



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 9

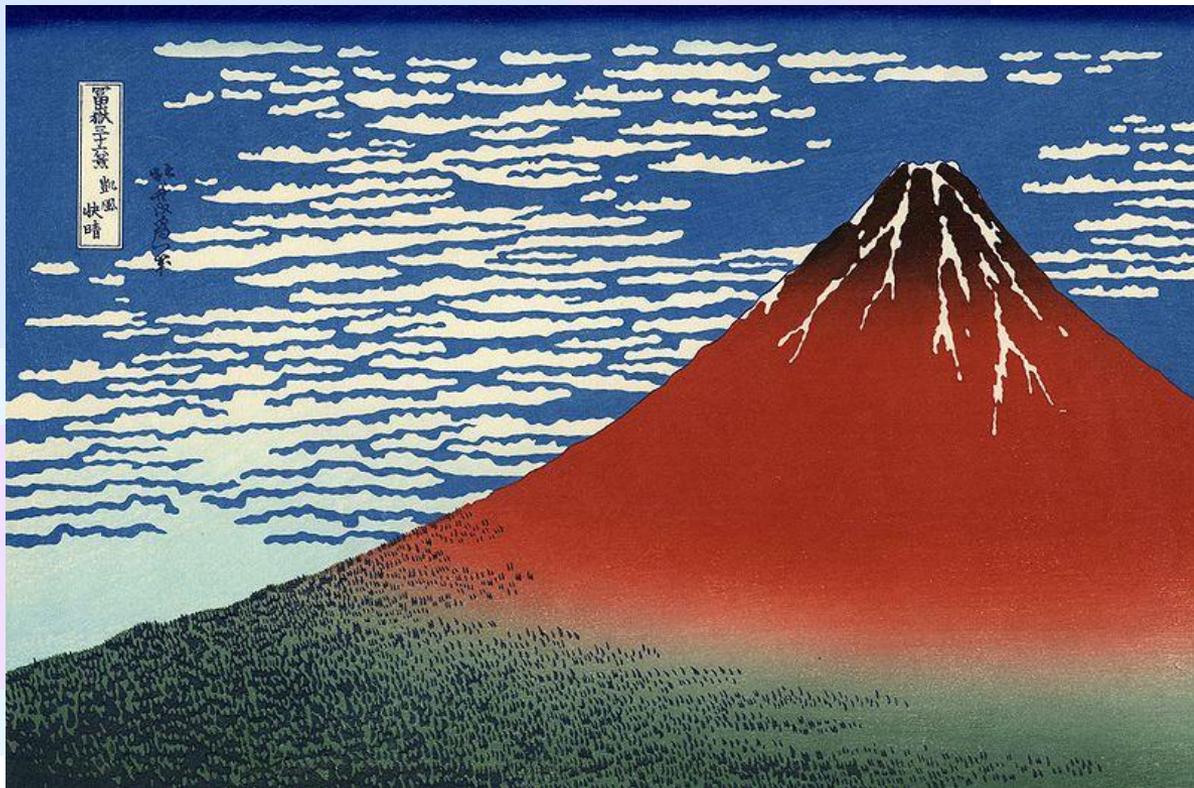
Conductores en Electrostatica-I

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Modelo básico de conductores
- Propiedades
- Caso conductor con oquedad
- Ejemplos

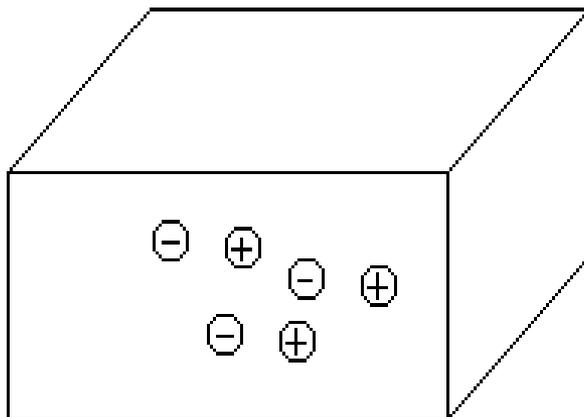


Katsushika Hokusai 葛飾北斎
Monte Fuji Rojo



Modelo Básico de Conductores

Sin Campo eléctrico



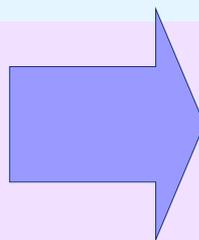
Carga neta nula

Hipótesis:

- Abundantes cargas positivas y negativas (infinitas)
- Pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico

Estado de Equilibrio Electrostatico:

Ya no hay movimiento de Cargas

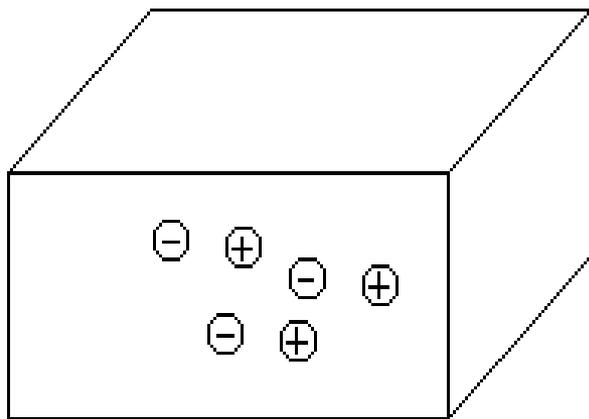


Campo eléctrico nulo en el interior (de lo contrario habría movimiento de cargas)



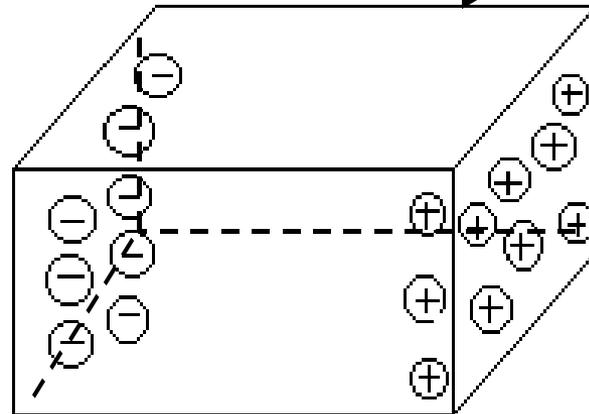
Modelo Básico de Conductores

Sin Campo eléctrico



Carga neta nula

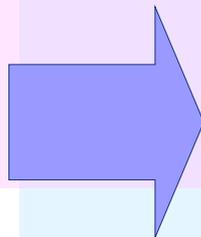
\vec{E}



Carga neta nula

- Abundantes cargas positivas y negativas
- Pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico

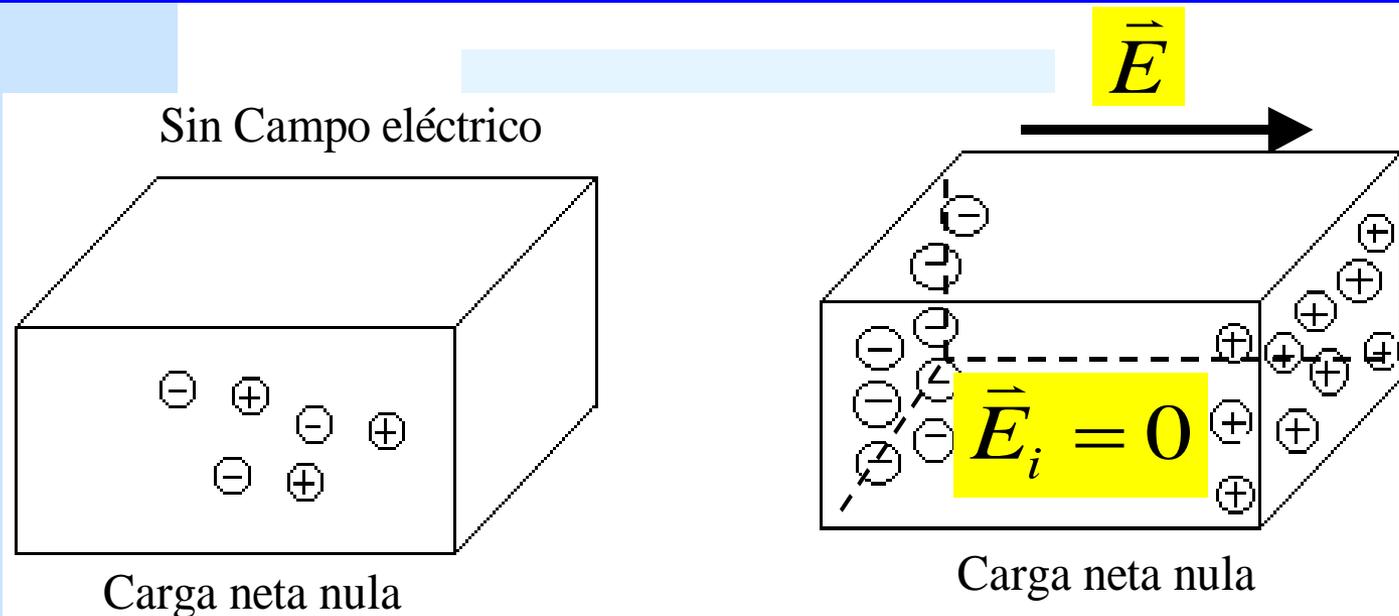
Estado de Equilibrio



Campo eléctrico nulo en el interior



Propiedades



1. La carga sólo se redistribuye en la superficie

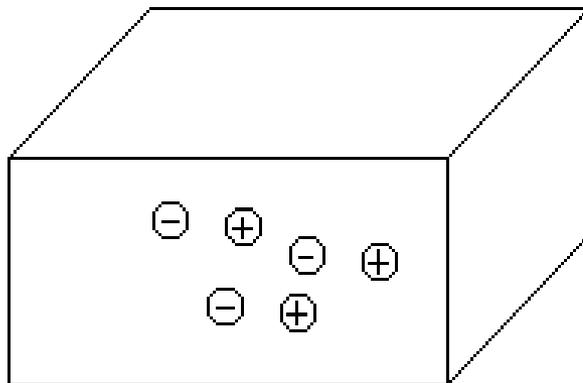
Estado de Equilibrio
dentro del conductor

