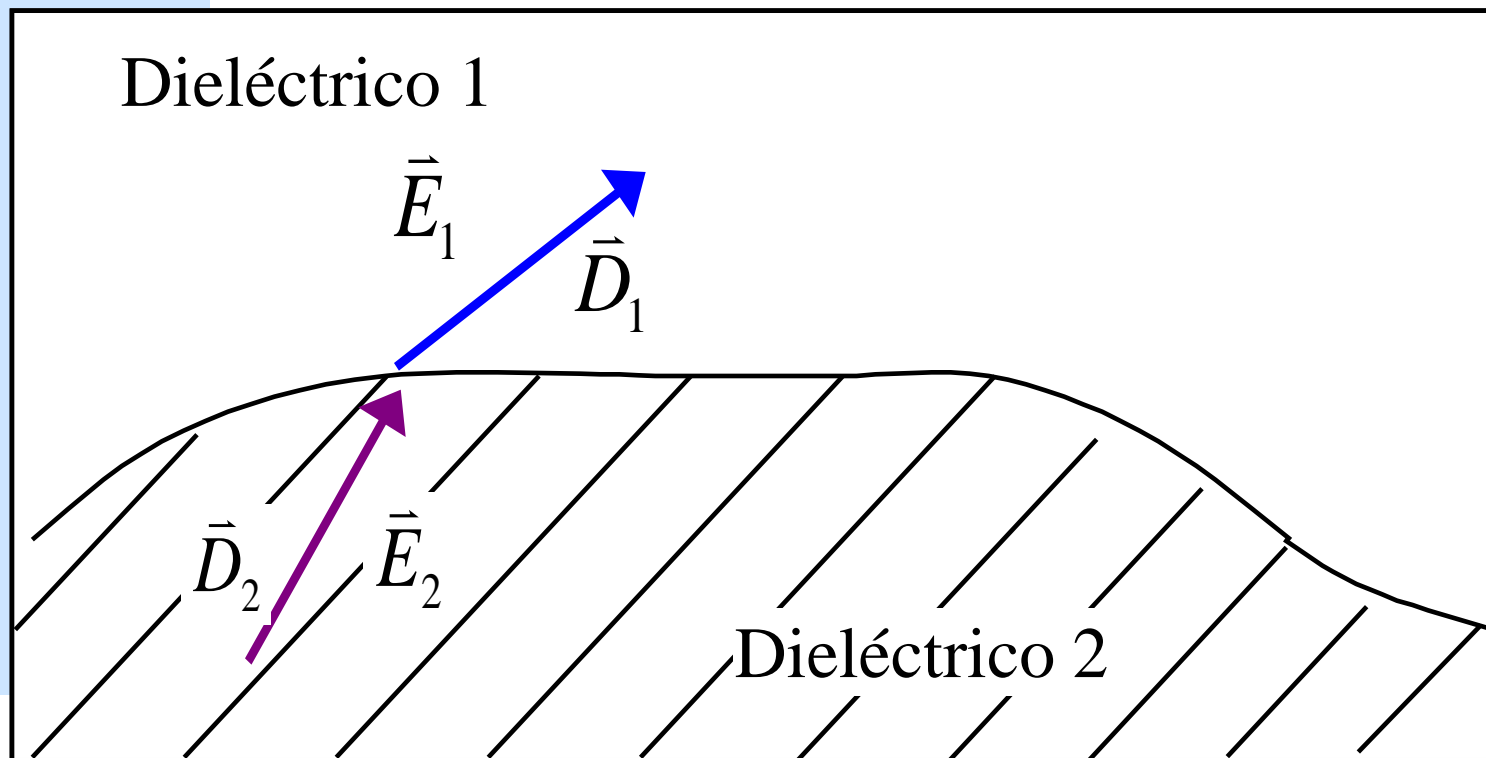
- Condiciones de borde para el campo eléctrico
- Refracción del campo eléctrico
- Consideraciones sobre Simetría

Tarsila do Amaral, A  
Cuca (1924)





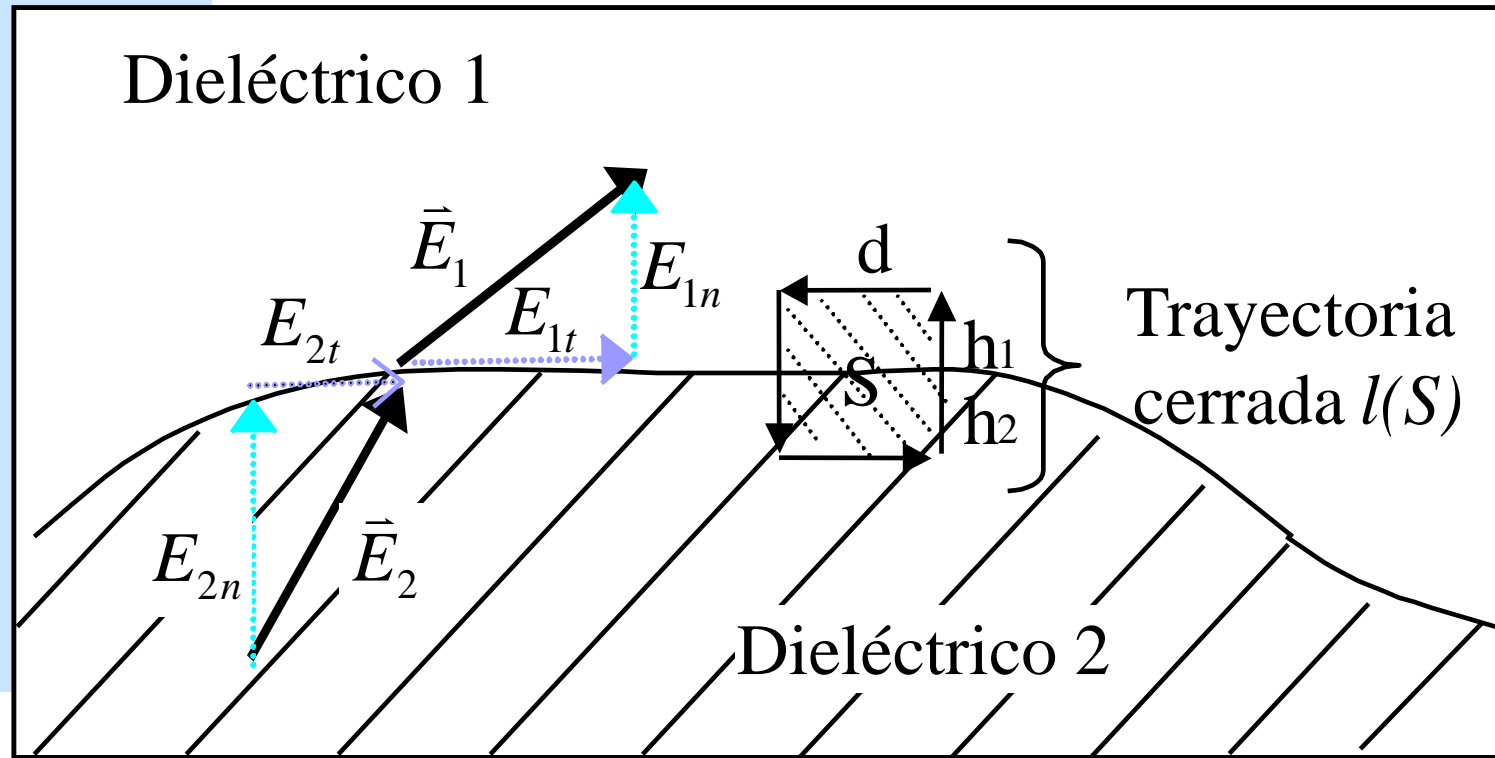
# Condiciones de borde



Usaremos dos ecuaciones  $\nabla \times \vec{E} = 0$  y  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$



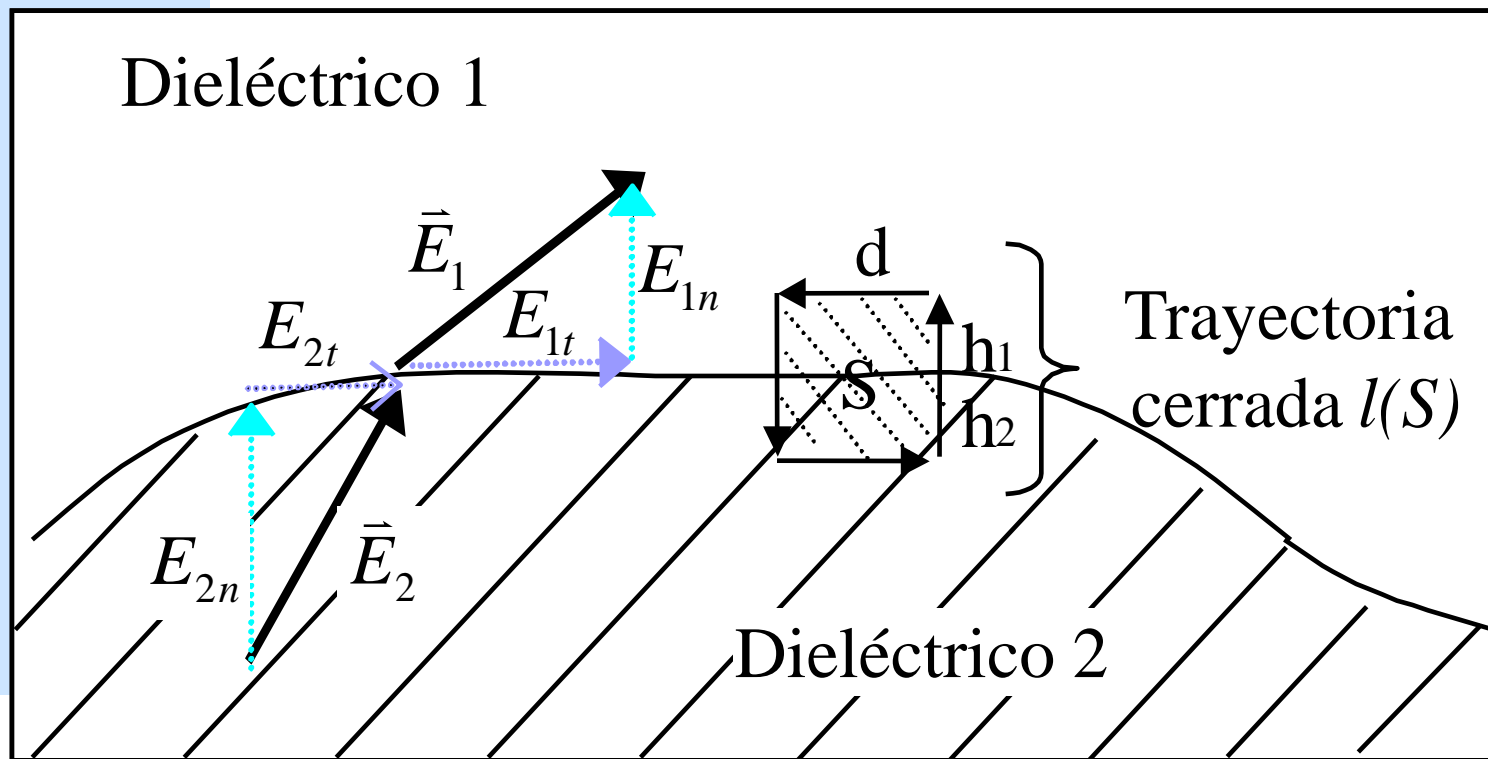
# Condiciones de borde para el campo eléctrico



$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



# • Condiciones de borde para el campo eléctrico



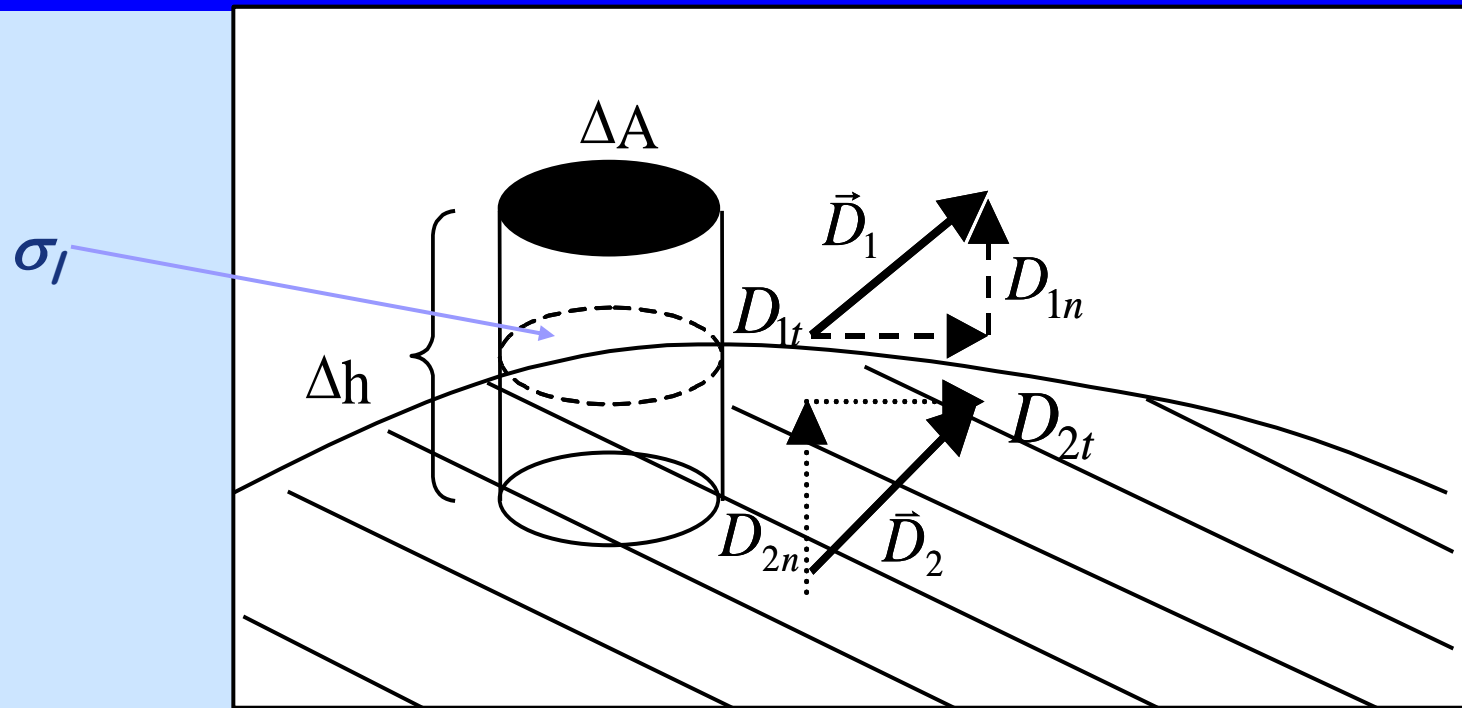
$$\oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad -E_{1t}d - E_{1n}h_1 - E_{2n}h_2 + E_{2t}d + E_{2n}h_2 + E_{1n}h_1 = 0$$

$$h_1 \rightarrow 0, \quad h_2 \rightarrow 0 \Rightarrow -E_{1t}d + E_{2t}d = 0 \quad \therefore E_{1t} = E_{2t} \quad \therefore \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$





# Condiciones de borde para el campo eléctrico



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \quad \gamma \quad Q_{\text{libre}} = \sigma_l \Delta A \quad \Rightarrow \quad D_{1n} \Delta A - D_{2n} \Delta A + \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma_l \Delta A$$

$$\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} D_{1n} - D_{2n} &= \sigma_l \\ \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} &= \sigma_l \end{aligned} \right\} \text{si } \sigma_l = 0 \Rightarrow \begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n} \\ \varepsilon_1 E_{1n} &= \varepsilon_2 E_{2n} \end{aligned}$$

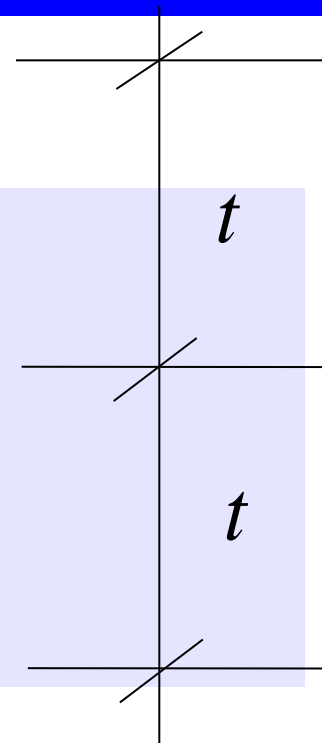
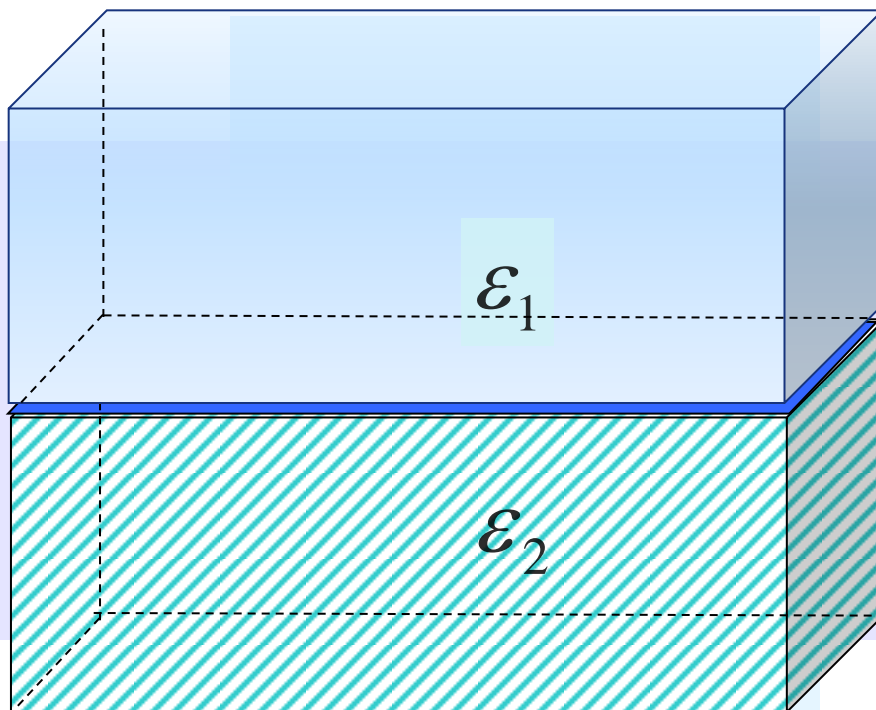


# Ejemplo 1

Dieléctrico 1

Plano de  
carga  $\sigma_0$

Dieléctrico 2



$\epsilon_1, \epsilon_2$  Constantes. Se pide  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  en todo el espacio.

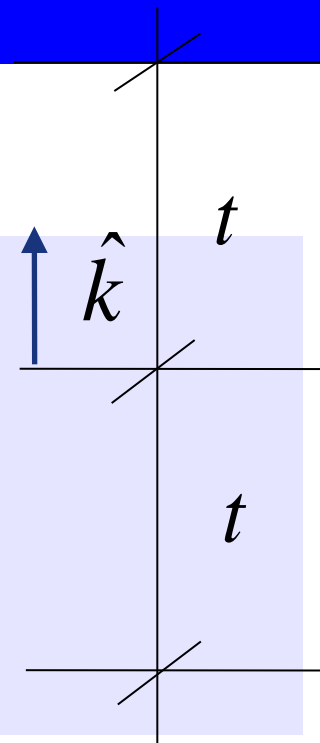
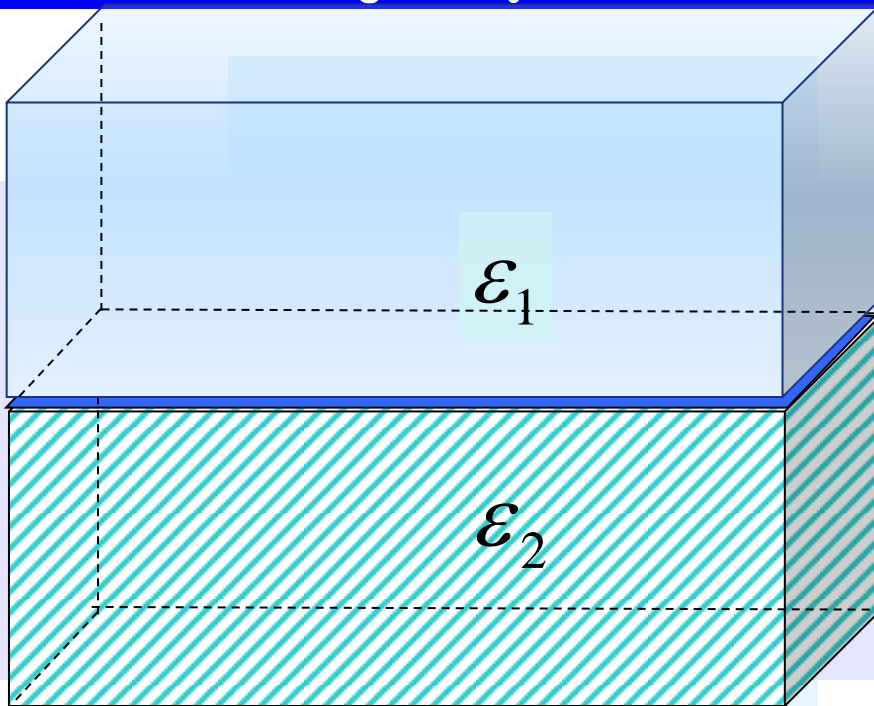


# Ejemplo 1

Dieléctrico 1

Plano de carga  $\sigma_0$

Dieléctrico 2



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{y} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \vec{D}$$

Fuentes de  $\vec{D}$  son sólo cargas libres  $\sigma$ , luego  $\vec{D} = D \hat{k}$  constante

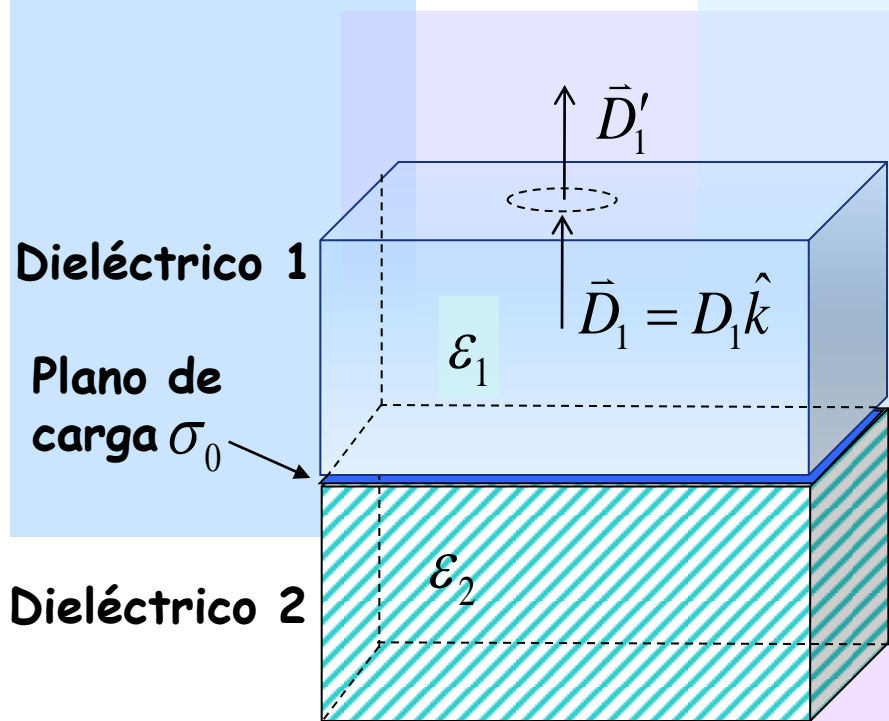
$$\vec{D} = D \hat{k}, \quad \vec{E} = E \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{P} = P \hat{k}$$





# Ejemplo 1

Aplicando condiciones de borde  $\vec{D}'_1 = \vec{D}_1$



$$\vec{D}'_1 = D'_1 \hat{k}, \vec{E}'_1 = E'_1 \hat{k} \text{ y } \vec{P}'_1 = 0$$

$$\vec{D}_1 = D_1 \hat{k}, \vec{E}_1 = E_1 \hat{k} \text{ y } \vec{P}_1 = P_1 \hat{k}$$

$$\vec{D}_2 = -D_2 \hat{k}, \vec{E}_2 = -E_2 \hat{k} \text{ y } \vec{P}_2 = -P_2 \hat{k}$$



# Ejemplo 1

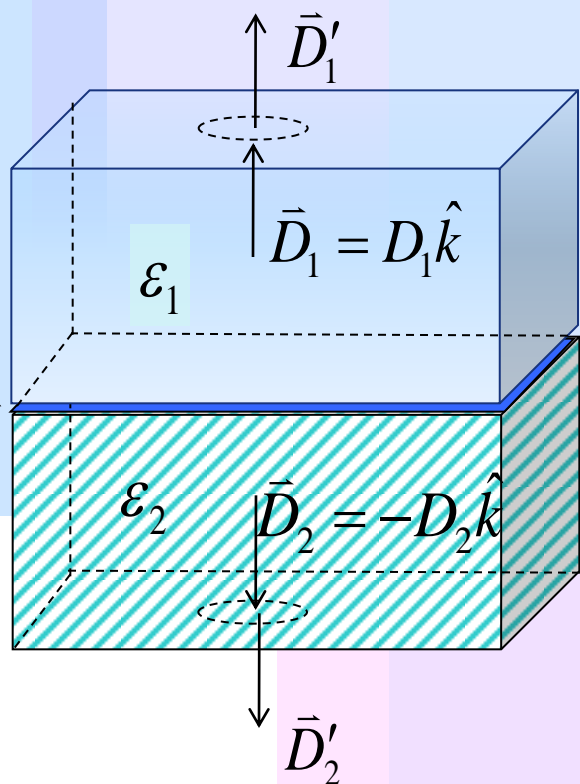
Aplicando condiciones de borde  $\vec{D}'_1 = \vec{D}_1$

$$\vec{D}'_1 = D'_1 \hat{k}, \vec{E}'_1 = E'_1 \hat{k} \text{ y } \vec{P}'_1 = 0$$

$$\vec{D}_1 = D_1 \hat{k}, \vec{E}_1 = E_1 \hat{k} \text{ y } \vec{P}_1 = P_1 \hat{k}$$

$$\vec{D}_2 = -D_2 \hat{k}, \vec{E}_2 = -E_2 \hat{k} \text{ y } \vec{P}_2 = -P_2 \hat{k}$$

$$\vec{D}'_2 = -D'_2 \hat{k}, \vec{E}'_2 = -E'_2 \hat{k} \text{ y } \vec{P}'_2 = 0$$



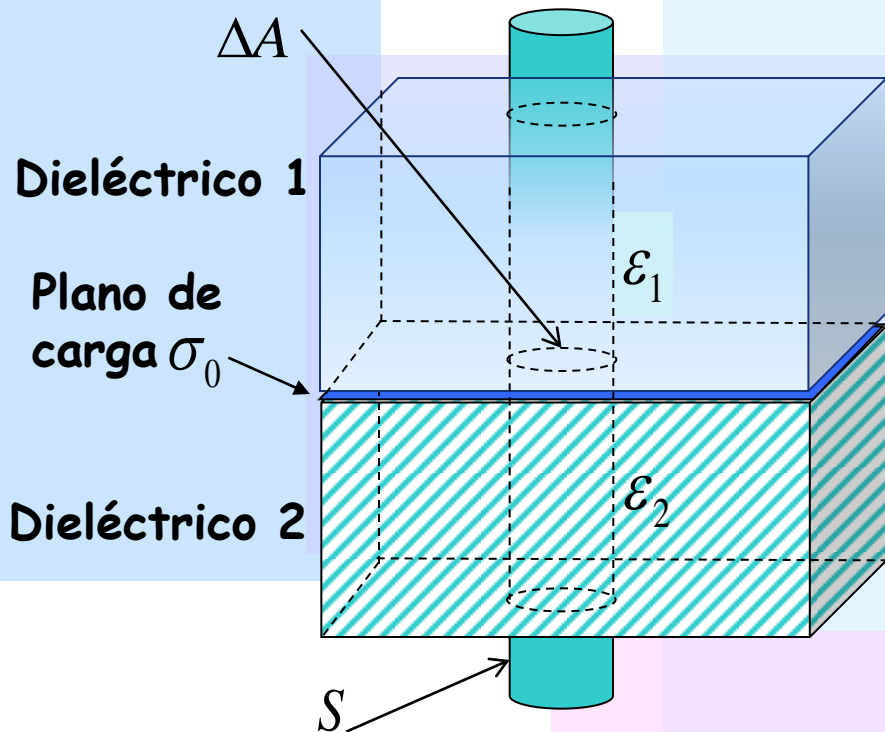
Aplicando condiciones de borde  $\vec{D}'_2 = \vec{D}_2$



# Ejemplo 1

Ley de Gauss en la materia

$$Q_L = \oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$



$$\vec{D}_1 = D_1 \hat{k}, \vec{E}_1 = E_1 \hat{k} \text{ y } \vec{P}_1 = P_1 \hat{k}$$



$$\vec{D}_2 = -D_2 \hat{k}, \vec{E}_2 = -E_2 \hat{k} \text{ y } \vec{P}_2 = -P_2 \hat{k}$$