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_l = 0$$

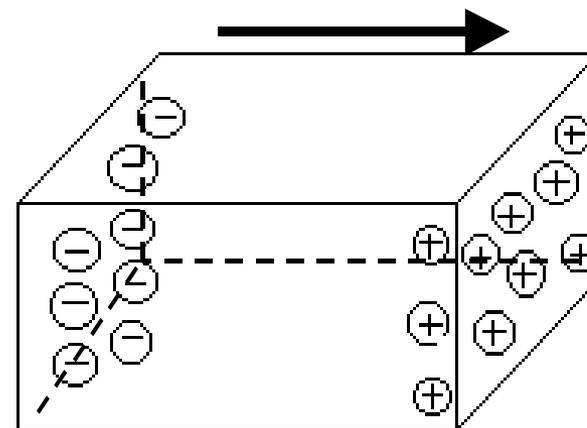


Propiedades

Sin Campo eléctrico



Carga neta nula



Carga neta nula

2. Toda la superficie del conductor es una equipotencial

Estado de Equilibrio
dentro del conductor

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

No existe diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera al interior del conductor



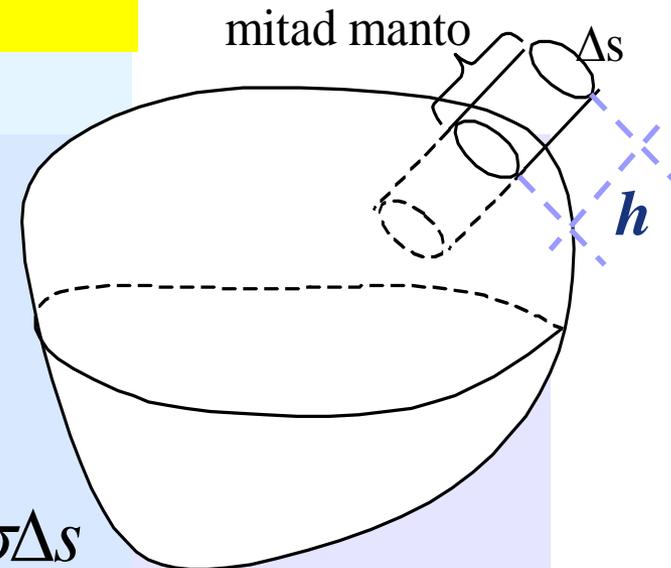
Propiedades

Conductor en estado de Equilibrio

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow D_{\text{int.}} = 0$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{mitad manto}} D \cdot dS + \iint_{\text{tapa exterior}} \vec{D} \cdot dS$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_n \Delta s \Rightarrow D_n \Delta s = \sigma \Delta s$$



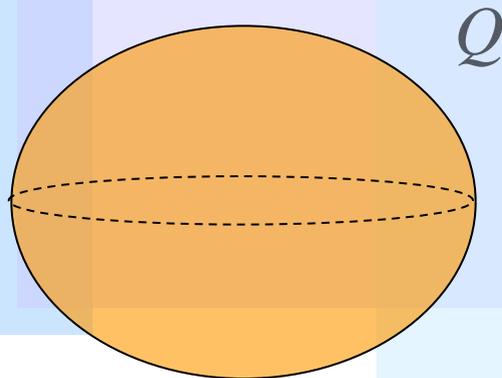
3. El campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es normal a la superficie del conductor (sino la carga se movería)

$$D_n = \varepsilon_0 E_n \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$



Ejemplos

¿De que signo es el potencial de un conductor cargado con carga $Q > 0$?

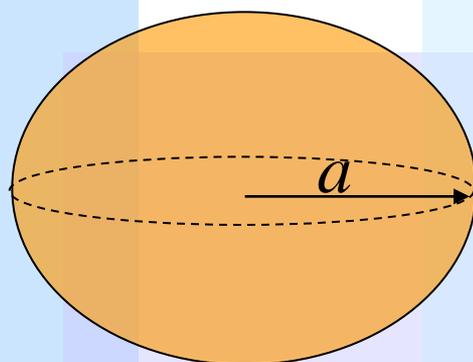




Ejemplos

En la superficie

para



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$r \rightarrow \infty$$

$$\vec{E} \rightarrow 0 \hat{n}$$

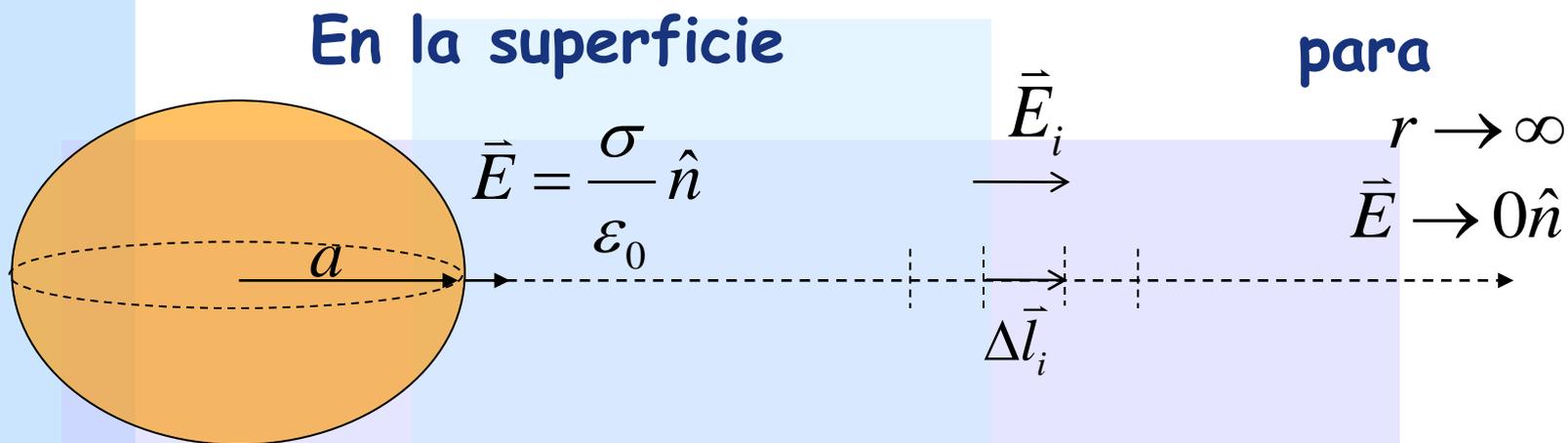
$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref}$$

$$ref = \infty \Rightarrow V_{ref} = 0 \Rightarrow V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

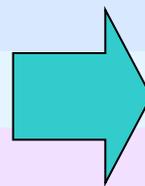
$$\therefore V(\vec{r}) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



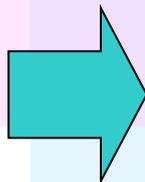
Ejemplos



$$V(\vec{r}) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\vec{E}_i \cdot \Delta \vec{l}_i}_{>0}$$



$$\therefore V(\vec{r} = a) > 0$$



Ejemplos

¿Cuál es la razón entre las cargas de ambas esferas si se unen por un conductor muy delgado?