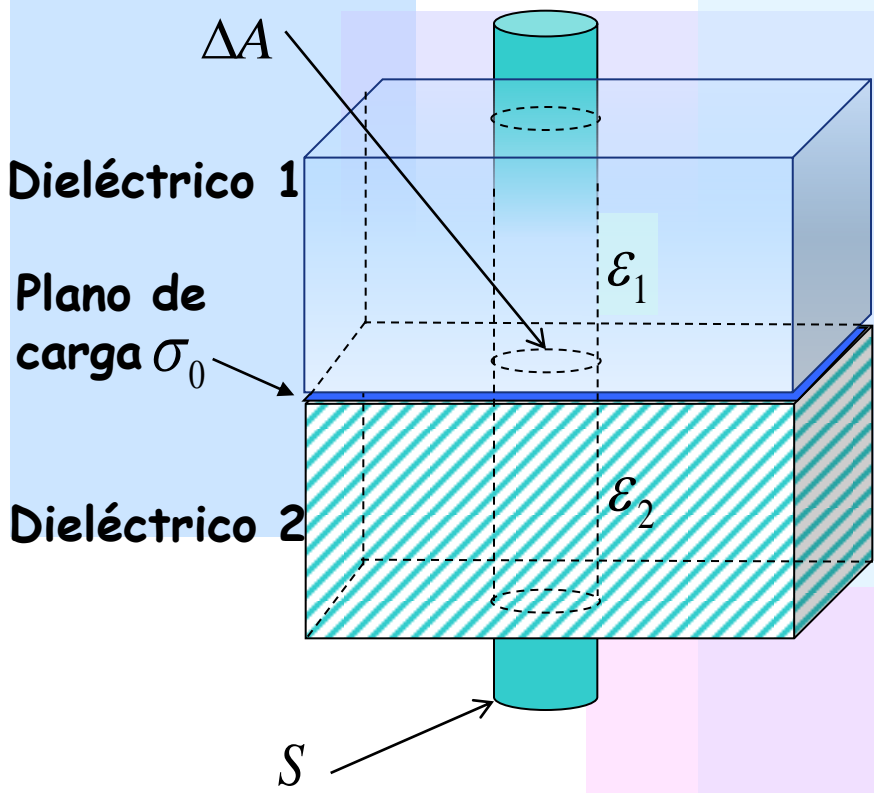
Fuentes de  $D$  son sólo cargas libres  $\Rightarrow D_1 = D_2 = D$



$$\left. \begin{array}{l} Q_T = \Delta A \sigma_0 \\ \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\Delta A D \end{array} \right\} D = \frac{\sigma_0}{2}$$

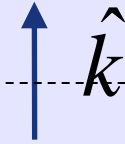


# Ejemplo 1



$$\vec{D}'_1 = \frac{\sigma_0}{2} \hat{k}, \quad \vec{E}'_1 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{P}'_1 = 0 \hat{k}$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\sigma_0}{2} \hat{k}, \quad \vec{E}_1 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_1} \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{P}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)\sigma_0}{2\epsilon_1} \hat{k}$$



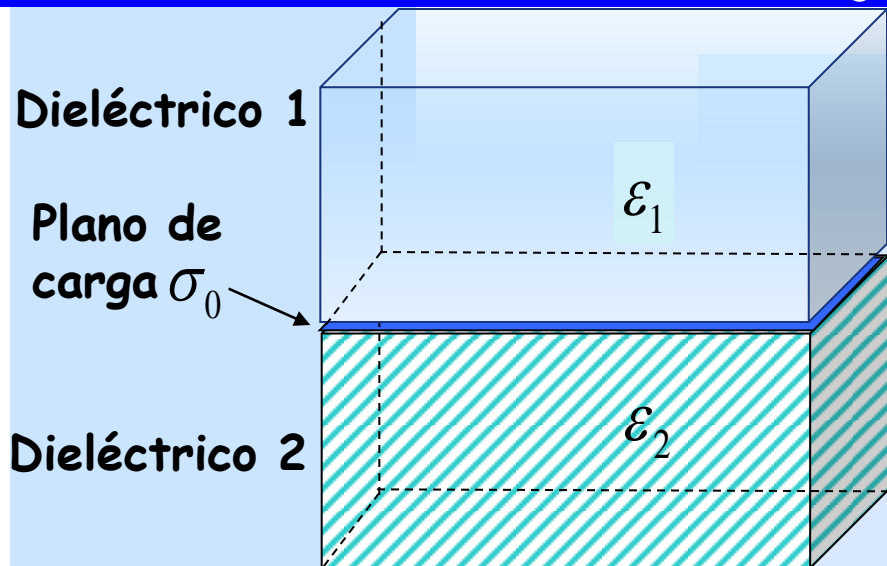
$$\vec{D}_2 = -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k}, \quad \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_2} \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{P}_2 = -\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)\sigma_0}{2\epsilon_2} \hat{k}$$

$$\vec{D}'_2 = -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k}, \quad \vec{E}'_2 = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{P}'_2 = 0 \hat{k}$$

**Fuentes de D son sólo cargas libres. Fuentes de E son todas las cargas: Libres y de polarización**



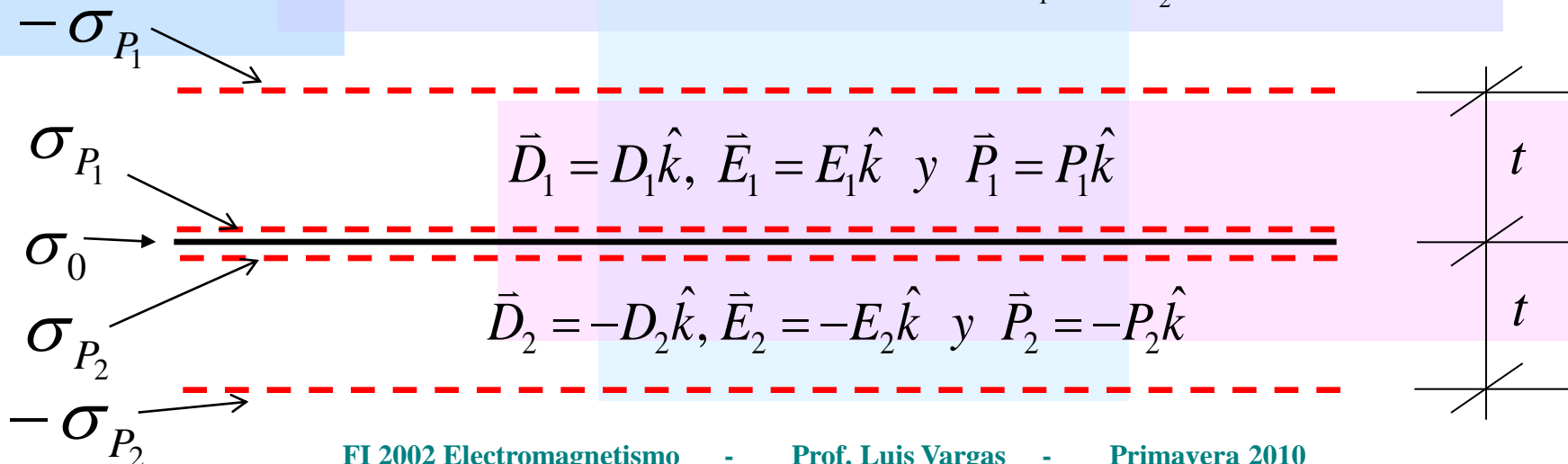
# Ejemplo 1



$$\vec{D}_1 = D_1 \hat{k}, \vec{E}_1 = E_1 \hat{k} \text{ y } \vec{P}_1 = P_1 \hat{k}$$

$$\vec{D}_2 = -D_2 \hat{k}, \vec{E}_2 = -E_2 \hat{k} \text{ y } \vec{P}_2 = -P_2 \hat{k}$$

Se formarán densidades de carga superficial  $\sigma_{P_1}$  y  $\sigma_{P_2}$  en los dieléctricos

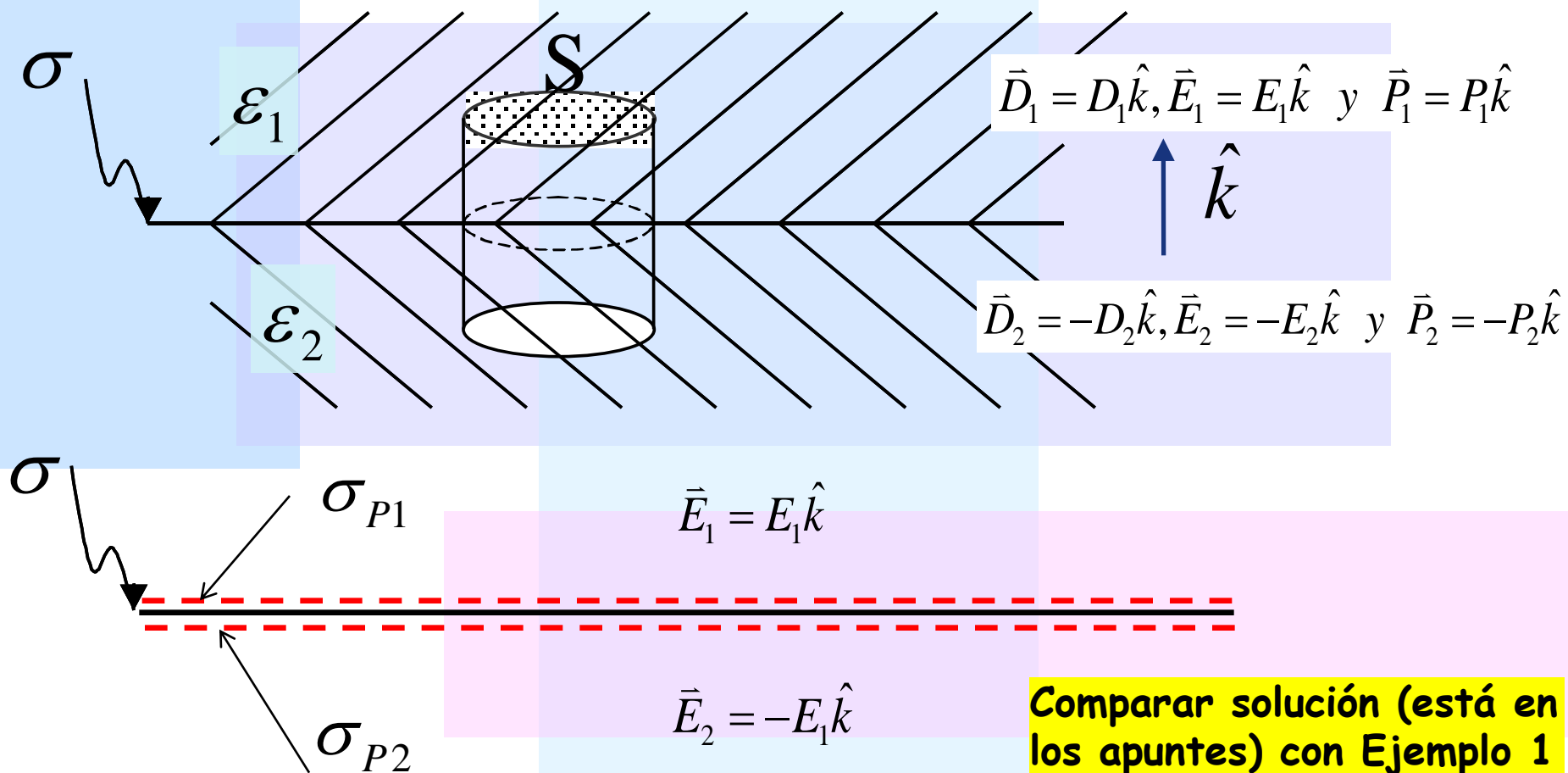






# Ejemplo 2

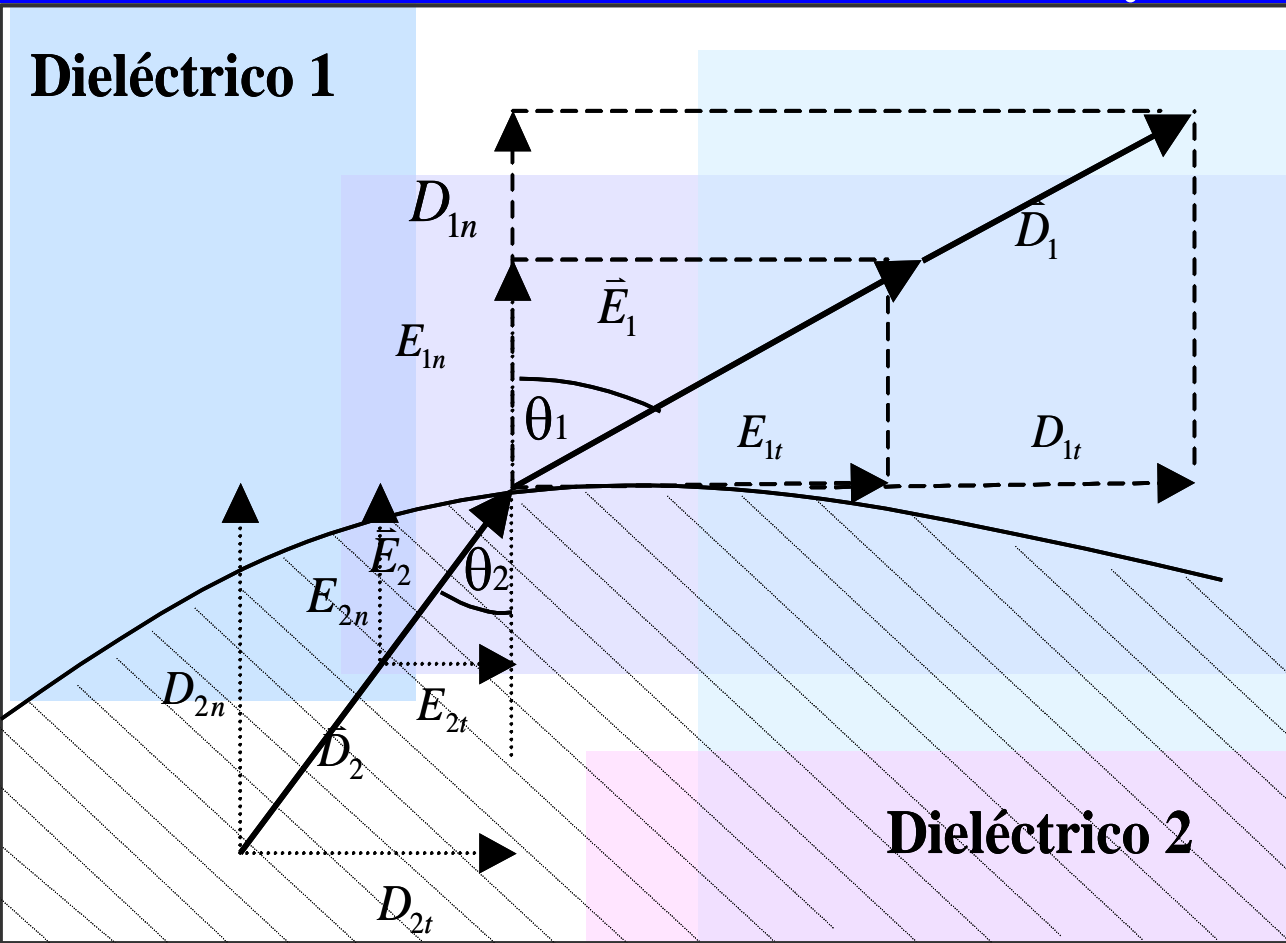
Supongamos ahora que los medios son infinitos, es decir, supongamos  $t \rightarrow \infty$



Comparar solución (está en los apuntes) con Ejemplo 1 anterior y meditar...



# Refracción del campo eléctrico



$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

$$\sigma_l = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{\text{tg } \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\text{tg } \theta_2}{\epsilon_2}$$

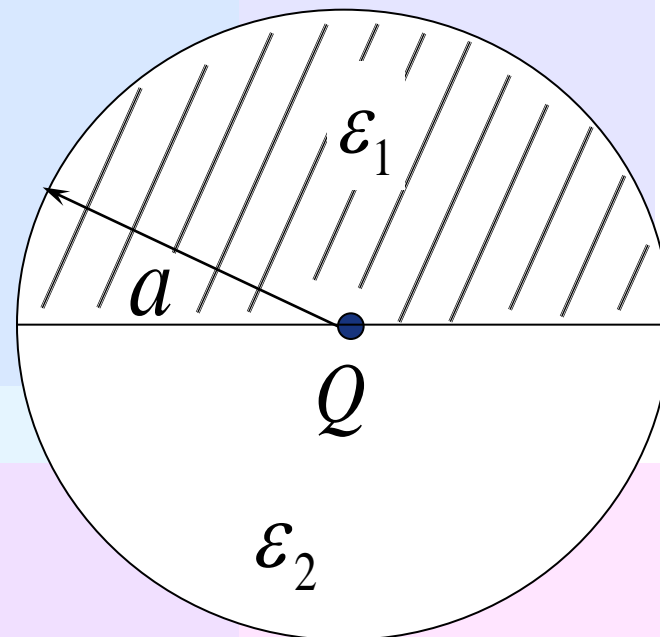
**Ley de Refracción de Campos Eléctricos**  $\therefore \frac{\text{tg } \theta_1}{\text{tg } \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$



# Consideraciones sobre Simetría

## I. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Calcular  $E$  y  $D$   
dentro de la  
esfera de radio  $a$





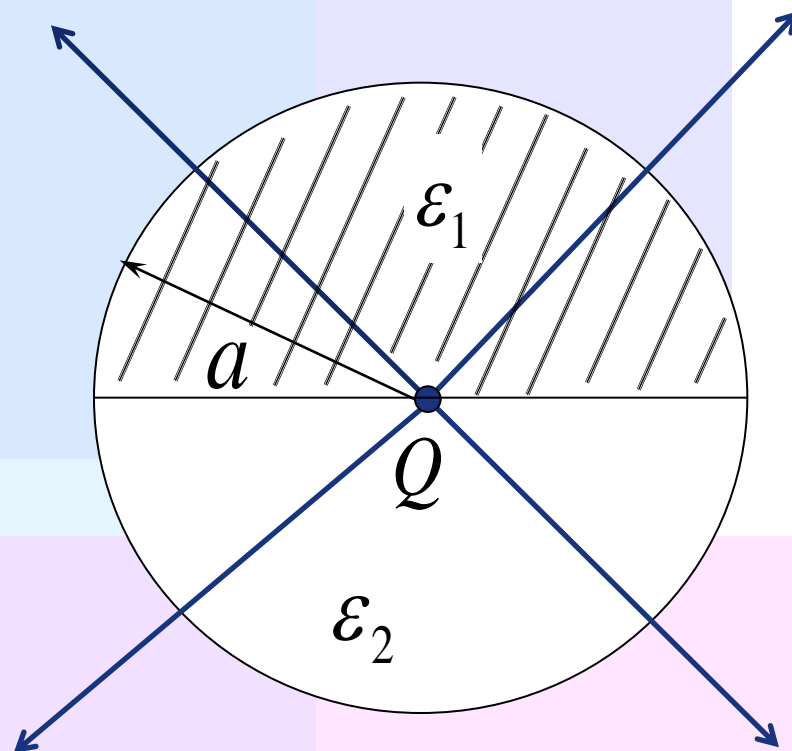
# Consideraciones sobre Simetría

## I. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Supuesto:  
Campos son radiales

$$\vec{D}_1 = D_1(r)\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = D_2(r)\hat{r},$$

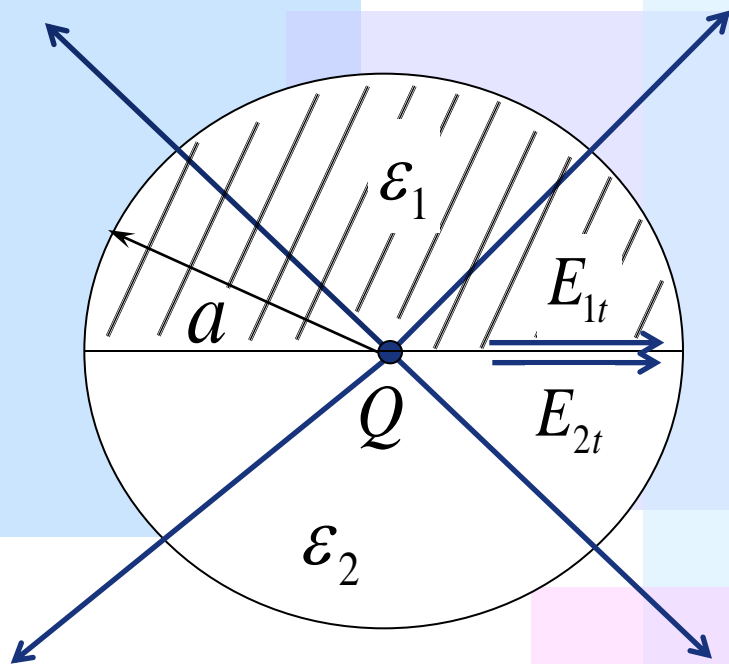
$$\vec{E}_1 = E_1(r)\hat{r}, \quad \vec{E}_2 = E_2(r)\hat{r},$$





# Consideraciones sobre Simetría

## I. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro



### Condición de Borde

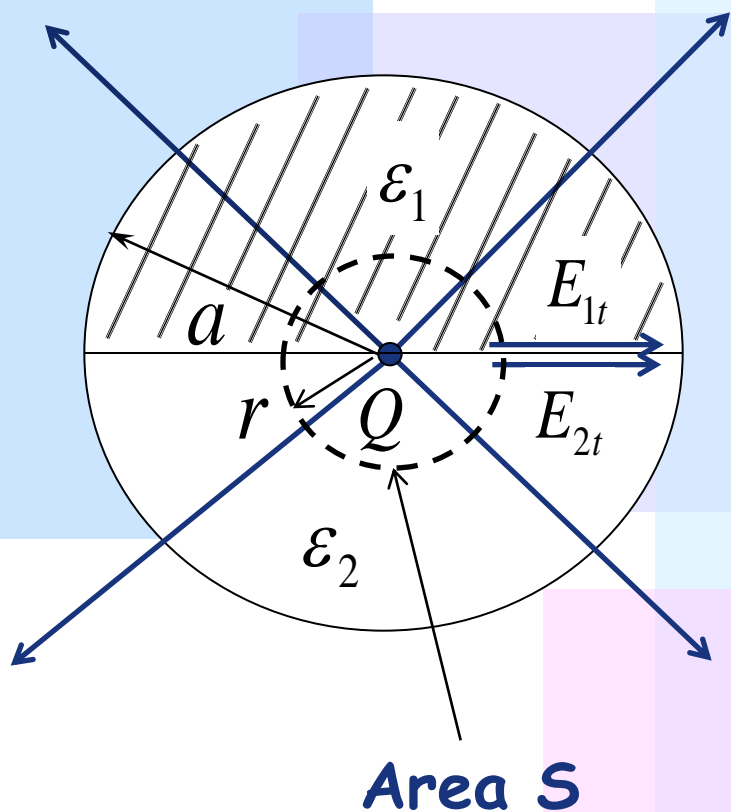
$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \begin{cases} E_1(r) = E_2(r) \\ \frac{D_1(r)}{\epsilon_1} = \frac{D_2(r)}{\epsilon_2} \end{cases}$$





# Consideraciones sobre Simetría

## I. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro



Aplicando la Ley de Gauss en S:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre} \Rightarrow$$

$$\iint_{ZONA I} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} + \iint_{ZONA II} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow$$

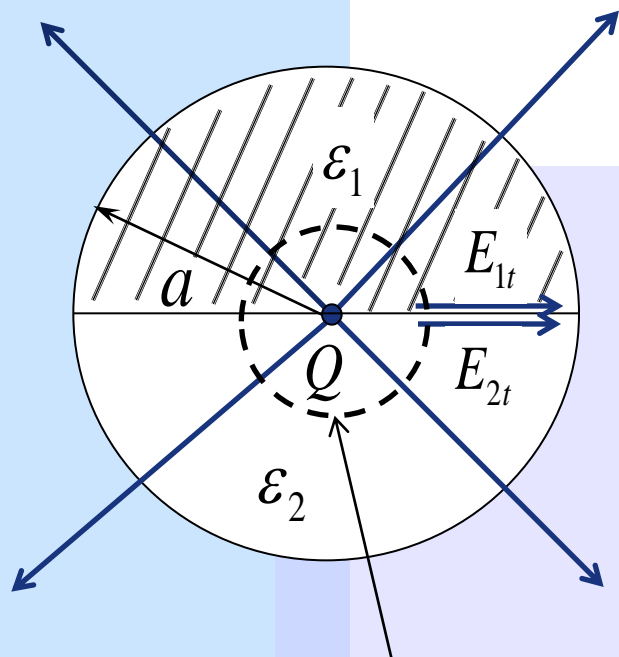
$$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q$$

Se llega al sistema:

$$\left. \begin{aligned} D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 &= Q \\ \epsilon_1 D_2 &= \epsilon_1 D_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{resolviendo}$$

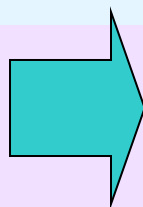


# Consideraciones sobre Simetría



Area  $S$

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$



$$\vec{D}_1 = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}, \quad \vec{D}_2 = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$$

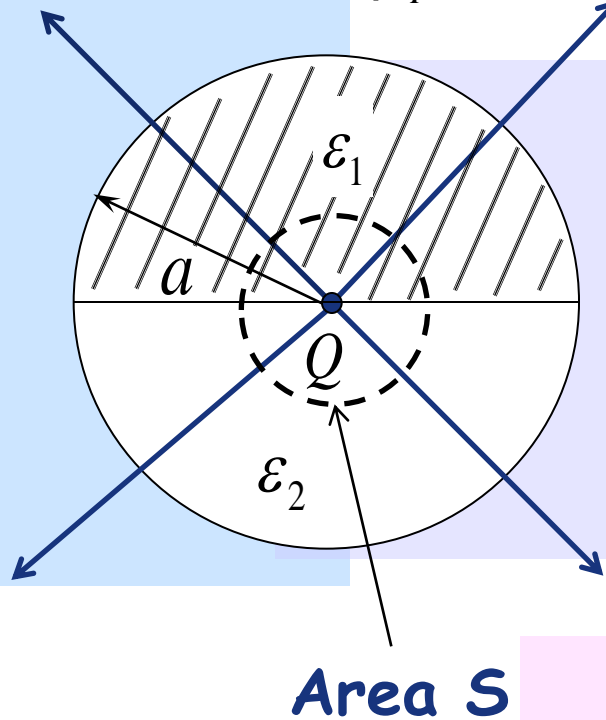
$$\vec{P}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$$

$$\vec{P}_2 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$$



# Consideraciones sobre Simetría

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot P_\theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P_\phi}{\partial \phi}$$



$$\vec{P} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

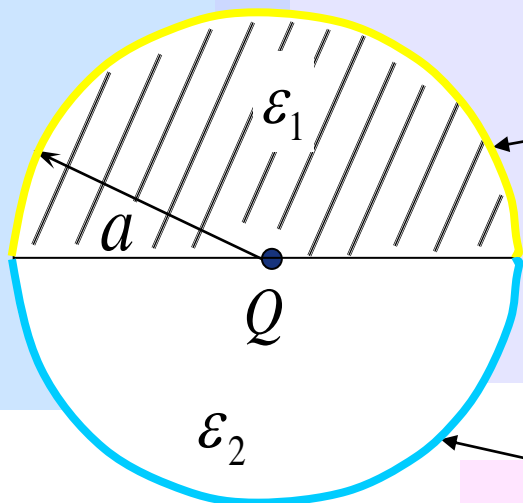
$$\sigma_{Pi} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \Big|_{r=a} \hat{r} \cdot \hat{r}$$

$$\sigma_{Pi} = \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$



## Consideraciones sobre Simetría

$$\vec{P}_i = \frac{(\epsilon_i - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$$



$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2}$$

$$\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2}$$

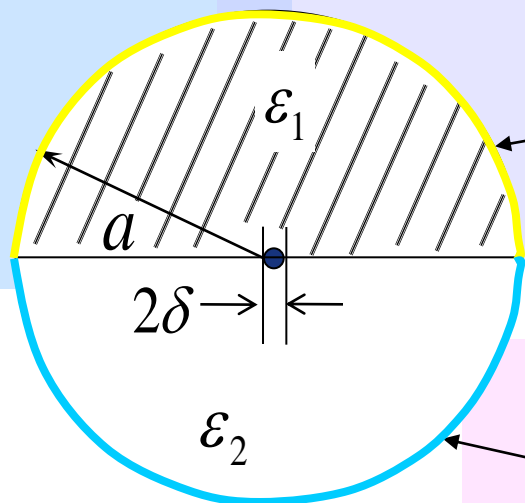
¿Por qué la carga neta de polarización no es nula?



## Consideraciones sobre Simetría

R. Porque el sistema contiene una carga puntual idealizada.

Si queremos representar en forma más real el sistema debemos considerar un pequeño radio  $\delta$  para la carga.