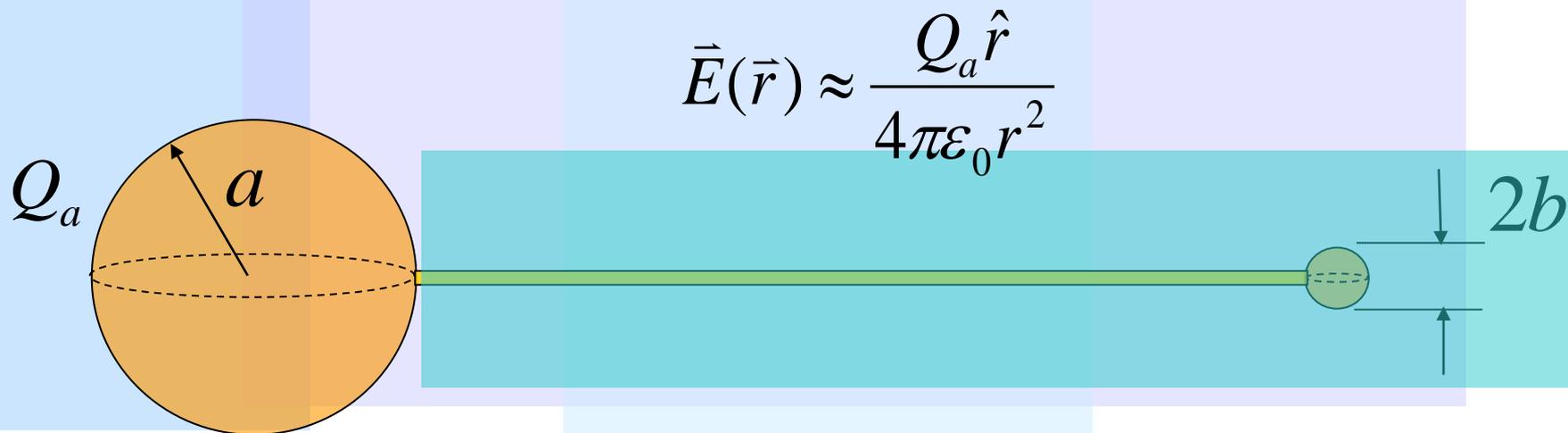


Supuesto: esferas están a gran distancia entre sí



Ejemplos

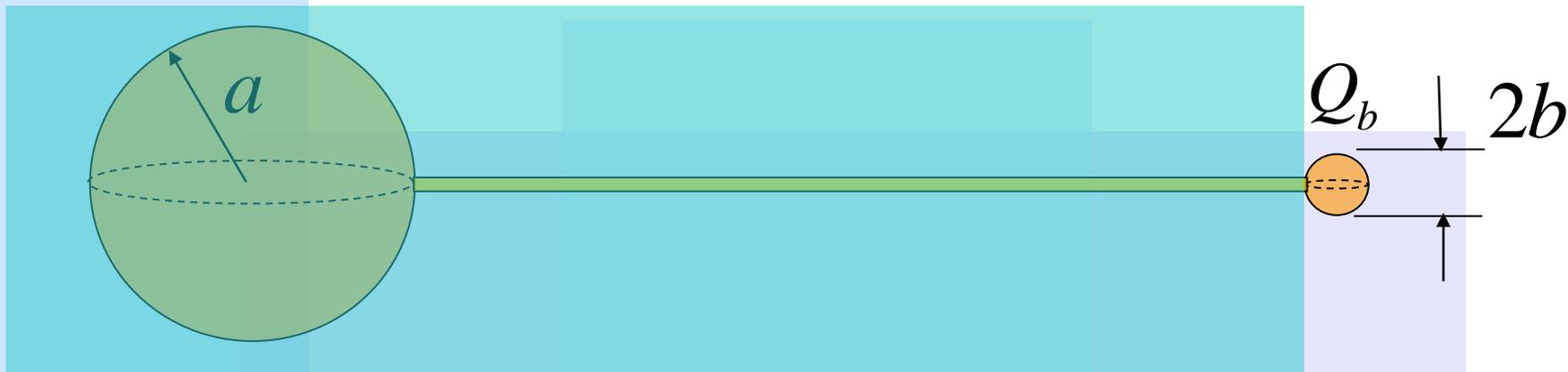
Si esferas están a gran distancia entonces el campo de una esfera no afecta a la otra



$$ref = \infty \Rightarrow V_{ref} = 0 \Rightarrow V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$
$$\therefore V(\vec{r} = a) = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 a}$$



Ejemplos



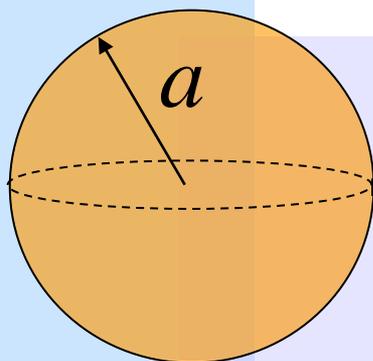
Para la otra esfera el cálculo es similar

$$ref = \infty \Rightarrow V_{ref} = 0 \Rightarrow V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad V(\vec{r} = b) = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b}$$



Ejemplos

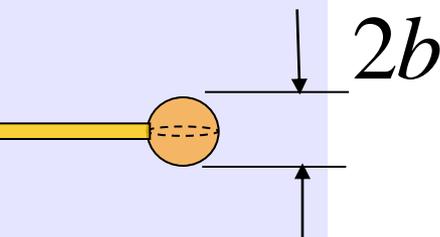
Luego



$$V(\vec{r} = a) = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\vec{E}_a = \frac{\sigma_a}{\epsilon_0} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{n}$$

$$V(r = a) = V(r = b) \Rightarrow \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b}$$



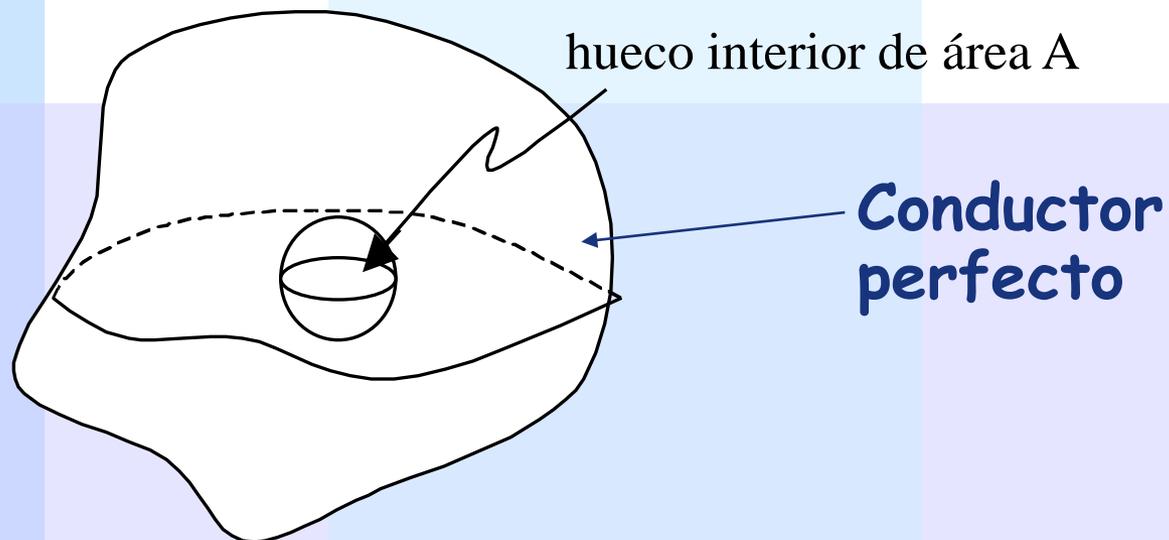
$$V(\vec{r} = b) = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$\vec{E}_b = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b^2} \hat{n}$$

$$\therefore \frac{Q_a}{Q_b} = \frac{a}{b}$$



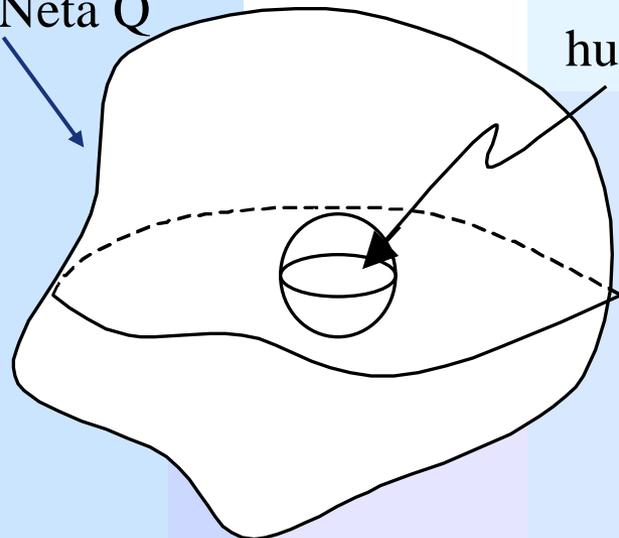
Caso Conductor con Oquedad





Caso Conductor con Oquedad

Carga Neta Q



hueco interior de área A

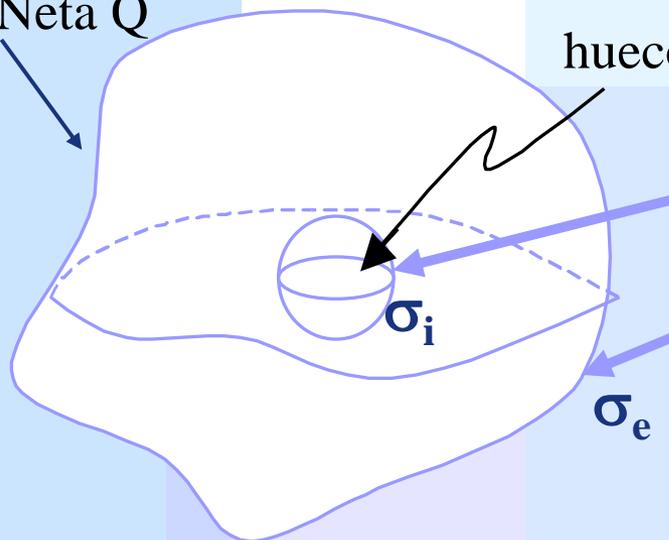
¿Cómo se distribuye la carga en el estado de equilibrio?