$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2}$$

$$\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2}$$





## Consideraciones sobre Simetría

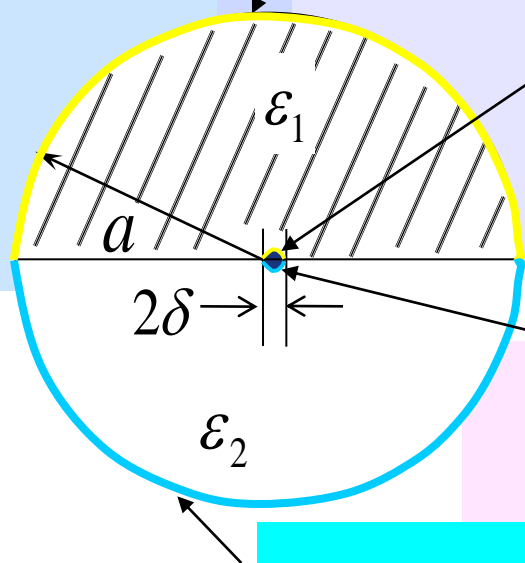
Con ello aparece carga en la superficie de contacto con la carga  $Q$

$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2}$$

$$\sigma'_{P1} = \vec{P}'_1 \cdot \hat{n} = -\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\delta^2}$$

$$\sigma'_{P2} = \vec{P}'_2 \cdot \hat{n} = -\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\delta^2}$$

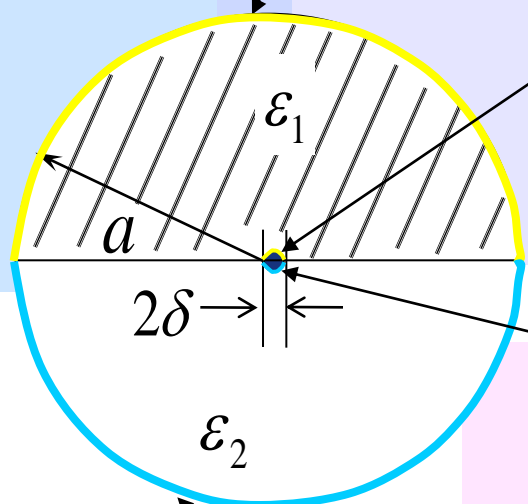
$$\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2}$$





# Consideraciones sobre Simetría

Con ello aparece carga en la superficie de contacto con la carga Q



$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2}$$

$$\sigma'_{P1} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = -\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\delta^2}$$

$$\sigma'_{P2} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = -\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\delta^2}$$

$$\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2}$$

Carga total nula

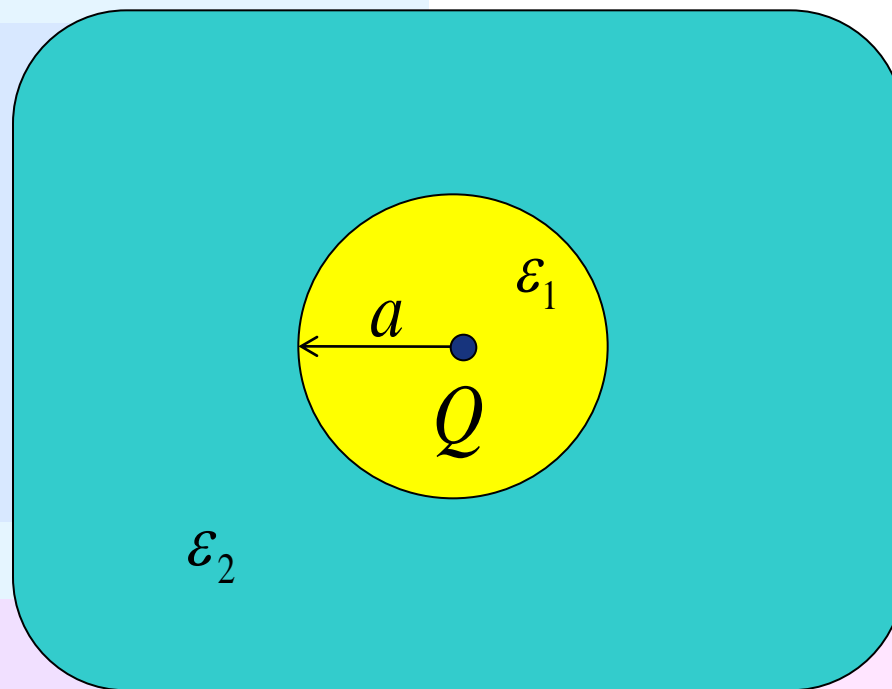
Carga total nula



## Consideraciones sobre Simetría

### II. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Calcular  $E$  y  $D$  en todo el espacio suponiendo que el medio 2 es infinito



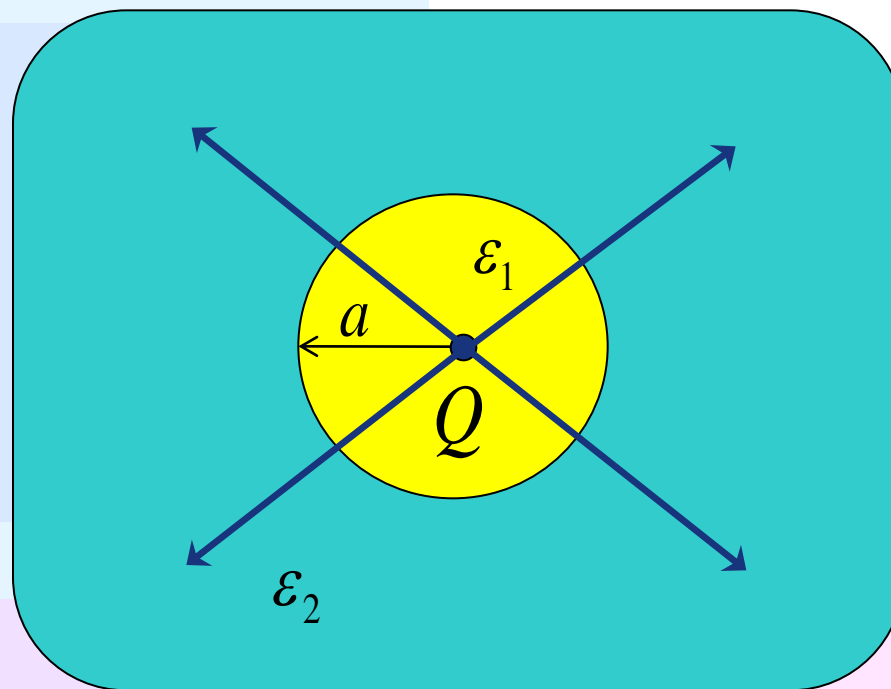


# Consideraciones sobre Simetría

## II. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Campos son radiales

$$\vec{D}_1 = D_1(r)\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = D_2(r)\hat{r}$$
$$\vec{E}_1 = E_1(r)\hat{r}, \quad \vec{E}_2 = E_2(r)\hat{r}$$





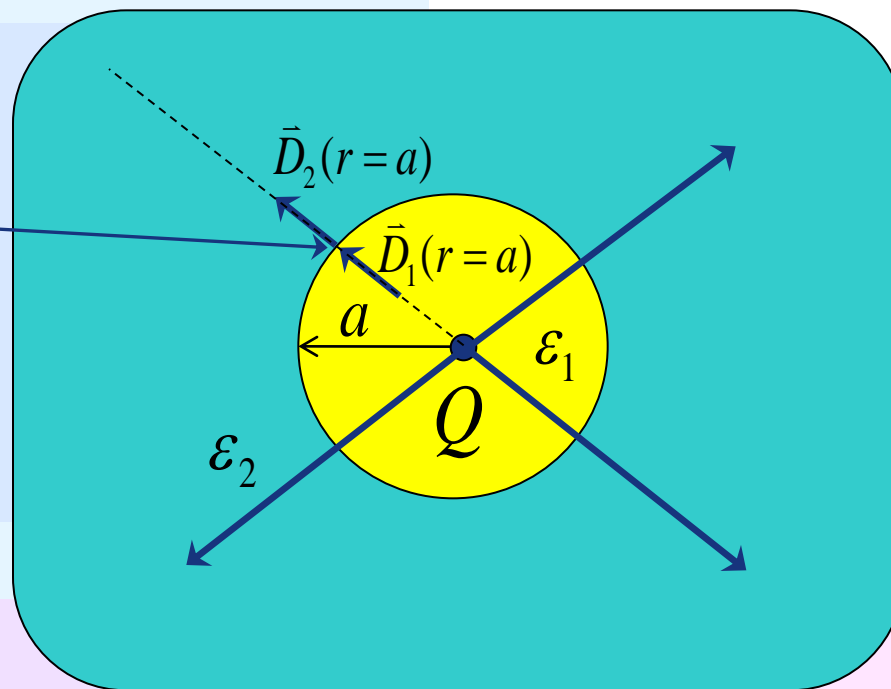
# Consideraciones sobre Simetría

## II. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Condición de Borde en  $r = a$

Componente normal de  $D$  se mantiene

$$\vec{D}_1(r = a) = \vec{D}_2(r = a)$$





## Consideraciones sobre Simetría

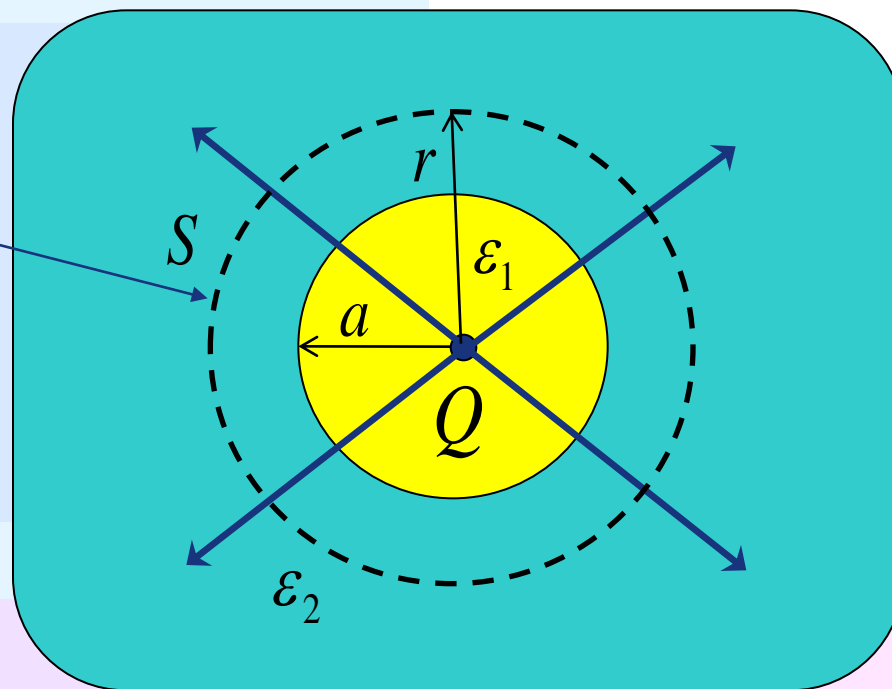
### II. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Aplicando la ley de Gauss en  $S$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 D_2(\vec{r}) = Q$$

$$\Rightarrow \vec{D}_2(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{r}$$







## Consideraciones sobre Simetría

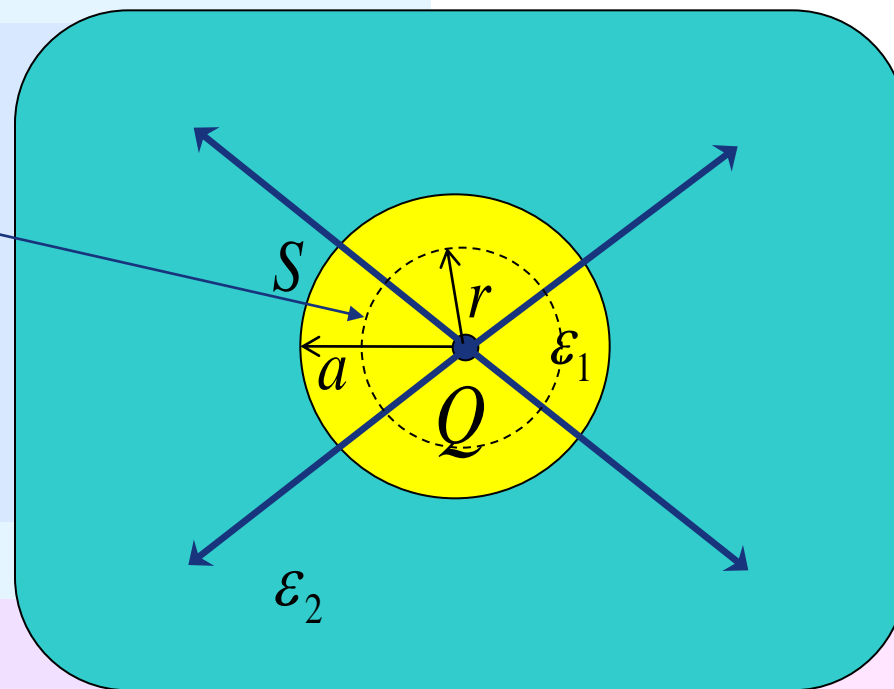
### II. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Aplicando la ley de Gauss en  $S$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 D_1(\vec{r}) = Q$$

$$\Rightarrow \vec{D}_1(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{r}$$

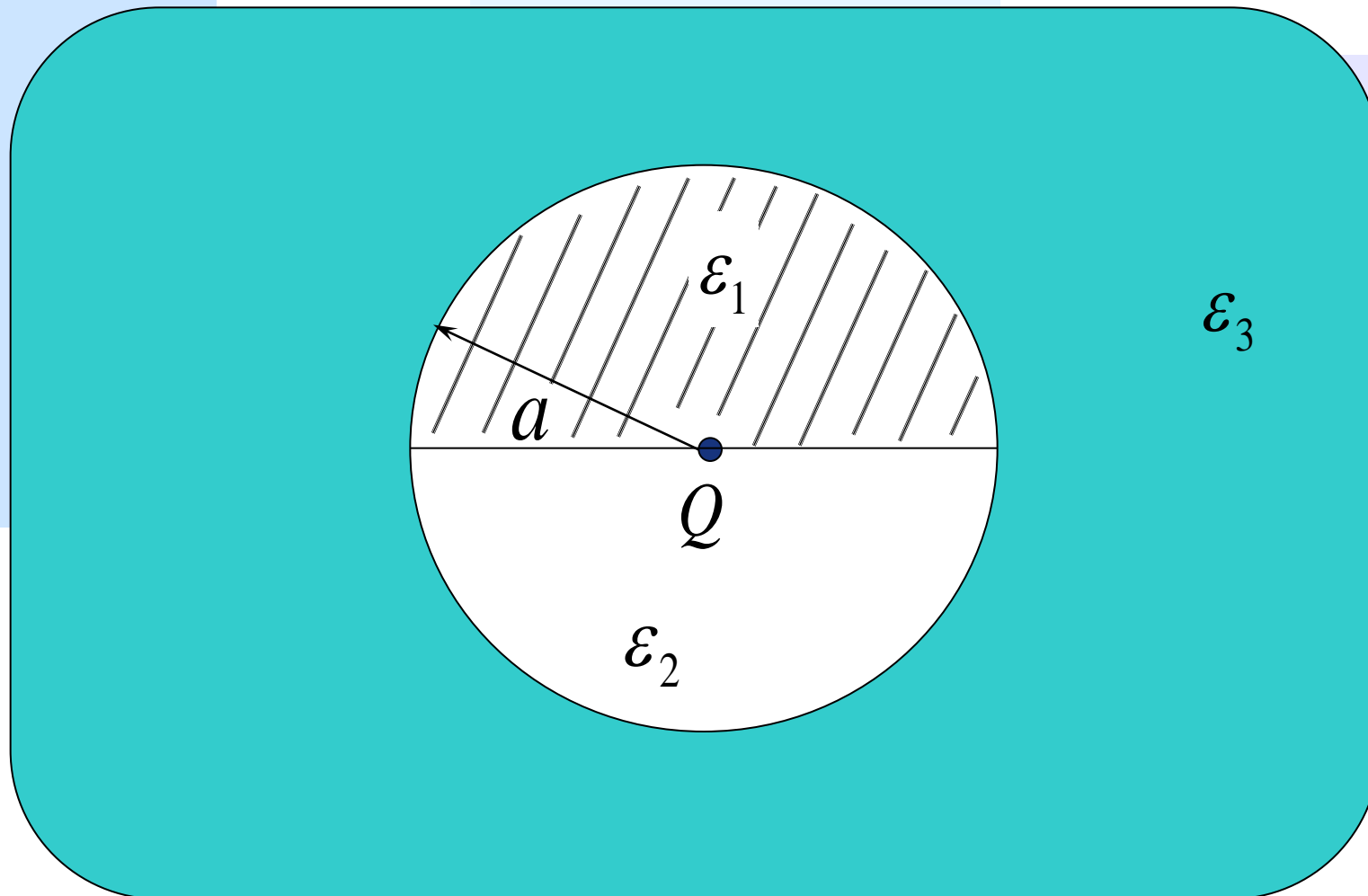


Notar que  $D_1 = D_2$  en todo el espacio



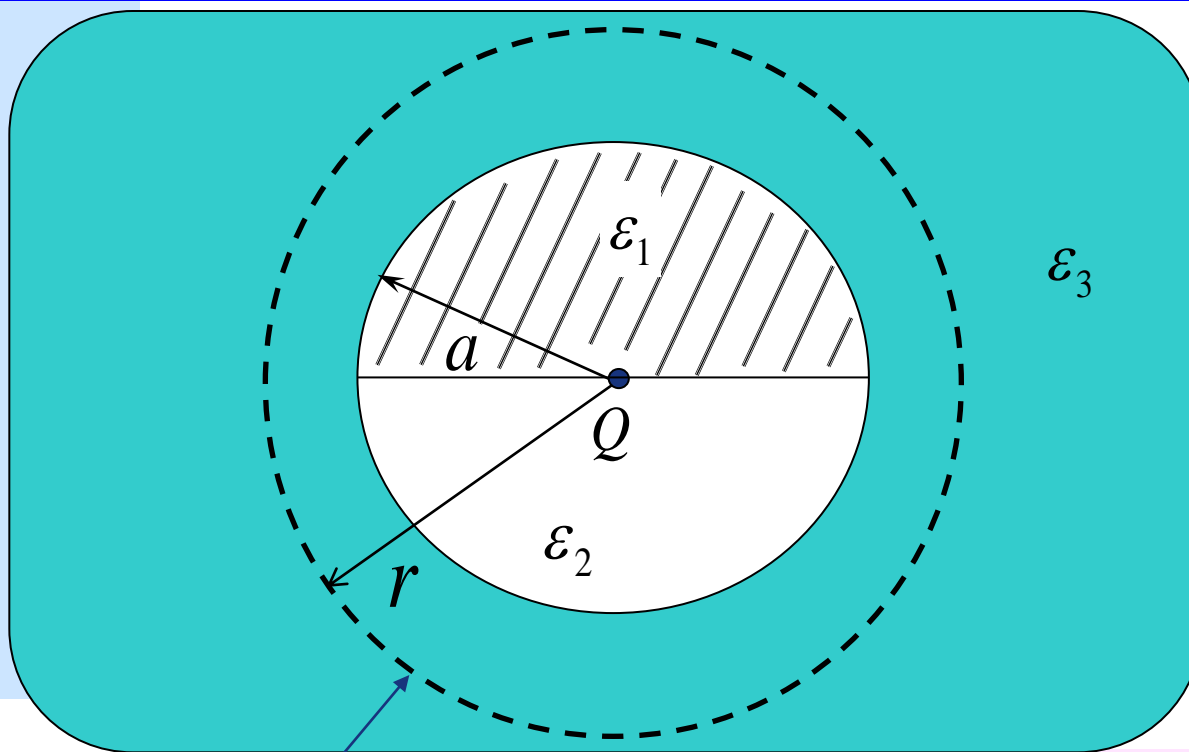
## Consideraciones sobre Simetría

### III. Caso tres medios con carga puntual $Q$ en el centro





## Consideraciones sobre Simetría

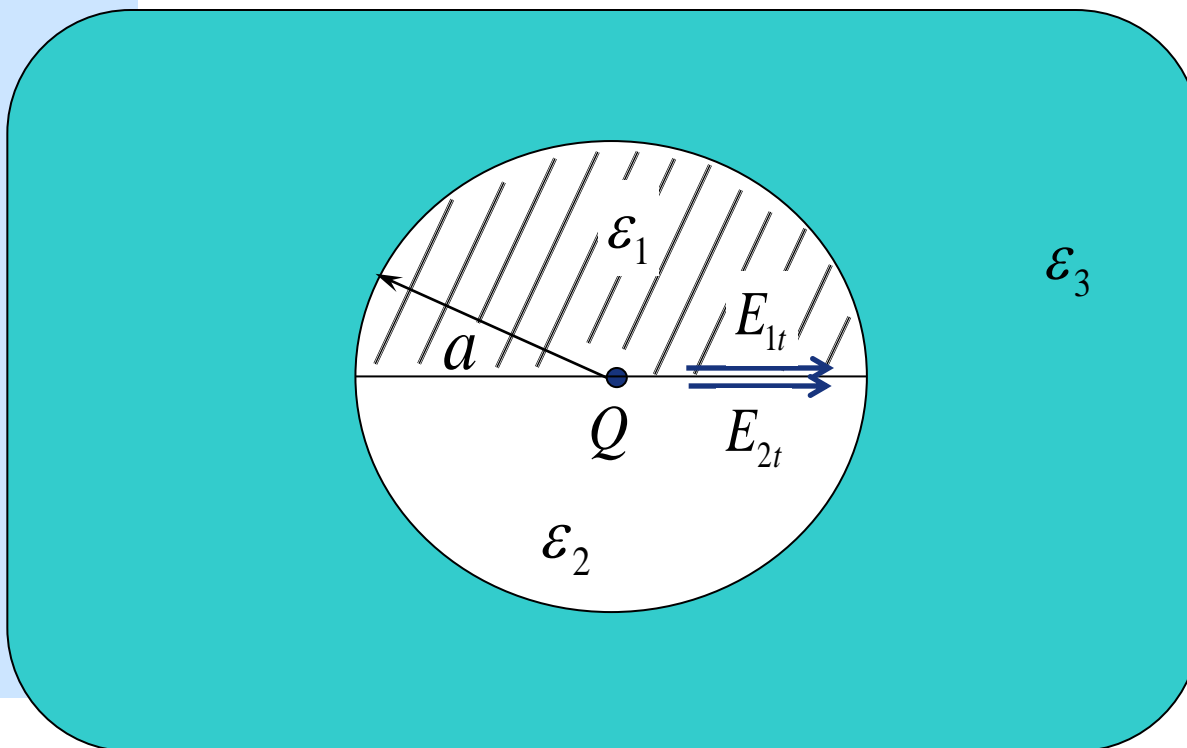


Aplicando la ley de Gauss en  $S$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \Rightarrow \vec{D}_3(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{E}_3(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_3 r^2} \hat{r}$$



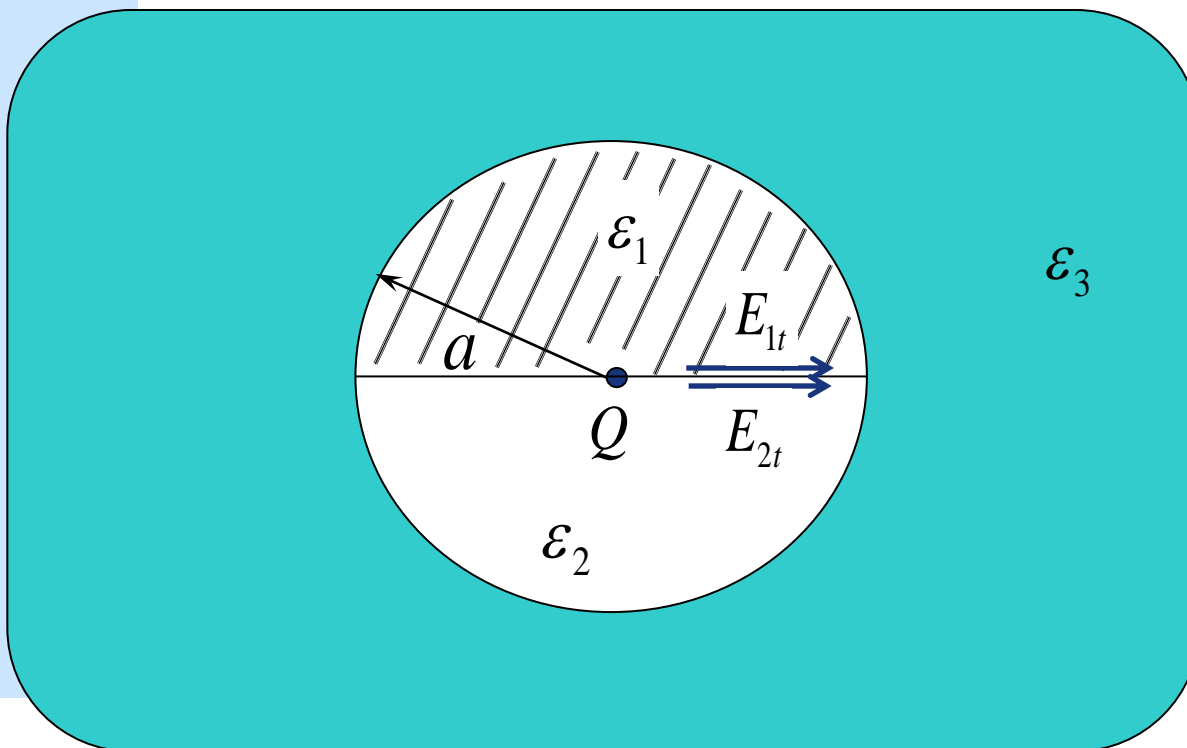
## Consideraciones sobre Simetría



*Para  $0 < r < a$  tenemos dos medios. En la superficie de separación la componente tangencial del campo es la misma*



## Consideraciones sobre Simetría

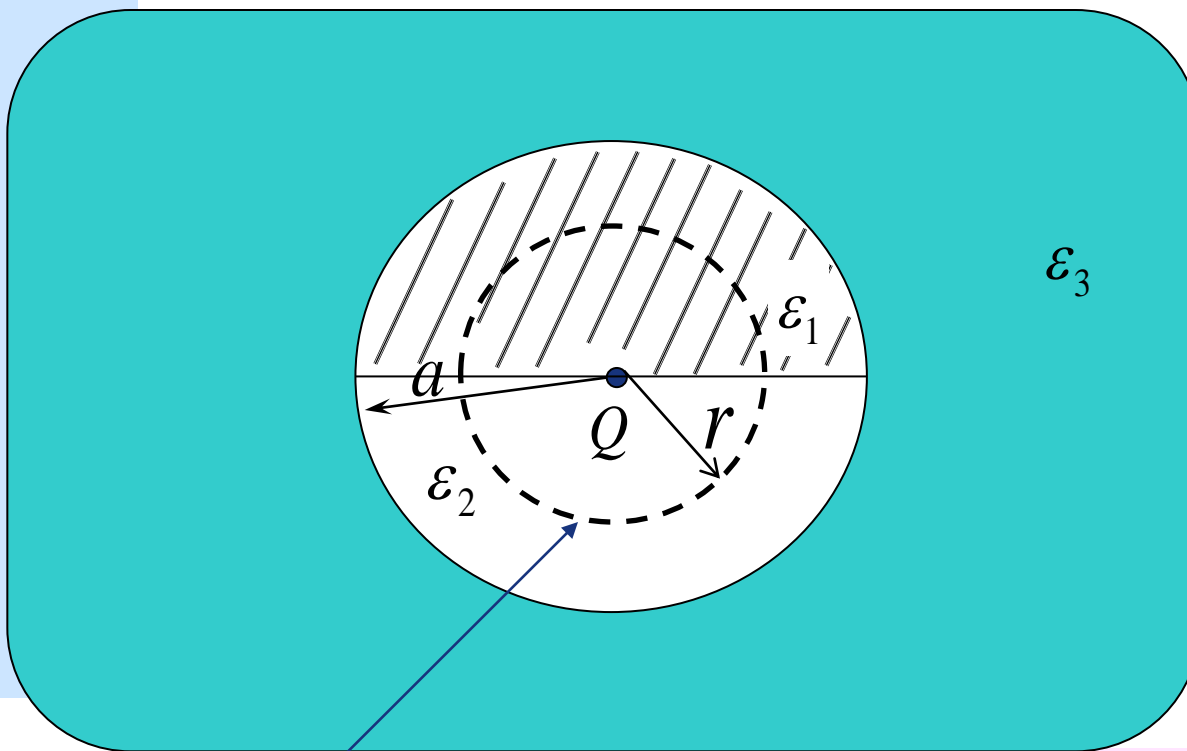


Luego dado que los campos son radiales,  
se debe cumplir:

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \begin{cases} E_1(r) = E_2(r) \\ \frac{D_1(r)}{\epsilon_1} = \frac{D_2(r)}{\epsilon_2} \end{cases}$$