Caso Conductor con Oquedad

Carga Neta Q

hueco interior

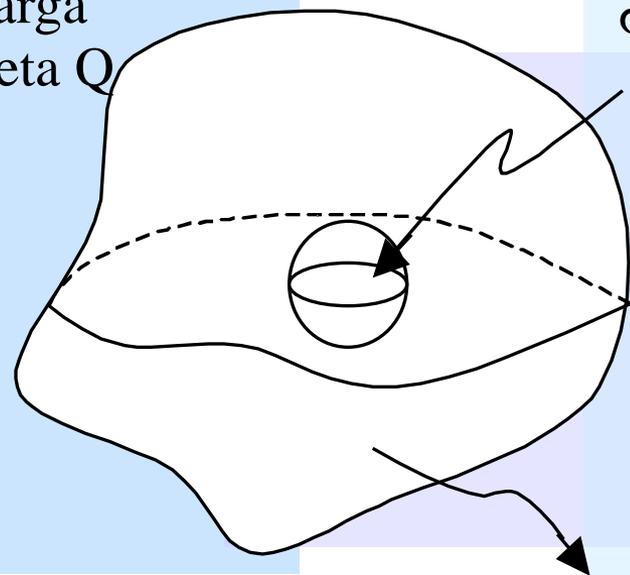


**SOLO PUEDE HABER
CARGA SUPERFICIAL**

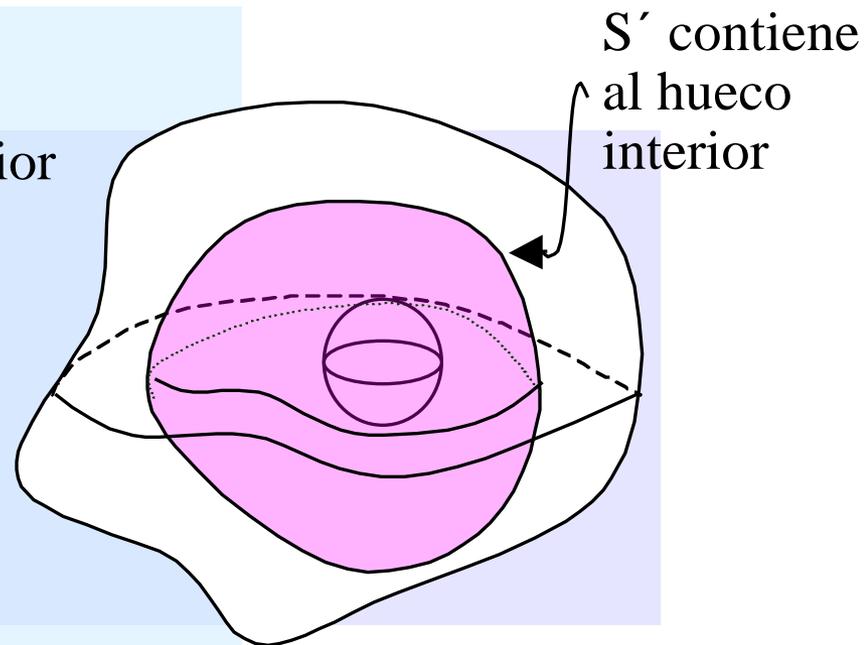


Caso Conductor con Oquedad

Carga
Neta Q



σ_i Superficie
huevo interior

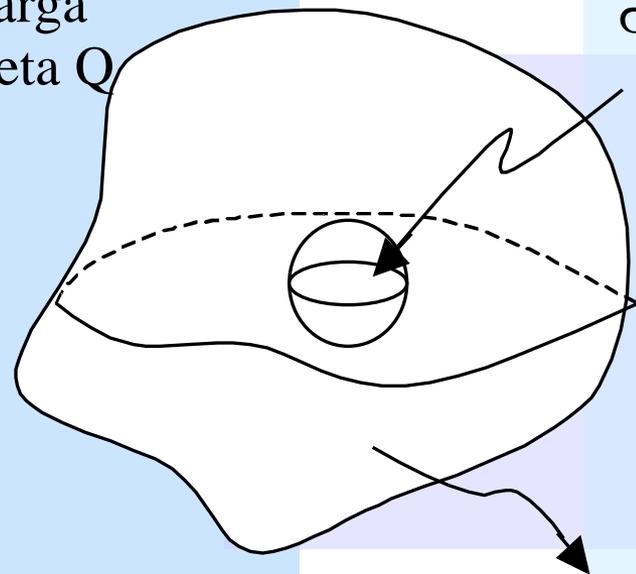


σ_e superficial cara externa

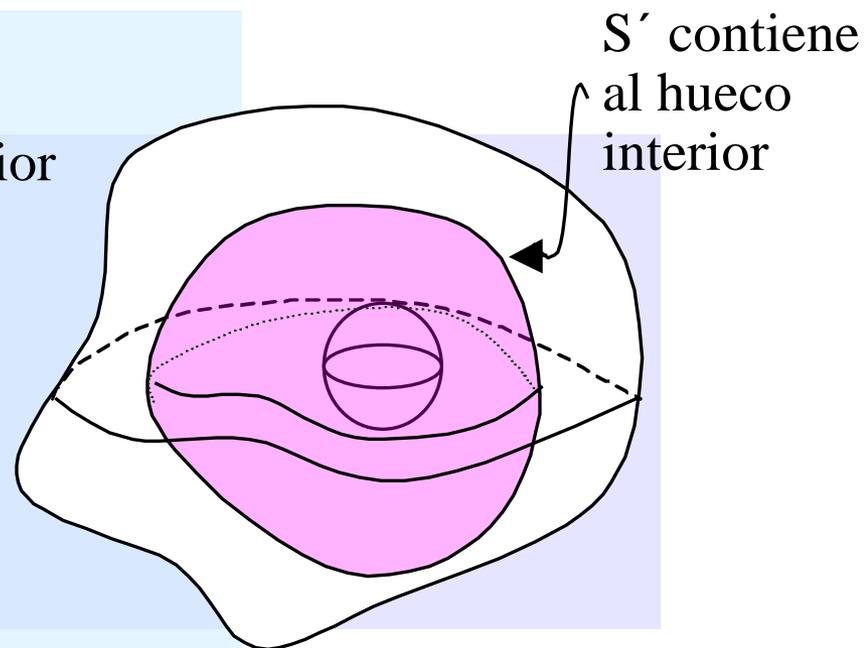


Caso Conductor con Oquedad

Carga Neta Q



σ_i Superficie hueco interior



σ_e superficial cara externa

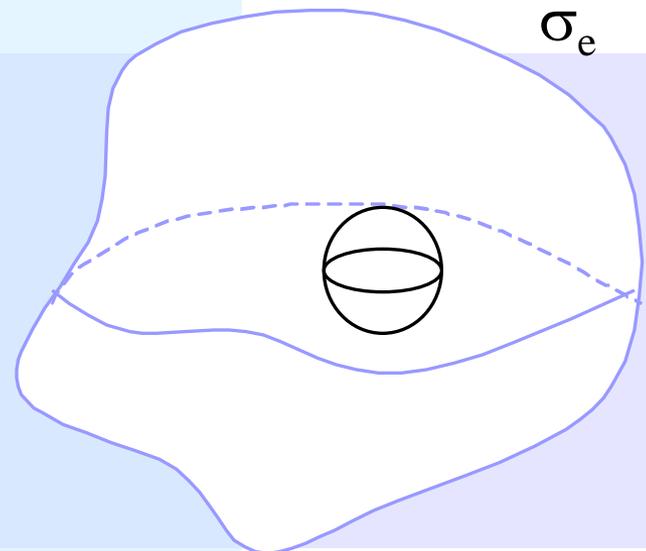
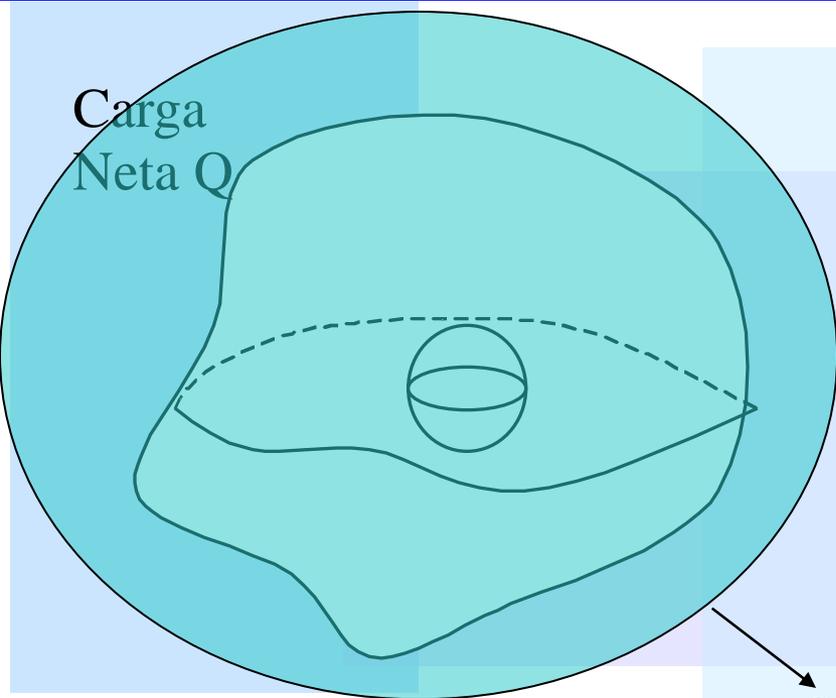
$$\oiint_{S'} \vec{D}_{int.} \cdot dS = Q_{total}$$

$$Q_{total} = \sigma_i A \quad \text{y} \quad \vec{D}_{int.} = 0 \Rightarrow Q_{total} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_i = 0$$