# Consideraciones sobre Simetría



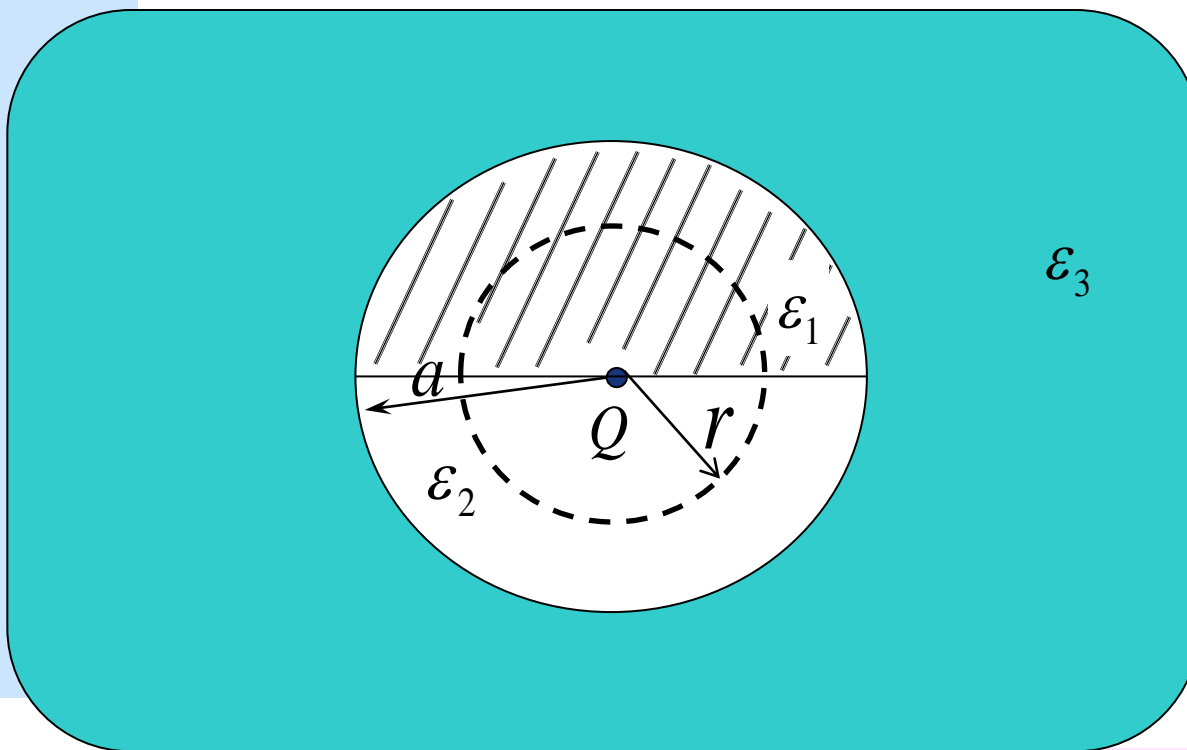
Aplicando la ley de Gauss en S

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \Rightarrow \iint_{\text{ZONA I}} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{ZONA II}} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q$$





## Consideraciones sobre Simetría

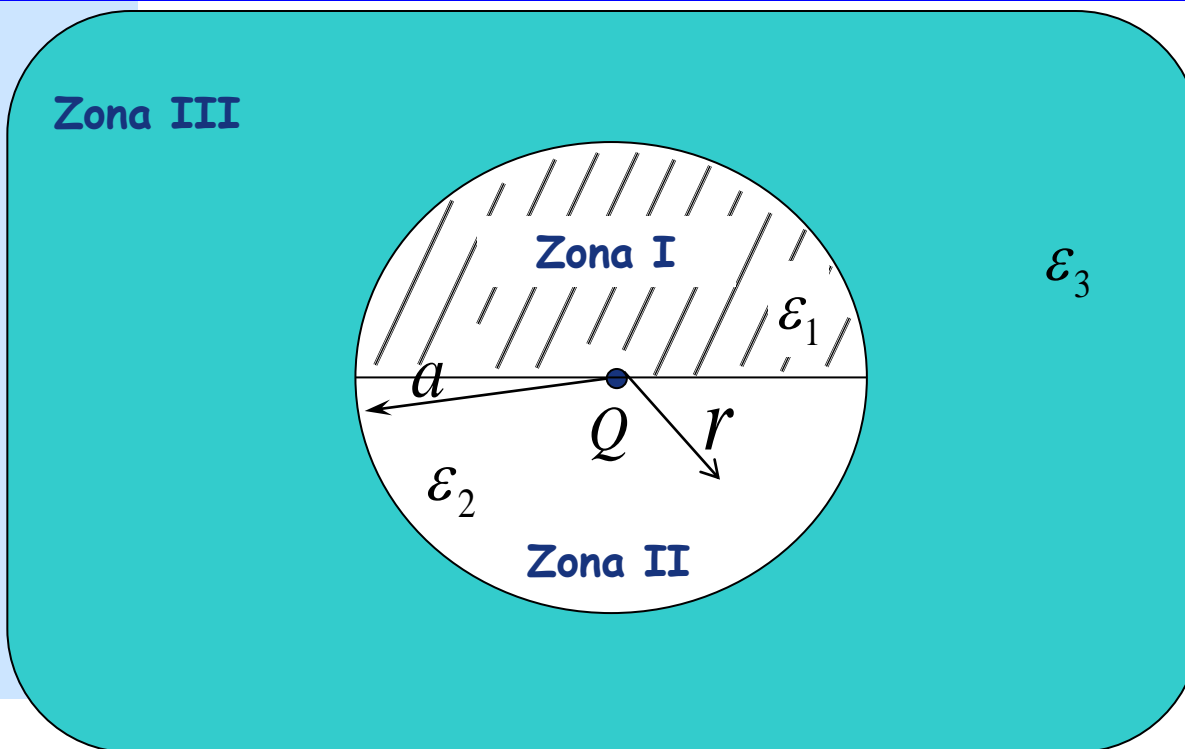


Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q \\ \varepsilon_1 D_2 = \varepsilon_2 D_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}, \quad \bar{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}$$



## Consideraciones sobre Simetría

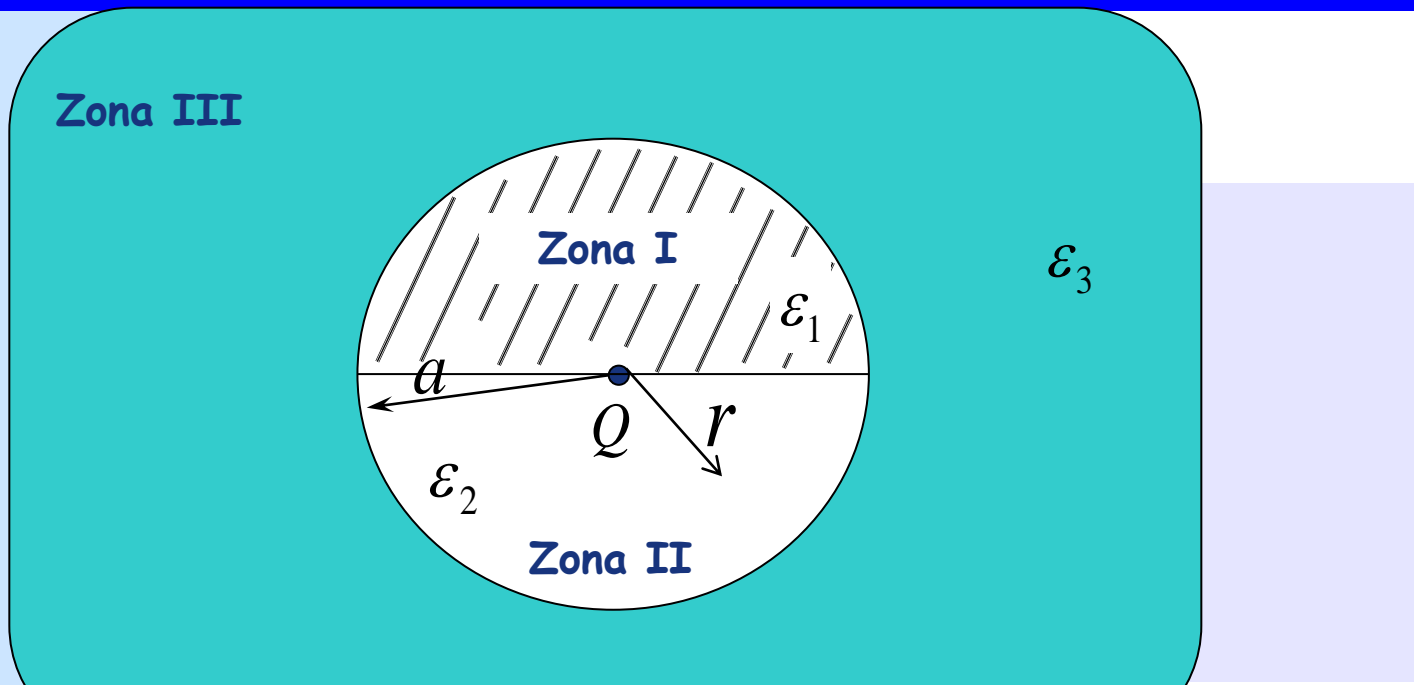


En resumen:  $\vec{D}_1 = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$ ,  $\vec{D}_2 = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$ ,  $\vec{D}_3 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$

Notar que si  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow \vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}_3 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$



## Consideraciones sobre Simetría



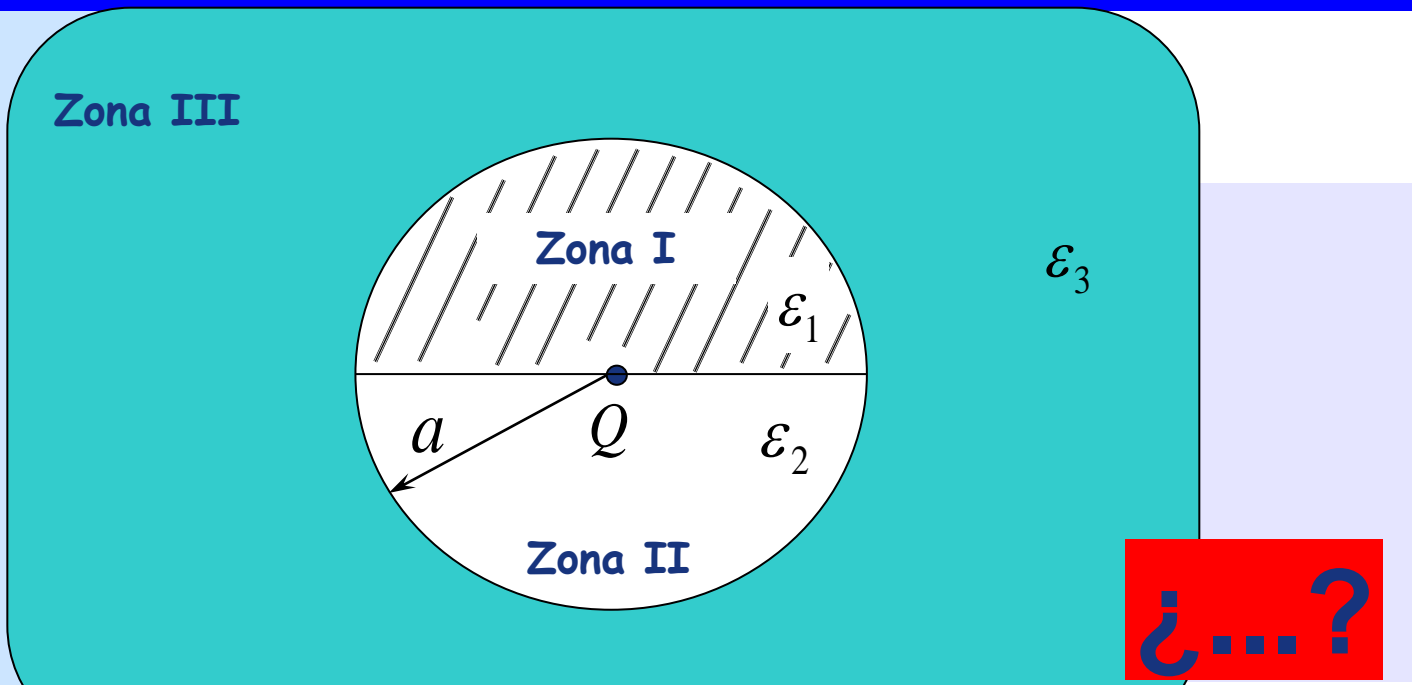
Pero si aplicamos la condición de borde para  $D$  en  $r=a$ :

$$\bar{D}_1(r=a) = \bar{D}_3(r=a) \Rightarrow \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2} = \frac{Q}{4\pi a^2} \Rightarrow 2\epsilon_1 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

$$\bar{D}_2(r=a) = \bar{D}_3(r=a) \Rightarrow \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2} = \frac{Q}{4\pi a^2} \Rightarrow 2\epsilon_2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$



# Consideraciones sobre Simetría



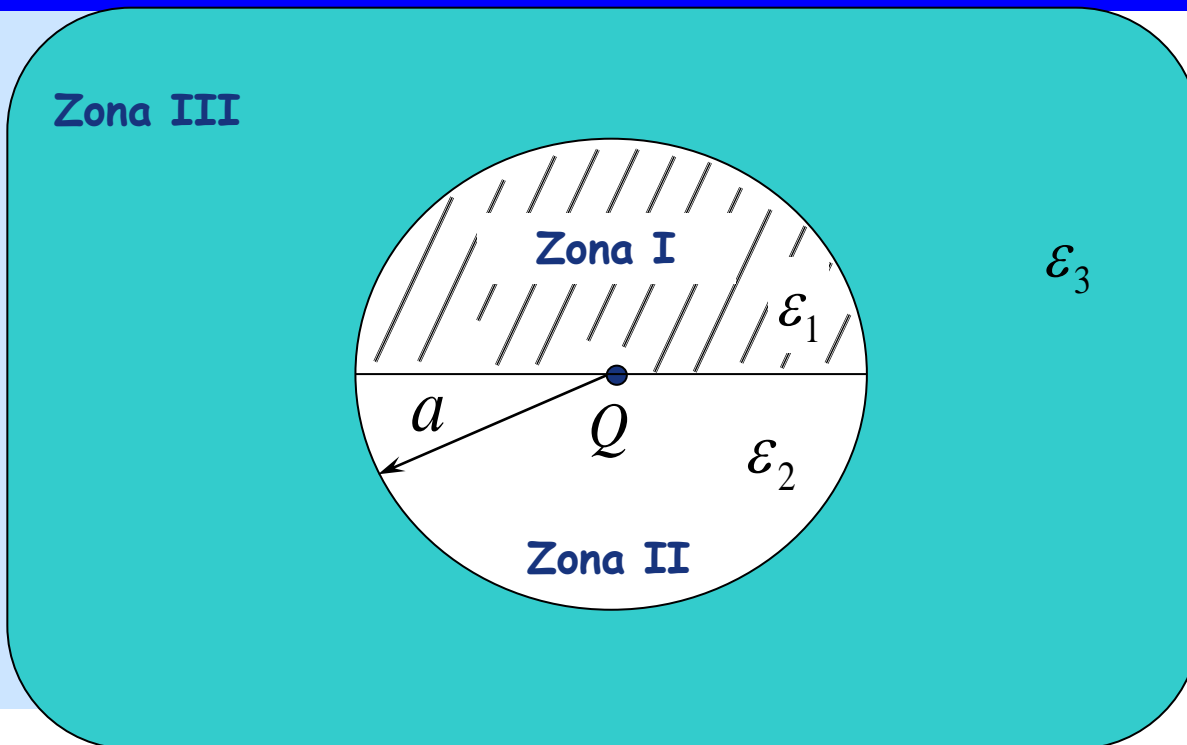
Pero si aplicamos la condición de borde para  $\vec{D}$  en  $r=a$ :

$$\vec{D}_1(r=a) = \vec{D}_3(r=a) \Rightarrow \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2} = \frac{Q}{4\pi a^2} \Rightarrow 2\epsilon_1 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

$$\vec{D}_2(r=a) = \vec{D}_3(r=a) \Rightarrow \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2} = \frac{Q}{4\pi a^2} \Rightarrow 2\epsilon_2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$



## Consideraciones sobre Simetría

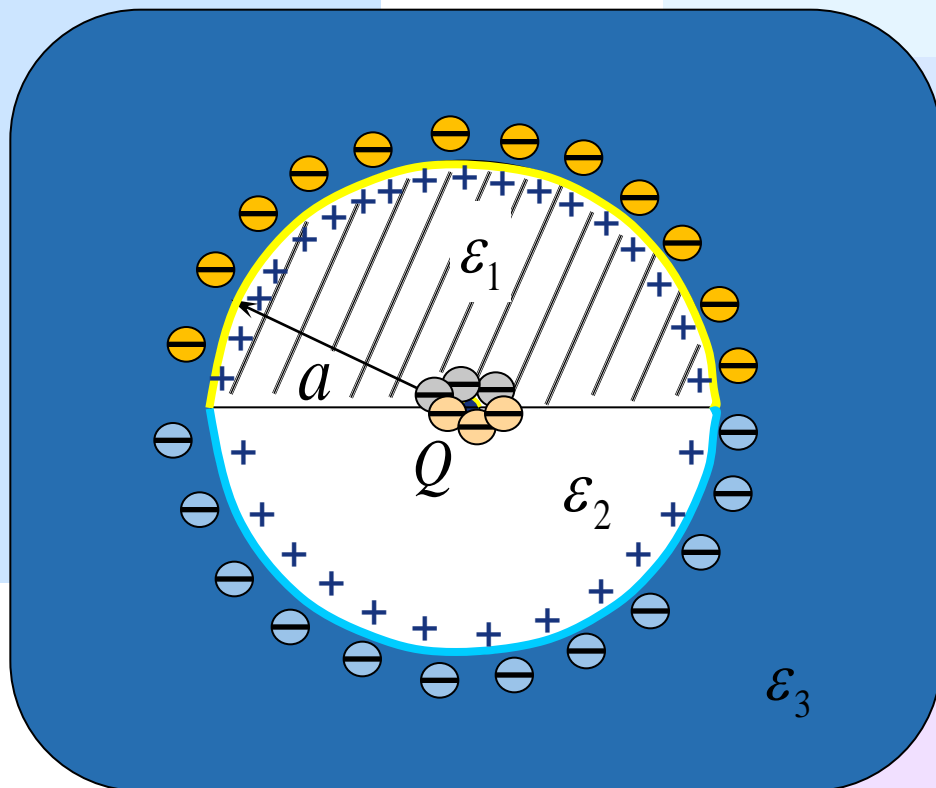


Al aplicar simetría no debemos olvidar que estamos simplificando un problema más complejo!



## Consideraciones sobre Simetría

La carga  $Q$  en el centro provocará una alineación de dipolos:



• La distribución de carga de polarización tendrá la forma indicada en la figura

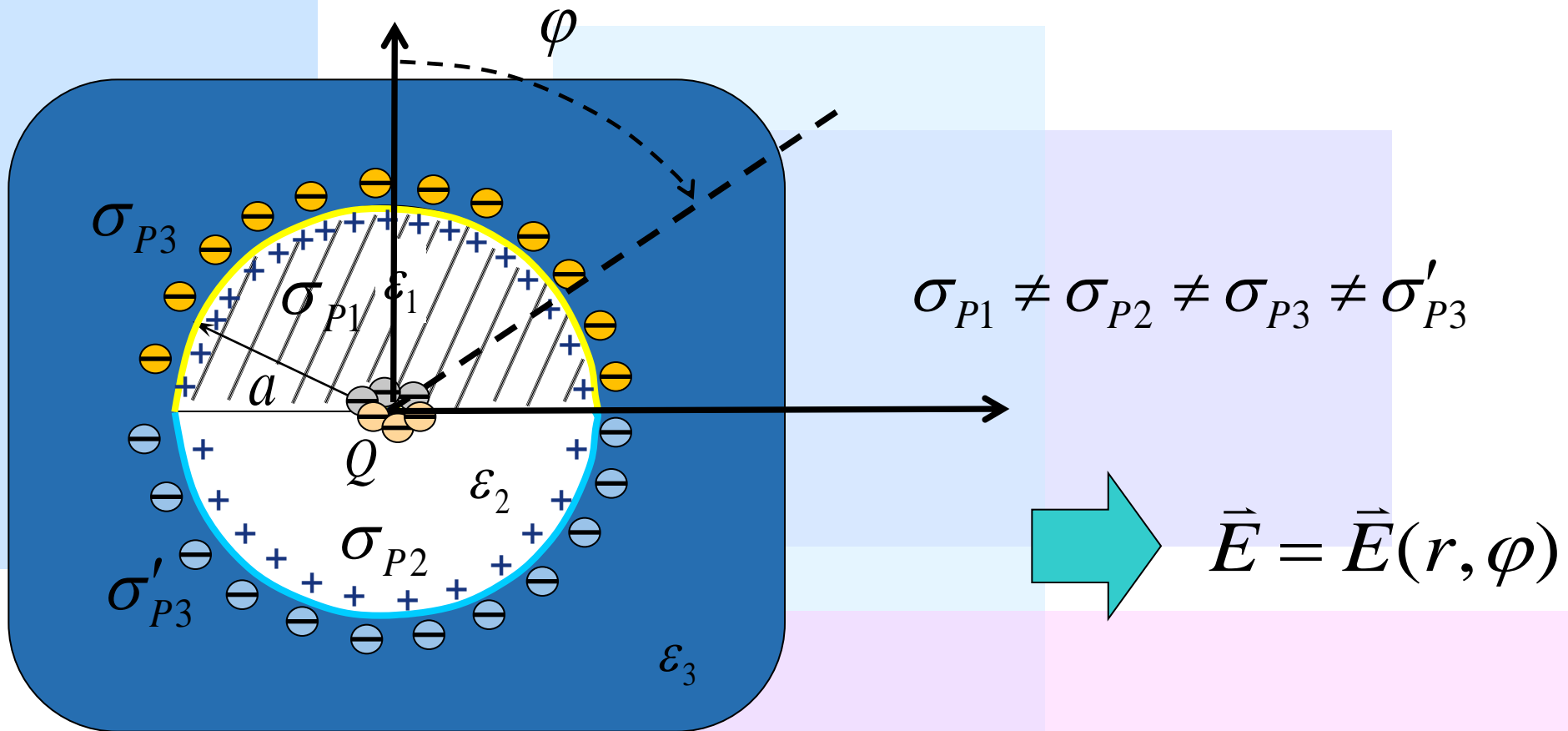
• Si los medios son diferentes, entonces la carga superficial de polarización en zonas I y II es diferente

**LUEGO EL SISTEMA NO TIENE SIMETRÍA ESFÉRICA**





# Consideraciones sobre Simetría

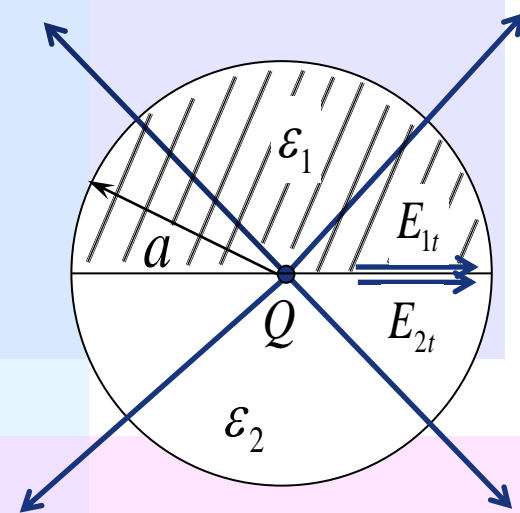
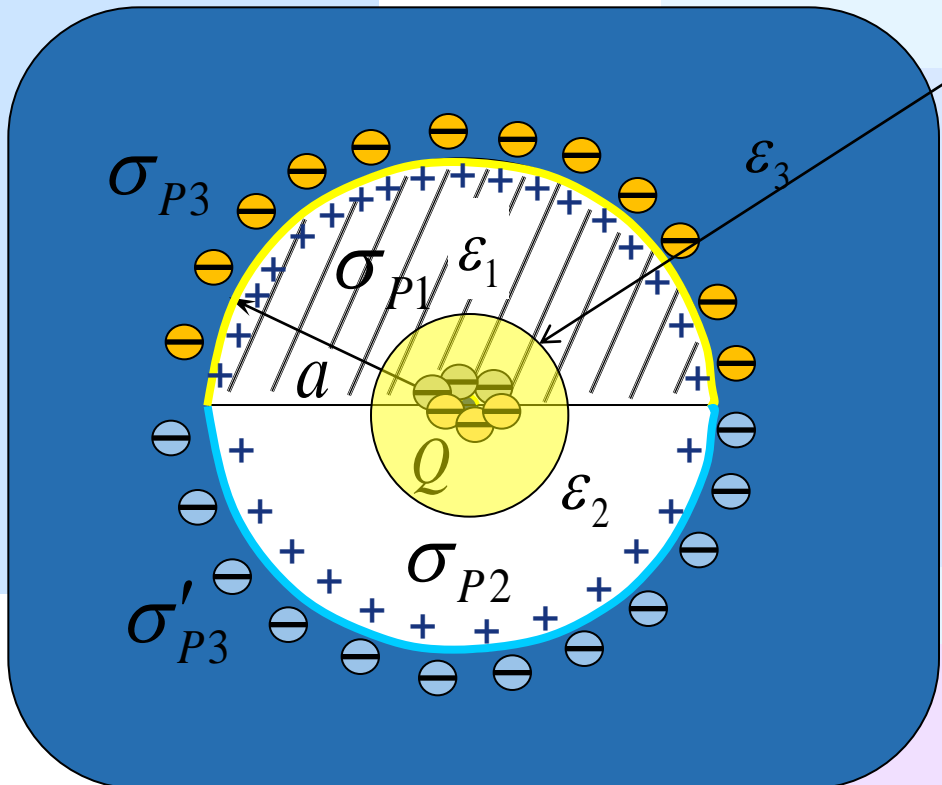


Y no se puede usar Ley de Gauss como lo hicimos !

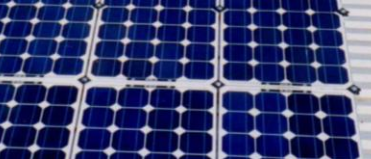


# Consideraciones sobre Simetría

En la práctica, la aproximación a usar dependerá de zona de interés

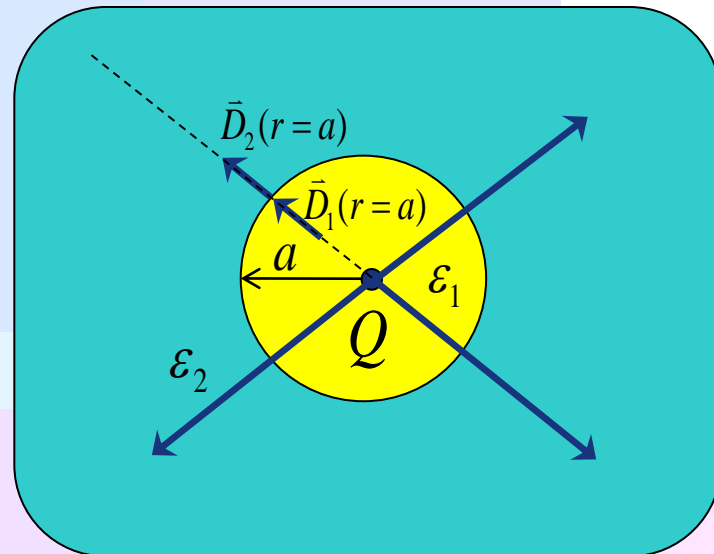
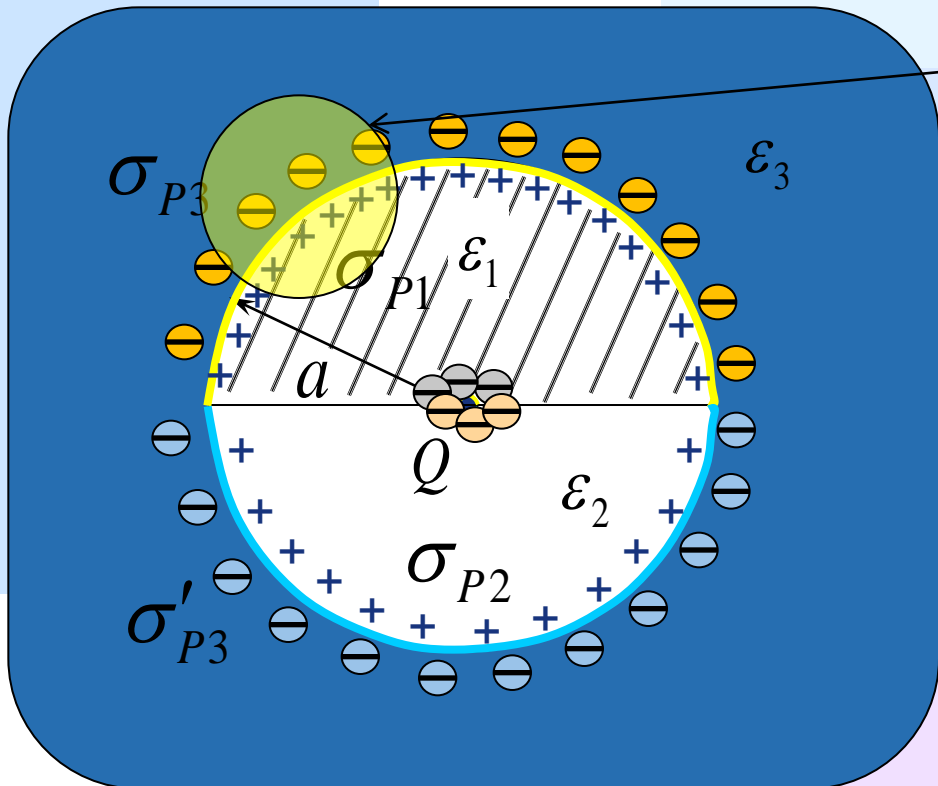


$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \begin{cases} E_1(r) = E_2(r) \\ \frac{D_1(r)}{\epsilon_1} = \frac{D_2(r)}{\epsilon_2} \end{cases}$$



# Consideraciones sobre Simetría

En la práctica, la aproximación a usar dependerá de zona de interés



$$\vec{D}_1(r=a) = \vec{D}_2(r=a)$$