Caso Conductor con Oquedad



S: superficie cara externa

$$\sigma_i = 0$$

$$\Rightarrow Q = \iint_S \sigma_e ds$$

La carga Q se distribuye en la superficie exterior solamente



Caso Conductor con Oquedad

Carga
Neta Q

σ_i Superficie
huevo interior

σ_e

$$\vec{E} = 0$$

σ_e superficial cara externa

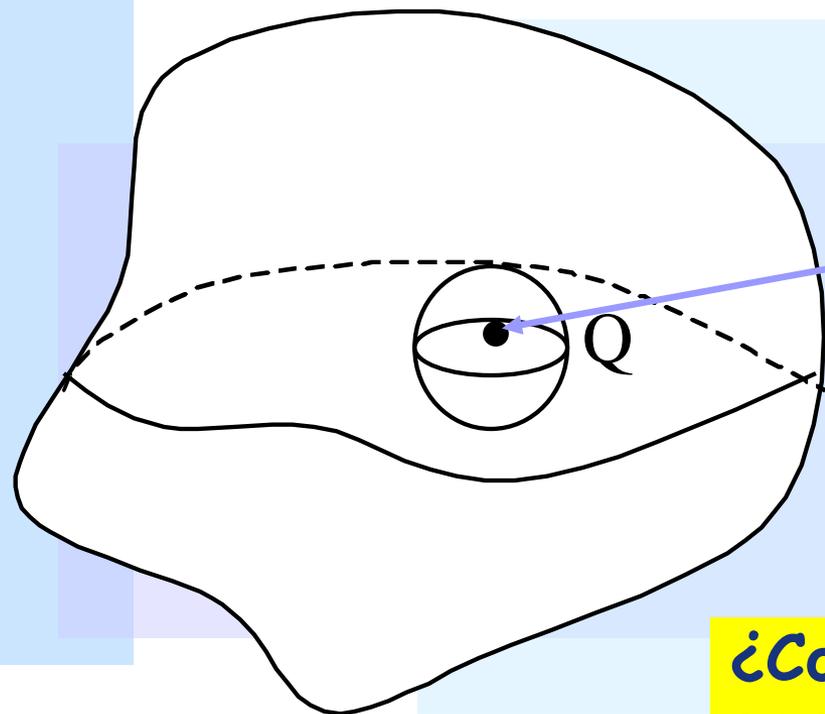
$$\sigma_i = 0$$

$$\Rightarrow Q = \iint_S \sigma_e ds$$

La carga Q se distribuye en
la superficie exterior
solamente



Conductor con oquedad y carga en su interior

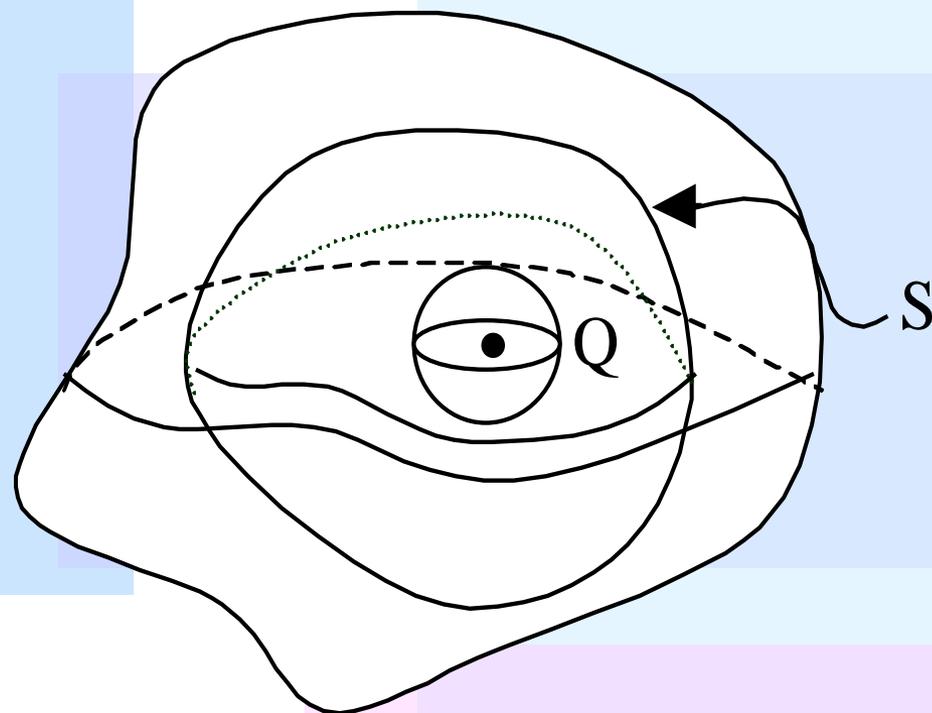


Carga Q puesta a propósito en el interior (en la oquedad)

¿Como se distribuye la carga en el estado de equilibrio?



Conductor con oquedad y carga en su interior

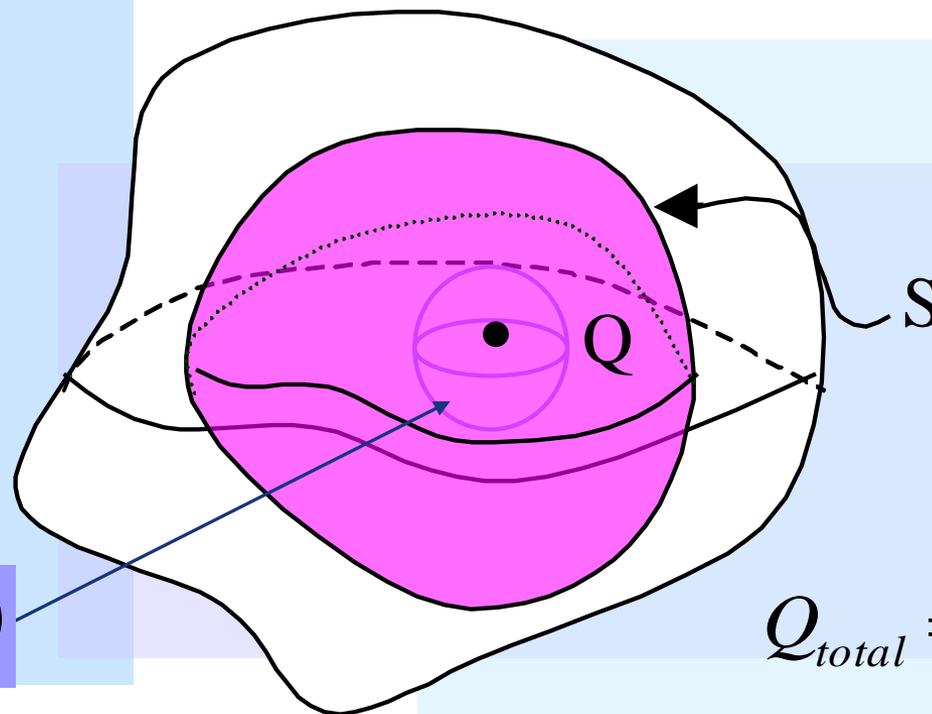


$$\oiint_{S'} \vec{D}_{\text{int.}} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{total}}$$

$$\vec{D}_{\text{int.}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{total}} = 0$$



Conductor con oquedad y carga en su interior



$$\oiint_{S'} \vec{D}_{\text{int.}} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{total}}$$

$$\vec{D}_{\text{int.}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{total}} = 0$$

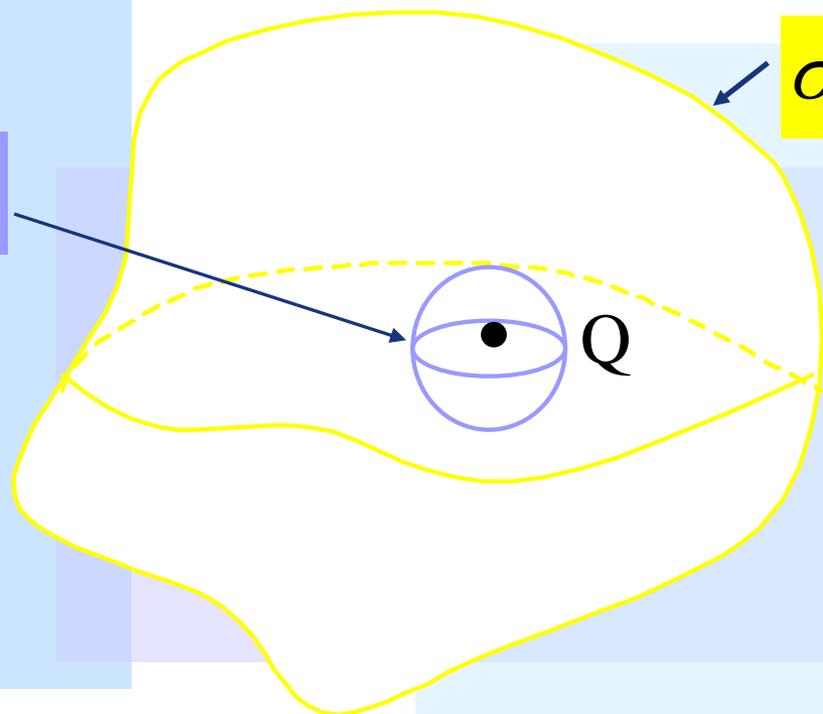
$$Q_{\text{total}} = 0 \Rightarrow \iint_A \sigma_i dS + Q = 0$$

Dado que la superficie S encierra a Q , la única manera que se puede satisfacer la condición $Q_{\text{total}}=0$ es con una densidad de carga superficial en la oquedad!



Conductor con oquedad y carga en su interior

$$\sigma_i \neq 0$$



$$\sigma_e \neq 0$$

$$\iint_S \sigma_e dS + \iint_A \sigma_i dS = 0$$

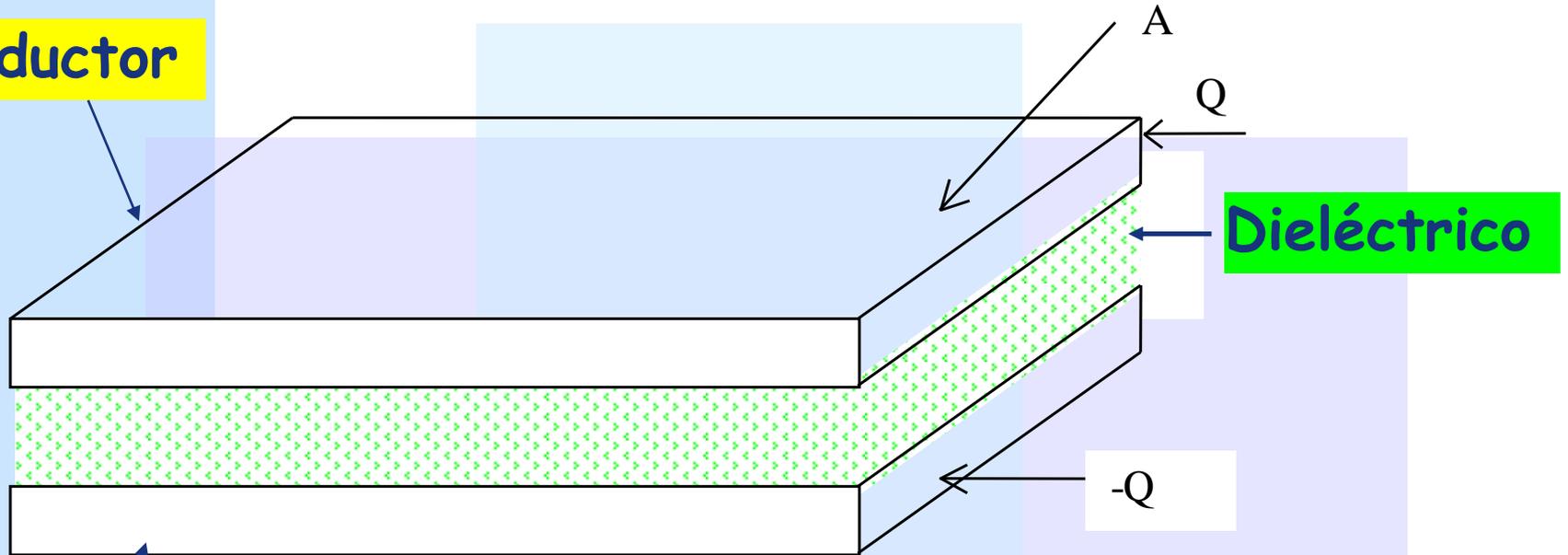
$$\Rightarrow \iint_S \sigma_e dS = Q$$

Para cumplir la condición de carga neta nula en el conductor aparece una densidad de carga en la superficie exterior σ_e



EJEMPLO

Conductor

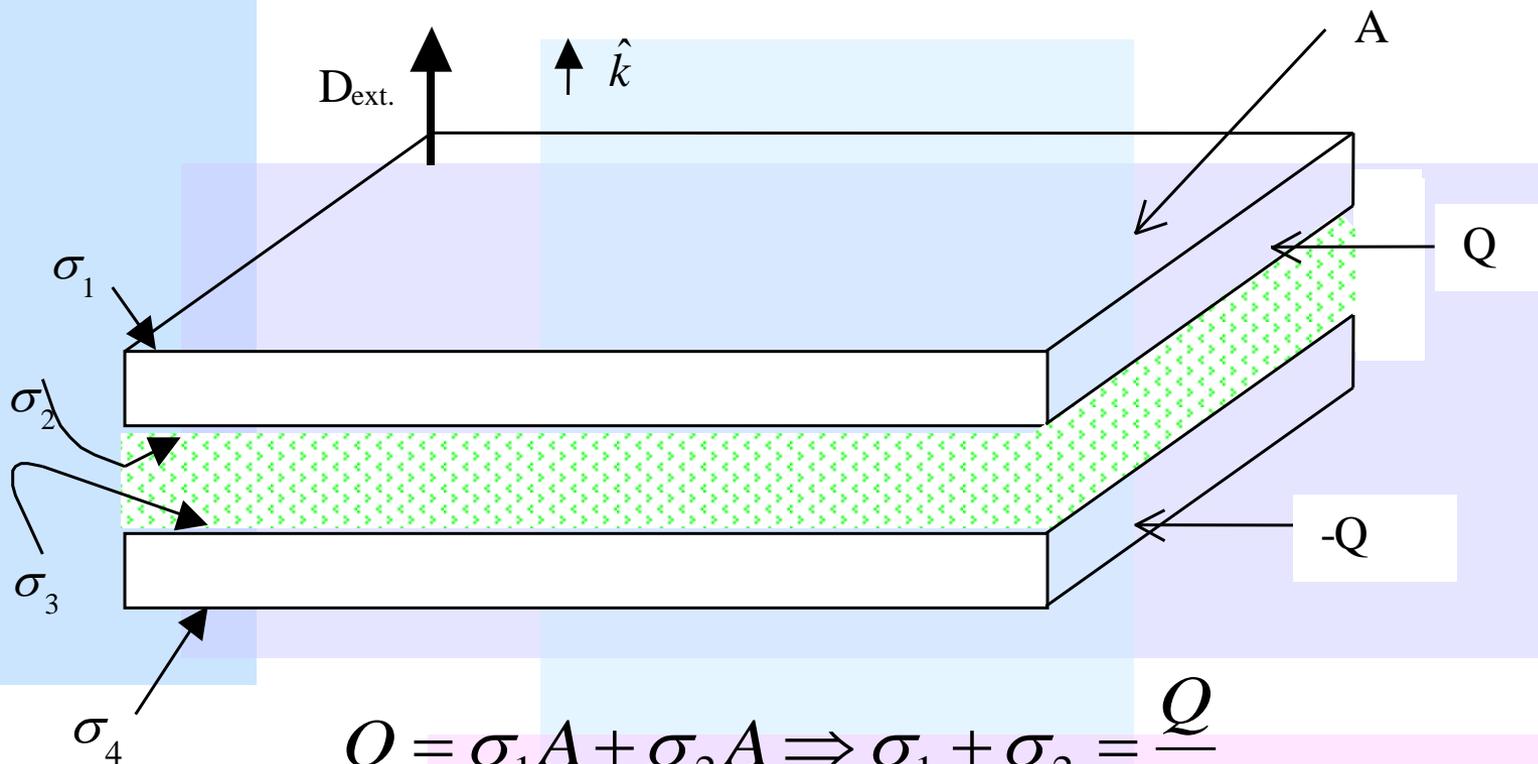


Dieléctrico

Conductor



EJEMPLO

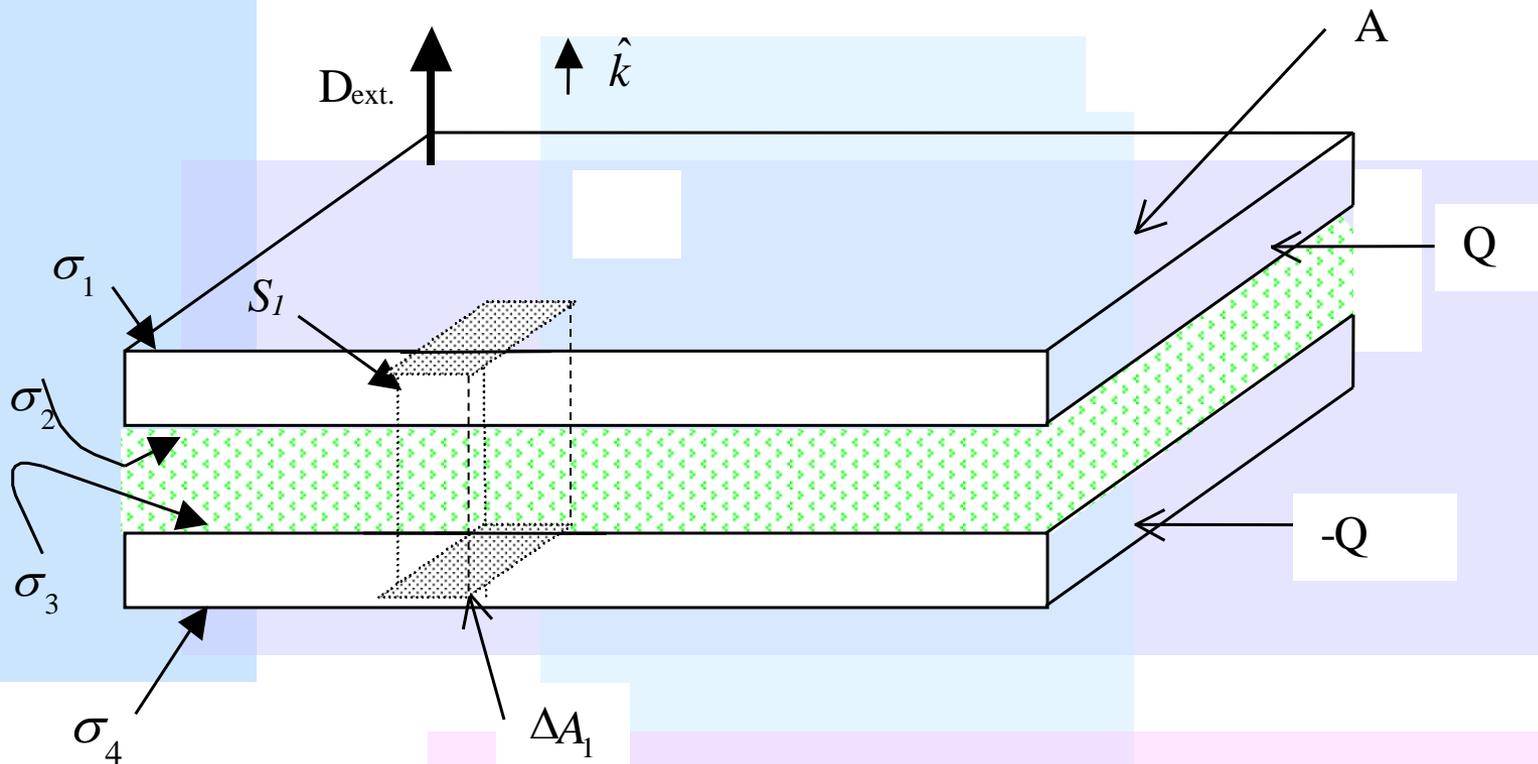


$$Q = \sigma_1 A + \sigma_2 A \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{A}$$

$$-Q = \sigma_3 A + \sigma_4 A \Rightarrow \sigma_3 + \sigma_4 = \frac{Q}{A}$$



EJEMPLO



$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{carasmanto}} D \cdot dS + \iint_{\text{tapas}} \vec{D} \cdot dS = 0$$

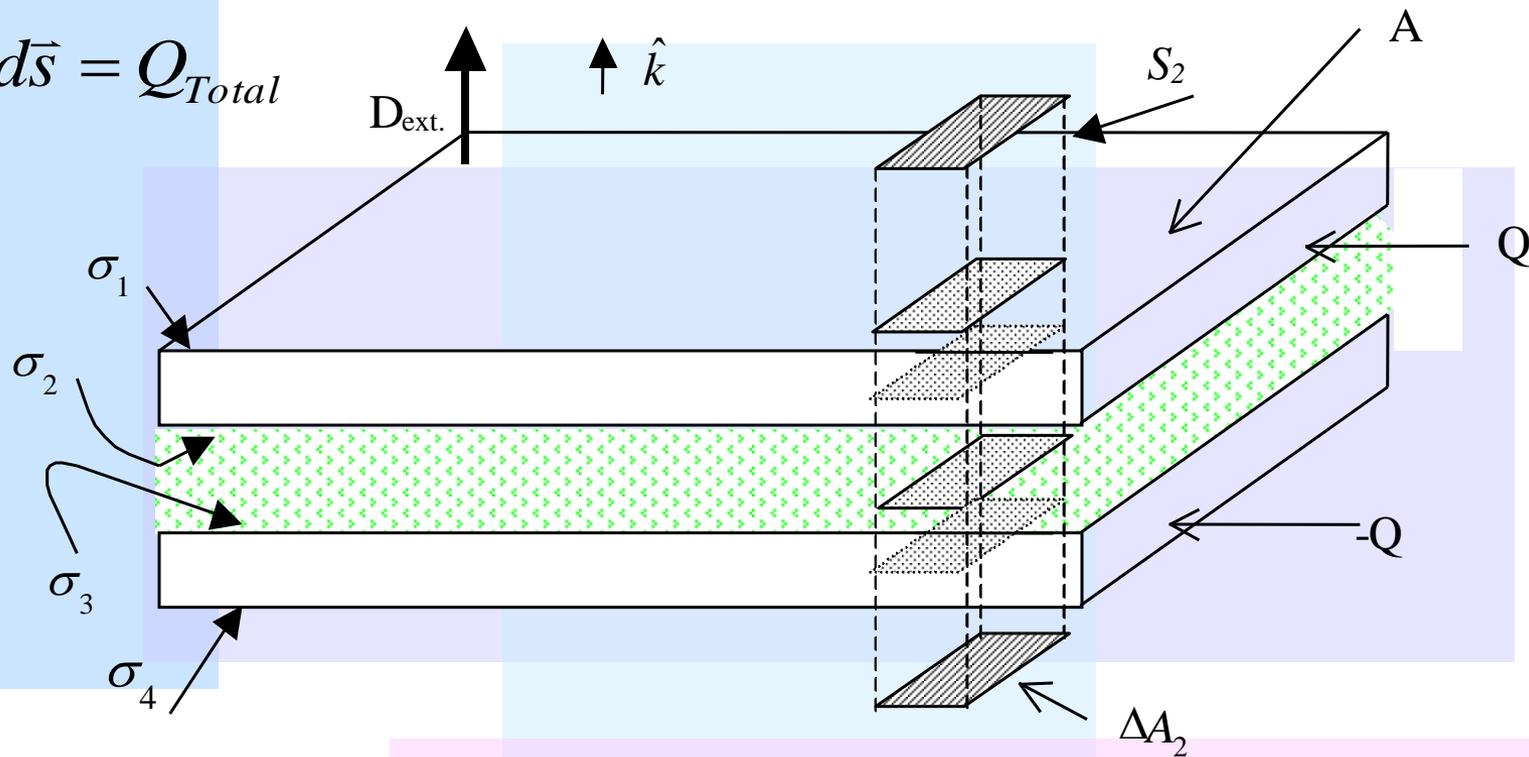
$$\Rightarrow \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

$$Q_{Total} = \iint_{\Delta A_1} \sigma_2 dS + \iint_{\Delta A_1} \sigma_3 dS$$



EJEMPLO

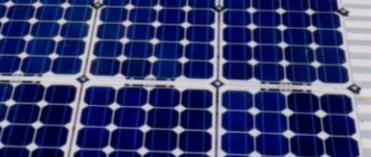
$$\oiint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{Total}$$



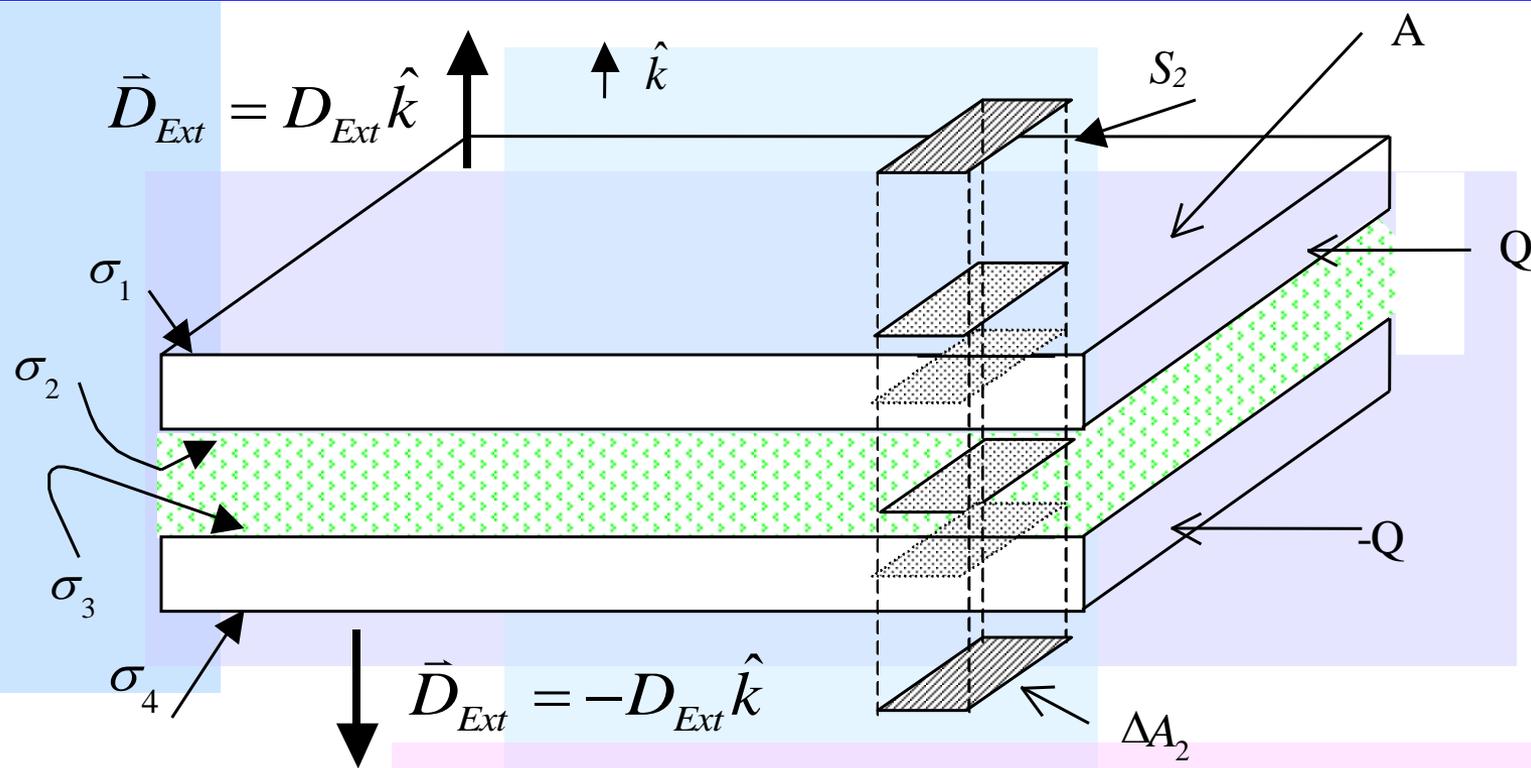
$$Q_{Total} = \sigma_1 \Delta A_2 + \sigma_2 \Delta A_2 + \sigma_3 \Delta A_2 + \sigma_4 \Delta A_2$$

$$Q_{Total} = \underbrace{(\sigma_1 + \sigma_2)}_{Q/A} + \underbrace{(\sigma_3 + \sigma_4)}_{-Q/A} \Delta A_2$$

$$\Rightarrow Q_{Total} = 0$$



EJEMPLO

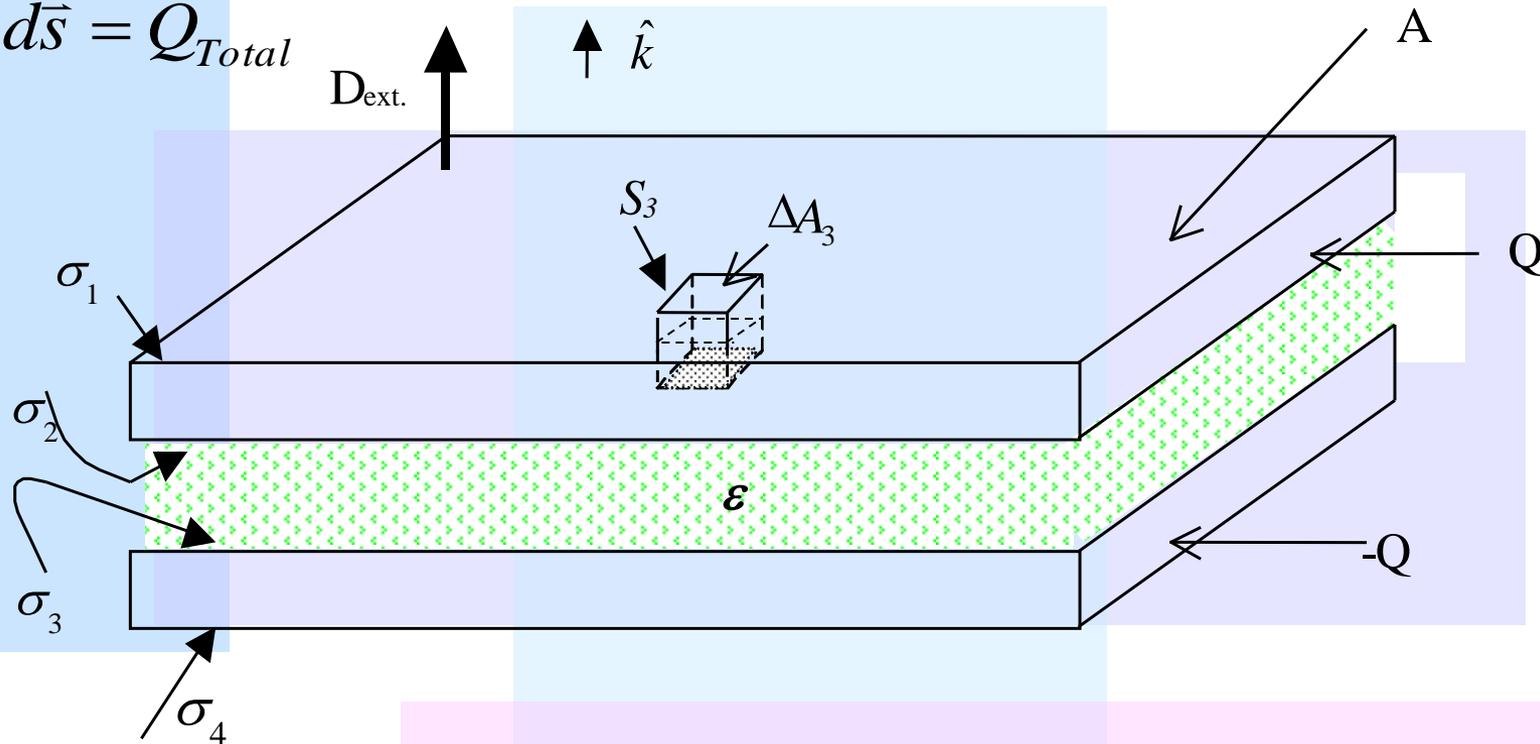


$$\oiint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2D_{Ext} \Delta A_2 \quad \therefore \oiint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{Total} \Rightarrow D_{Ext} = 0$$



EJEMPLO

$$\oiint_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{Total}$$

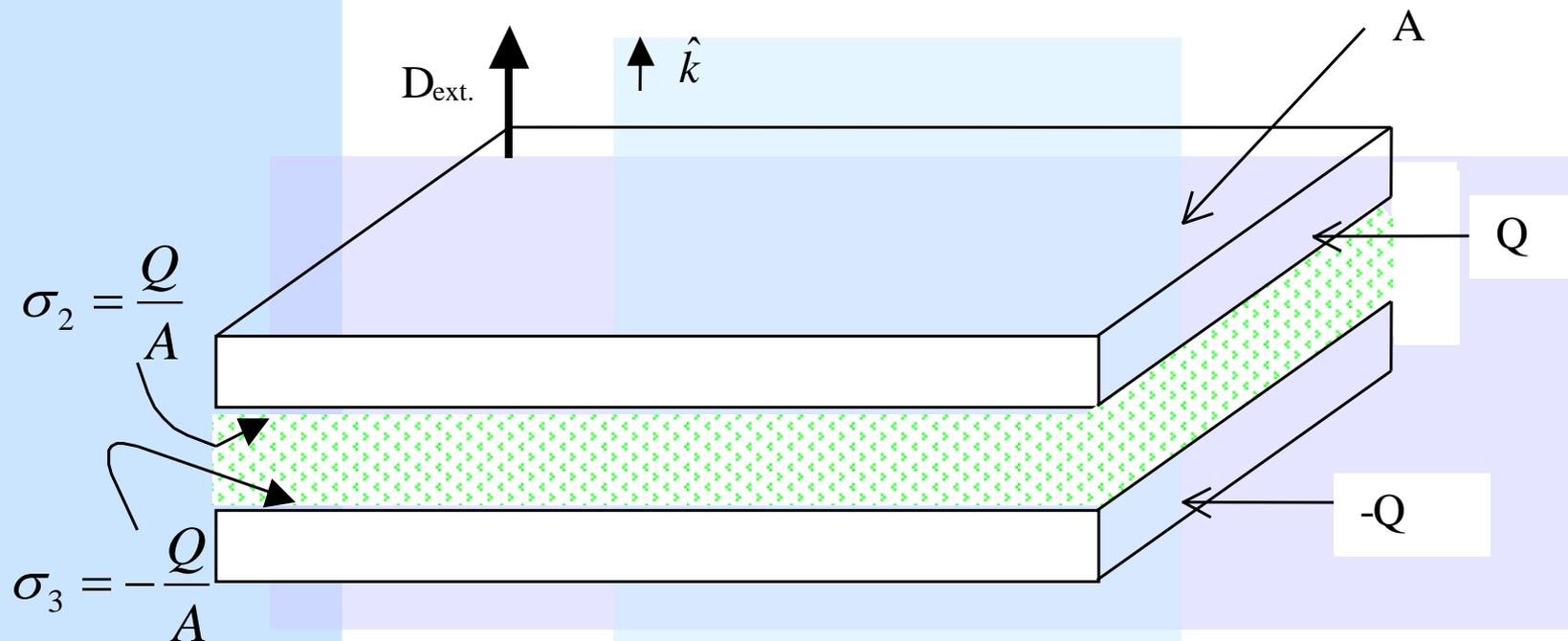


$$\oiint_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \quad Q_{Total} = \sigma_1 \Delta A_3 \Rightarrow \sigma_1 = 0$$

Similarmente $\sigma_4 = 0$



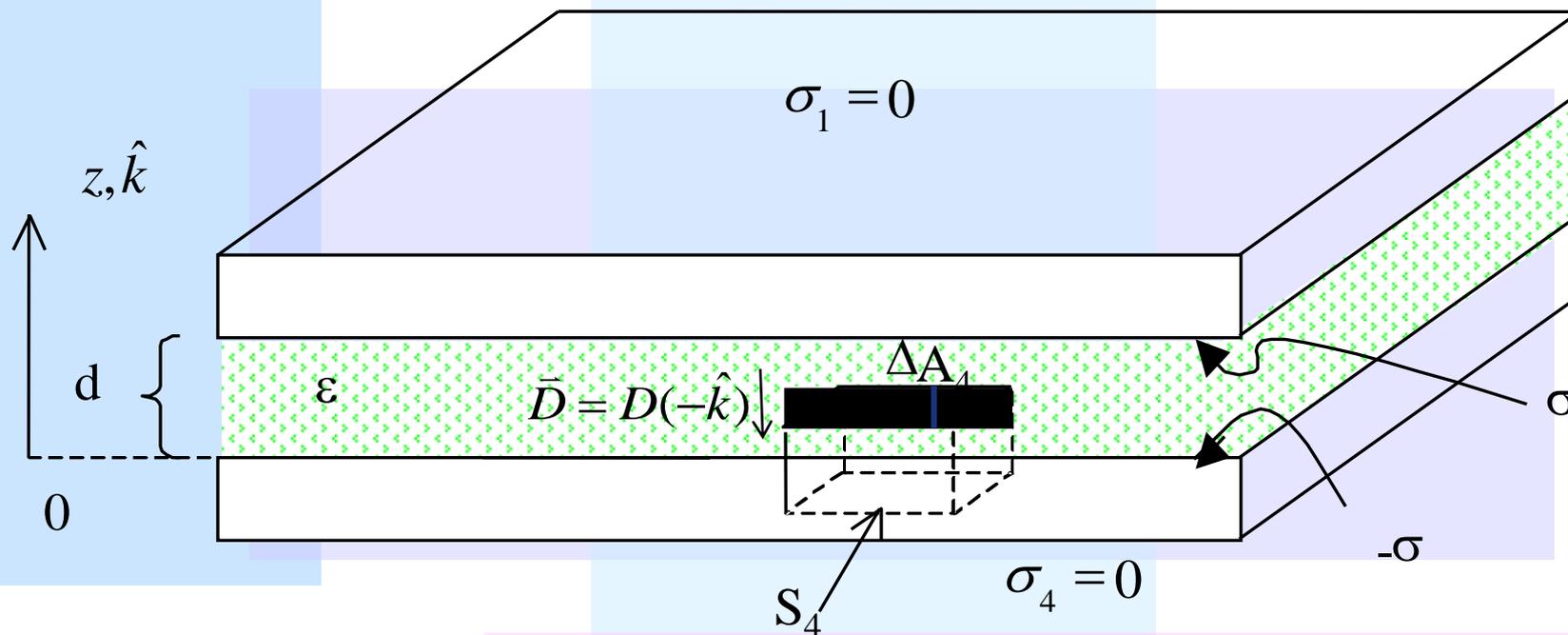
EJEMPLO



$$\sigma_2 = \frac{Q}{A} \equiv \sigma$$
$$\sigma_3 = -\frac{Q}{A} \equiv -\sigma$$



EJEMPLO



$$\therefore \oiint_{S_4} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{Total} \Rightarrow D(-\hat{k}) \cdot \Delta A_4(\hat{k}) = -\sigma \Delta A_4 \Rightarrow D = \sigma$$

$$\therefore \vec{D} = \sigma(-\hat{k}), \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}(-\hat{k})$$

Propuesto: Calcular diferencia de potencial entre placas